MINISTERIET FOR
BØRN, UNDERVISNING
OG LIGESTILLING

Matematiske formler og fagord

Til matematik i 7.-10. klasse og folkeskolens prøver i matematik

Matematiske formler og fagord
Til matematik i 7.-10. klasse og folkeskolens prøver i matematik
Redaktion og tilrettelæggelse af indhold for
Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling:
Kaj Østergaard, Klaus Fink og Thomas Kaas
Grafisk tilrettelæggelse: Bording A/S

Foto, forside/bagside: shutterstock
Illustrationer s. 40, 52 : Colourbox
Illustration s. 41: Bording A/S

1. udgave, oktober 2016

ISBN 978-87-603-3116-9 (www.udgave)

www.uvm.dk/fp
Publikationen findes kun i elektronisk format

Udgivet af Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling

Eventuelle henvendelser af indholdsmæssig karakter rettes til
Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling,
Kontor for Prøver, Eksamen og Test

Indhold

Forord til læreren

Denne udgivelse indeholder dels matematiske formler, dels forklaringer og eksempler på fagord, som er centrale i folkeskolens matematikundervisning, jf. Fælles Mål 2015. Indholdet er udvalgt på baggrund af mål og læseplan for matematik, og teksten er opbygget på en måde, som svarer til opbygningen af Fælles Mål:

- Matematiske kompetencer
- Tal og algebra
- Geometri og måling
- Statistik og sandsynlighed

Hvert afsnit er opdelt i færdigheds- og vidensområderne. Bagerst er der et stikordsregister.

I afsnittet om de matematiske kompetencer er karakteristikken af de seks kompetencer formuleret til elever. Disse formuleringer er omsat fra tilsvarende formuleringer til læreren i læseplanen.

Udgivelsen er tænkt som et supplerende materiale til matematikundervisningen på 7.-10. klassetrin og som et hjælpemiddel til prøverne i matematik. Elever må medbringe 'Matematiske formler og fagord' på lige fod med andre hjælpemidler, som har været anvendt i den almindelige undervisning, til de skriftlige og mundtlige prøver i matematik efter 9. og 10. kl., bortset fra til prøven uden hjælpemidler.

Forord til eleven

'Matematiske formler og fagord' kan du bruge i matematikundervisningen og til de skriftlige og mundtlige prøver i matematik efter 9. og 10. klasse, dog ikke til prøven uden hjælpemidler.

Hvis du printer 'Matematiske formler og fagord', kan du tilføje dine egne noter. Du kan fx

- skrive formlerne i den form, du er mest fortrolig med
- skrive flere forklaringer
- skrive dine egne eksempler
- tegne geometriske figurer
- skrive andre formler, du mener, du kan få brug for.

Hvis du bruger pdf-udgaven, kan du fx også indsætte

- links til dine egne eller andres videoer med forklaringer
- links til filer fra matematikprogrammer
- links til websider.

Bagerst er der et stikordsregister, som du kan bruge til at finde netop de formler eller fagord, du søger.

Matematiske kompetencer

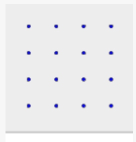
Problembehandling

At have kompetence i problembehandling betyder, at man kan opstille og løse matematiske problemer, som man ikke umiddelbart har en løsningsmetode til.

Opstilling af matematiske problemer

Eksempel:

På tegningen til højre er et 4 x 4 sømbræt. Afstanden mellem sømmene vandret og lodret er 1.
Hvor mange forskellige afstande kan man afsætte på et 4 x 4 sømbræt?



Løsning af matematiske problemer

Eksempler på en løsningsstrategi:

Forstå problemet
Det er tit en god strategi at begynde med at 'prøve sig frem'. I forbindelse med problemet herover kan du fx begynde med at sætte nogle elastikker på sømbrættet og forsøge at beregne afstandene. De skrå afstande kan du beregne ved hjælp af Pythagoras' sætning.

⇩	⇨	**Afstand**
0	0	0
0	1	1
0	2	2
0	3	3
1	1	$\sqrt{2}$
1	2	$\sqrt{5}$
1	3	$\sqrt{10}$
2	2	$\sqrt{8}$
2	3	$\sqrt{13}$
3	3	$\sqrt{18}$

Find en systematik
Det næste trin kan være, at du forsøger at finde en form for systematik i din undersøgelse.

Hvis du begynder med en elastik i øverste venstre hjørne, kan du afsætte tre forskellige afstande ved at bruge et af de andre søm i øverste række. Det giver afstandene 1, 2 og 3. Herefter kan du bruge sømmene i anden række – stadig med udgangspunkt i øverste venstre hjørne. Hvis du fortsætter på samme måde i tredje række, kan du finde frem til de afstande, der står i tabellen. Nogle af afstandene er lige store. For eksempel giver '1 hen og 2 ned' samme afstand som '2 hen og 1 ned'.

Vurder problemets løsning

Fremgangsmåden har ført frem til løsningen: 10 forskellige afstande. For at være sikker på at løsningen er rigtig, kan du undersøge problemet på en anden måde: På sømbrættet er den længste afstand i begge retninger 3. Mulige afstande er 0, 1, 2 og 3 både lodret og vandret. Ud fra dette kan du opstille en tabel over mulige afstande. Nogle afstande kommer på den måde til at optræde to gange. Dem kan du nøjes med at skrive en gang i din løsning. Denne fremgangsmåde giver også løsningen 10 (når afstanden 0 tælles med).

Hen ⇨ / Ned ⇩	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
2	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
3	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$

Modellering

Modellering handler om processer, hvor man anvender matematik til at beskrive situationer og løse problemer fra verden omkring os. At have kompetence i modellering betyder, at man kan opstille og vurdere matematiske modeller.

En **matematisk model** er en beskrivelse af den virkelige verden med matematiske begreber.

En **modelleringsproces** er et forløb, hvor du anvender matematik til at behandle situationer eller problemstillinger uden for matematikken. Man kan opdele processen i forskellige antal faser. Eksemplet herunder opdeler en modelleringsproces i fire faser:

<table>
<tr><th>Faser</th><th>Mulige spørgsmål/opgaver</th><th>Eksempler</th></tr>
<tr><td>Udvælge og afgrænse en problemstilling eller en situation fra verden omkring os</td><td>Hvilken problemstilling eller situation fra verden omkring os vil jeg modellere?</td><td>Hvor meget vand bruger man på at gå i brusebad?</td></tr>
<tr><td>Opstille en matematisk model</td><td>Hvilke variable vil jeg tage med i modellen, og hvilke vil jeg udelade?

Hvilket område af matematikken kan jeg bruge til at beskrive problemstillingen?</td><td>I modellen vælger jeg udelukkende variablen tid, det vil sige den tid, man går i bad.

Som matematisk beskrivelsesmiddel vælger jeg en tabel med tid og vandforbrug.

<table>
<tr><th>Tid</th><th>Vandforbrug</th></tr>
<tr><td>0 min</td><td>0 L</td></tr>
<tr><td>1 min</td><td>9 L</td></tr>
<tr><td>2 min</td><td>18 L</td></tr>
<tr><td>3 min</td><td>27 L</td></tr>
<tr><td>4 min</td><td>36 L</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>45 L</td></tr>
<tr><td>6 min</td><td>54 L</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Bruge modellen</td><td>Hvilke spørgsmål kan jeg stille, og hvordan kan jeg bruge den matematiske model til at svare på spørgsmålene?</td><td>Hvor meget vand kan jeg spare om året, hvis jeg afkorter mit daglige bad fra 6 minutter til 4 minutter?

For hvert bad, hvor jeg kun bruger 4 minutter i stedet for 6 minutter, sparer jeg:
$54\ L - 36\ L\ =\ 18\ L$

Hvis jeg går i bad en gang om dagen, sparer jeg:
$365\ dage \cdot 18\frac{L}{dag} = 6570\ L$</td></tr>
</table>

Vurdere modellen	Giver den matematiske model svar på spørgsmålene, som nogle kan bruge i virkeligheden? Er der relevante spørgsmål, som modellen ikke kan svare på? Kan jeg forbedre modellen ved at inddrage andre variable?	Modellen kan give realistiske og brugbare svar på relevante spørgsmål om vandforbrug ved brusebad. Hvad kan jeg spare ved at skrue ned for trykket på vandet? Tiden er en vigtig variabel, men man kan også inddrage trykket, det vil sige, hvor meget man skruer op for vandet.

Anvendelse og vurdering af matematiske modeller

Beregning af Body Mass Index (BMI) er en matematisk model, der kan bruges til at vurdere, om en person er under- eller overvægtig.

$BMI = \frac{vægt}{højde^2}$ Vægten angives i kilogram og højden i meter.

BMI under 18,5	Undervægt
BMI mellem 18,5 og 25	Normal vægt
BMI mellem 25 og 30	Overvægt
BMI over 30	Fedme

Eksempler på spørgsmål, der kan indgå i analyse og vurdering af en matematisk model:

Analysespørgsmål	**Eksempel**
Hvad kan man bruge modellen til? Er der tilfælde, hvor man ikke kan bruge modellen?	Modellen kan bruges til at beregne en værdi, BMI, som angiver, om en person er undervægtig, har normal vægt, er overvægtig eller fed. Modellen er fx ikke velegnet til børn. For eksempel er en pige på 10 år gennemsnitlig 1,42 m høj og vejer 34 kg: $BMI = \frac{34}{1{,}42^2} = 16{,}9$ Dette er en normal vægt for en pige på 10 år og ikke undervægt, som modellen angiver.
Hvilke forhold medtager modellen? Er der andre væsentlige forhold?	Modellen anvender en persons vægt og højde. Modellen tager ikke højde for fx kropsbygning, køn og alder.
Giver den matematiske model svar på spørgsmål, som nogle kan bruge i virkeligheden?	Modellen giver et tal, som i en række tilfælde kan oplyse, om en person har normal vægt eller ej.
Er der andre modeller, som er bedre til at besvare de samme spørgsmål fra virkeligheden?	Der findes forskellige forslag til forbedringer af BMI-modellen, fx $BMI = \frac{1{,}3 \cdot vægt}{højde^{2{,}5}}$

Ræsonnement og tankegang

> At have kompetence i ræsonnement og tankegang betyder, at man kan tænke på måder, som er typiske for matematik og argumentere for matematiske sammenhænge.

Herunder er eksempler på nogle af de fagord, der kan indgå i en matematisk argumentation:

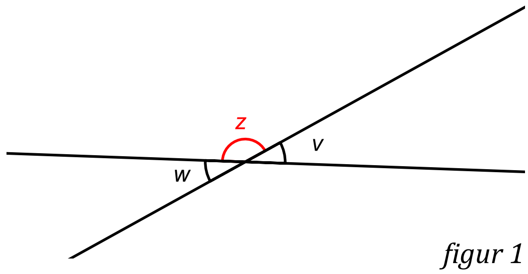
Definition

En definition er en præcis formulering, der beskriver betydningen af et fagord. En definition er en 'fælles grundlæggende beslutning' og kan derfor ikke bevises. Den følgende formulering definerer fagordet 'topvinkler':

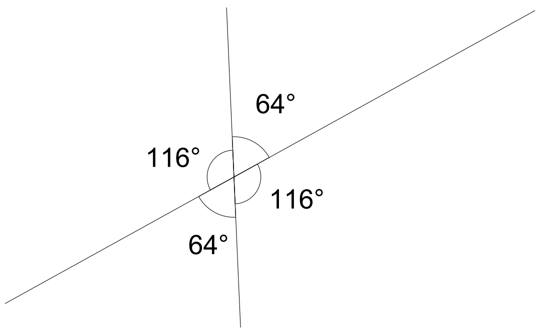
De to modstående vinkler mellem to linjer, som skærer hinanden, kalder man for topvinkler.

På figur 1 er vinklerne *v* og *w* topvinkler.

Topvinklerne på figur 2 er lige store. Måske overvejer du, om topvinkler altid er lige store? En sådan overvejelse kan man kalde en **hypotese**. En hypotese er altså en antagelse om, at en bestemt sammenhæng gælder generelt.



figur 1



figur 2

Bevis

Da et bevis skal gælde for alle forskellige tilfælde, må du bruge vilkårlige linjer og vinkler som i figur 1, hvis du vil bevise, at din hypotese er sand.

På figur 1 er vinklerne *v* og *z* tilsammen 180° , da de er nabovinkler. Det samme gælder for vinklerne *w* og *z*. Det gælder altså, at:

$$v + z = w + z$$

I ligningen kan vi trække z fra på begge sider af lighedstegnet, så vi får:

$$v = w$$

Vi har hermed bevist, at vinklerne *v* og *w* er lig hinanden. Da *v* og *w* har vilkårlige størrelser, har vi følgende matematiske **sætning**: Topvinkler er lige store.

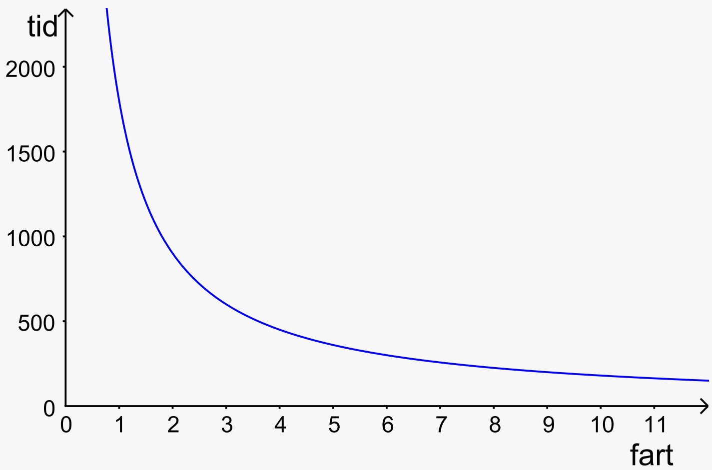
Repræsentation og symbolbehandling

At have kompetence i repræsentation og symbolbehandling betyder, at man kan anvende og forstå forskellige repræsentationer i matematik, herunder matematisk symbolsprog.

Du kan beskrive en matematisk situation med forskellige **repræsentationer**, fx regneudtryk, tabel, graf eller beskrivende sætninger. Forskellige repræsentationer beskriver den samme situation på forskellige måder og har derfor forskellige muligheder og begrænsninger.

Eksempel:

Simon går 1800 m til skole hver dag. Det er forskelligt, hvor lang tid det tager for ham. Han vil lave en matematisk beskrivelse af, hvor lang tid det tager at gå til skole.

<table>
<tr><th>Repræsentationsform</th><th>Eksempel</th></tr>
<tr><td>Regneudtryk</td><td>$t = \frac{1800}{v}$
t er tiden i sekunder
v er farten i meter/sekund</td></tr>
<tr><td>Tabel</td><td><table><tr><th>v</th><th>t</th></tr><tr><td>$1\ m/s$</td><td>$1800\ s$</td></tr><tr><td>$2\ m/s$</td><td>$900\ s$</td></tr><tr><td>$5\ m/s$</td><td>$360\ s$</td></tr><tr><td>$10\ m/s$</td><td>$180\ s$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Graf</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Beskrivende sætninger</td><td>Den tid Simon bruger på at gå i skole, kan beregnes som 1800 divideret med hans fart. Tiden måles i sekunder og farten i meter pr. sekund.</td></tr>
</table>

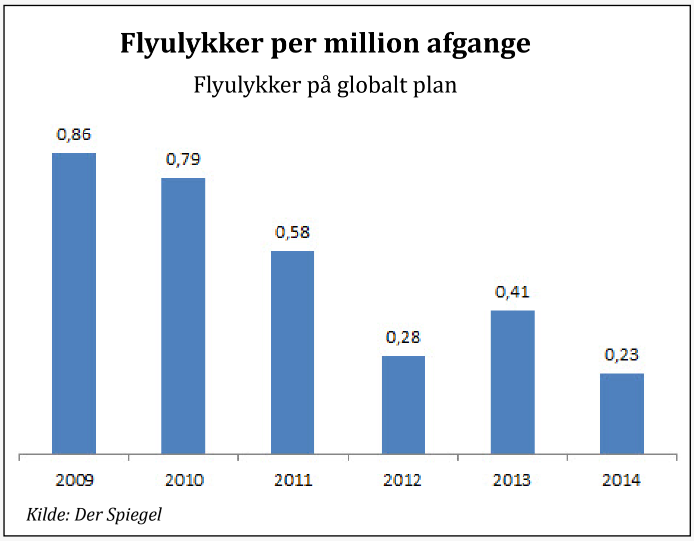
Symbolbehandling handler om at forstå, opstille, anvende og omskrive udtryk, der er skrevet med tal og bogstaver. I eksemplet herover er udtrykket $t = \frac{1800}{v}$ opstillet. Hvis du i stedet vil beregne Simons fart ud fra den tid, han bruger på at gå i skole, kan du **omskrive** udtrykket $t = \frac{1800}{v}$ til $v = \frac{1800}{t}$.

Kommunikation

At have kompetence i kommunikation betyder, at man kan udtrykke sig mundtligt og skriftligt med og om matematik, at man kan forstå andres udtryk med og om matematik, og at man kan fortolke disse matematiske udtryk.

Udtryk med matematik

Et diagram i en avis er et eksempel på kommunikation med matematik:



Eksempler på **fortolkninger**:

Der er sket et drastisk fald i antallet af flyulykker fra 2009 til 2014.

I 2014 forulykkede et fly for hver cirka fire millioner flyafgange.

Udtryk om matematik

Ligning

I en matematikbog kan en definition på en ligning lyde:

En ligning består af to matematiske udtryk med et lighedstegn i mellem sig. Lighedstegnet viser, at de to udtryk har samme værdi. Ofte indgår en eller flere ubekendte (ofte x) i en ligning. Ligningen løses ved at finde talværdier for de(n) ubekendte, som gør, at udsagnet er sandt. Det vil sige, at de to udtryk på hver side af lighedstegnet har samme værdi.

Laura vil forklare sin lillebror, hvad en ligning er:

'En ligning kan fx se sådan ud: $5 + x = 11 - x$
Det gælder om at finde ud af, hvad x skal være, så lighedstegnet passer.'

Hjælpemidler

At have matematisk kompetence i hjælpemidler betyder, at man har kendskab til relevante faglige hjælpemidler, at man kan vælge relevante hjælpemidler til løsning af en given opgave, og at man kan anvende disse hjælpemidler.

Eksempel:

Løs ligningen $2x^2 - x + 1 = -2x + 2$

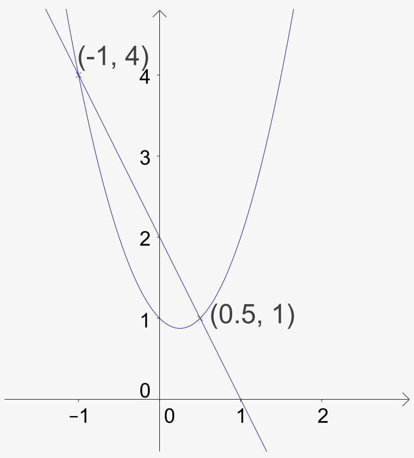
1. Du kan løse ligningen ved hjælp af et CAS-værktøj:

$$2x^2 - x + 1 = -2x + 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 0{,}5$$

2. Du kan løse ligningen grafisk med et dynamisk geometriprogram:



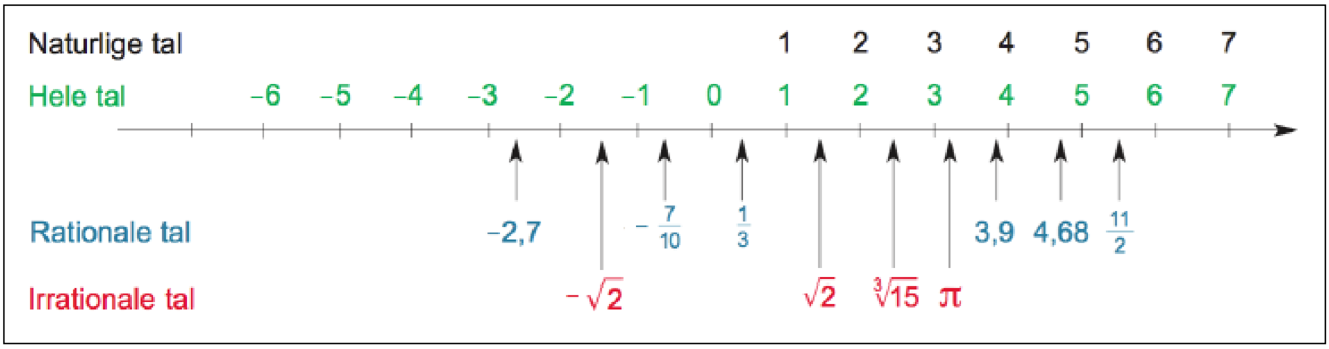
3. Du kan løse ligningen ved at prøve dig frem med brug af et regneark:

Regneark

	A	B	C
1	x	$2x^2 - x + 1$	$-2x + 2$
2	-5	56	12
3	-4	37	10
4	-3	22	8
5	-2	11	6
6	-1	4	4
7	0	1	2
8	1	2	0
9	2	7	-2
10	3	16	-4
11	4	29	-6
12	5	46	-8
13			
14	0.5	1	1

Tal og algebra

Tal



De **naturlige tal** kaldes også 'tælletallene'. Et naturligt tal, som netop to tal går op i – nemlig 1 og tallet selv – kaldes et **primtal**. De 25 mindste primtal er:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

De **hele tal** består af de **positive hele tal** (de naturlige tal), 0 og de **negative hele tal** (-1, -2, -3, ...).

De **rationale tal** er alle tal, der kan skrives som brøker. En **brøk** er et tal, der kan skrives som $\frac{a}{b}$, hvor a og b er hele tal, og hvor $b \neq 0$.

Rationale tal kan også skrive som **decimaltal**.

Eksempler:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$

$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots = 0{,}\overline{142857}$

$\frac{1}{8} = 0{,}125$

De **irrationale tal** er de tal på tallinjen, der ikke kan skrives som brøker.

Eksempler:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ $\pi \approx 3{,}1416$

De **reelle tal** består af de rationale tal og de irrationale tal.

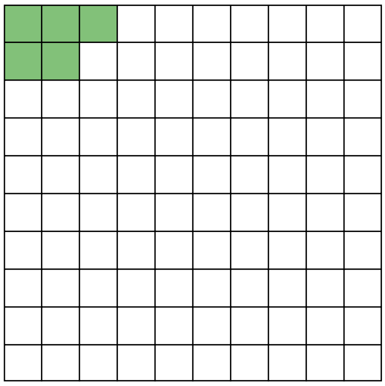
Procent og promille

Procent betyder hundrededele.

$\frac{a}{100} = a\ \%$

Sammenhæng mellem procent, brøk og decimaltal:

$5\ \% = \frac{5}{100} = 0{,}05$



Begrebet **procentpoint** bruges til at angive en forskel mellem procentstørrelser.

> Eksempel:
>
> Hvis antallet af vælgere til et politisk parti stiger fra 10 % til 15 %, er den steget med 5 procentpoint, men med 50 %.

Promille betyder tusindedele.

$\frac{a}{1000} = a\ ‰$

Potenser

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ faktorer}}$ $\qquad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

a^n kalder man en **potens**.

n kalder man **eksponenten**.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

$a^0 = 1 \qquad a \neq 0 \qquad 10^0 = 1$

Man kan bruge potenser til at skrive meget store tal og meget små tal.

> Eksempler:
>
> $3\,500\,000 = 3{,}5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3{,}5 \cdot 10^6$
>
> $0{,}0000023 \text{ m} = 2{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

Rødder

Kvadratroden af et tal er det ikke-negative tal, der ganget med sig selv giver tallet.

$\sqrt{4} = 2$ fordi $2^2 = 4$

> Eksempler på kvadratrødder:
>
> $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
>
> $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$

$\sqrt{a}$ kan man skrive som $a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{5}$ kan man skrive som $5^{\frac{1}{2}}$

Kubikroden af et tal er det tal, der ganget med sig selv tre gange giver tallet.

$\sqrt[3]{64} = 4$, fordi $4^3 = 64$

$\sqrt[3]{5}$ kan man skrive som $5^{\frac{1}{3}}$

> Eksempler på kubikrødder:
>
> $\sqrt[3]{-2} \approx -1{,}2599$
>
> $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$
>
> Eksempler på andre rødder:
>
> $\sqrt[5]{32} = 2$, fordi $2^5 = 32$
>
> $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}0718$

Talfølge

En talfølge er en følge – eller en liste – af tal, der ofte er skrevet i en systematik eller efter en formel.

> Eksempler:
>
> 2, 4, 6, 8, 10, ...
>
> 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Regnestrategier

De fire regningsarter

Regningsart	Regnetegn	Regnetegn i digitale værktøjer	Eksempel	Fagord
addition	+	+	7 + 3 = 10	sum
subtraktion	-	-	7 - 3 = 4	differens
multiplikation	·	x, ·, *	7 · 3 = 21	faktorer, produkt
division	:	/ , ÷	21 : 3 = 7	kvotient

Regningsarternes hierarki

1. Udregn indholdet af alle parenteser.
2. Udregn potenser og rødder.
3. Udregn multiplikationer og divisioner.
4. Udregn additioner og subtraktioner.

Udregn ligestillede regningsarter (fx addition og subtraktion) fra venstre mod højre.

Eksempel:

Her er et regneudtryk:	$10 : 2 - 2^3 + (3 + 7) - \sqrt{4} + 3 \cdot 4 =$
Parenteser udregnet:	$10 : 2 - 2^3 + 10 - \sqrt{4} + 3 \cdot 4 =$
Potenser og rødder udregnet:	$10 : 2 - 8 + 10 - 2 + 3 \cdot 4 =$
Multiplikationer og divisioner udregnet:	$5 - 8 + 10 - 2 + 12 =$
Additioner og subtraktioner udregnet:	17

Regning med negative tal

Eksempler:

$8 + (-5) = 3$
$8 - (-5) = 13$
$3 \cdot (-4) = -12$
$(-3) \cdot 4 = -12$
$(-3) \cdot (-4) = 12$
$12 : (-4) = -3$
$(-12) : 4 = -3$
$(-12) : (-4) = 3$

Regning med brøker

Eksempler:

$$4 : 3 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5-4}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7 \cdot 2} = \frac{5}{14}$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{eller} \quad 5 : \frac{2}{3} = \frac{15}{3} : \frac{2}{3} = 15 : 2 = \frac{15}{2}$$

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9} \quad \text{eller} \quad \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = 8 : 9 = \frac{8}{9}$$

Regning med procenter

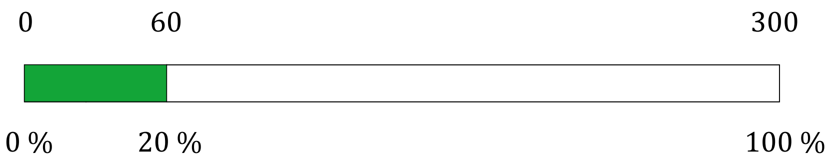
Eksempler:

Hvor meget er 8 % af 1325?

8 % af 1325 er $0{,}08 \cdot 1325 = 106$

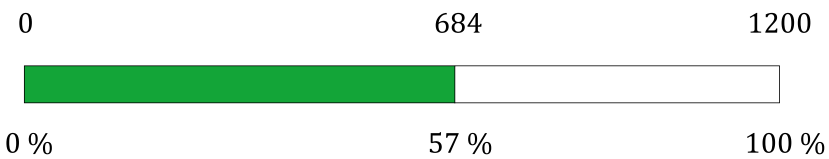
Hvor mange procent er 60 af 300?

60 af 300 udgør $\frac{60}{300} = 0{,}20 = \frac{20}{100} = 20\ \%$



57 % af et tal er 684. Hvor stort er tallet?

Tallet er $\frac{684}{0{,}57} = 1200$



Regning med potenser

$a^2 = a \cdot a$

Eksempler:

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$ $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

Eksempel:

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Eksempel:

$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$

$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

Eksempel:

$(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10}$

Regning med kvadratrødder

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Eksempel:

$\sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Eksempel:

$\sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$

Økonomi

Når man ændrer en størrelse flere gange med samme procentdel, kalder man det **procentuel vækst**. I økonomi kalder man det også **sammensat rente**. Sammensat rente forekommer fx i forbindelse med en **opsparing**.

Formel for sammensat rente:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

n: antallet af **terminer**

K_n: størrelsen af **kapitalen** efter n terminer

K_0: **startkapitalen**

r: **renten** pr. termin i procent

Eksemplet i regnearket herunder viser, hvordan et pengebeløb (kapital) vokser, når banken tilskriver renter hver termin.

C10 =C9*(1+B3)

	A	B	C
1			
2	Startkapital:	kr. 1 500,00	
3	Rente pr. termin:	5%	
4			
5		Antal terminer	Kapital
6	K_0	0	kr. 1 500,00
7	K_1	1	kr. 1 575,00
8	K_2	2	kr. 1 653,75
9	K_3	3	kr. 1 736,44
10	K_4	4	kr. 1 823,26
11	K_5	5	kr. 1 914,42

Eksemplet i regnearket herunder viser, hvordan et pengebeløb vokser i en opsparing, når man indsætter et fast beløb hver termin, og banken tilskriver renter hver termin.

D9 =D8+B9+C9

	A	B	C	D
1				
2	Rente i procent:		4%	
3	Indsat beløb:		kr. 3 000,00	
4				
5	Dato	Indsat	Rente i kr.	Saldo
6	1/1 2015	kr. 3 000,00		kr. 3 000,00
7	1/1 2016	kr. 3 000,00	kr. 120,00	kr. 6 120,00
8	1/1 2017	kr. 3 000,00	kr. 244,80	kr. 9 364,80
9	1/1 2018	kr. 3 000,00	kr. 374,59	kr. 12 739,39
10	1/1 2019	kr. 3 000,00	kr. 509,58	kr. 16 248,97
11	1/1 2020		kr. 649,96	kr. 16 898,93
12				

I forbindelse med **lån** af penge i en bank benytter banken følgende begreber:

Hovedstol: Et låns størrelse.

Ydelse: Det beløb låntageren skal betale hver termin, fx hver måned, kvartal eller år.

Rente: En omkostning, der udgør en procentdel af lånets størrelse.

Afdrag: Den del af ydelsen, som er tilbagebetaling af lånet.

Løbetid: Tiden fra nogen optager et lån, til lånet er betalt tilbage.

Pro anno el. **p.a.**: Pr. år. Fx betyder 5 % p.a., at der skal betales 5 % i rente pr. år.

Årlige omkostninger i procent el. **ÅOP**: De samlede omkostninger på et lån i procent pr. år. ÅOP indeholder alle de gebyrer, renter og andre udgifter, som låneren skal betale i forbindelse med et lån. Man kan bruge ÅOP til at sammenligne prisen på forskellige lån. Man skal være opmærksom på, at forskelle i hovedstol, løbetid og den måde, forskellige lån betales tilbage på, påvirker deres ÅOP.

Eksemplet i regnearket herunder viser udviklingen i et lån, hvor låneren betaler en fast ydelse pr. termin.

B10 | =E9*B3

	A	B	C	D	E
1					
2	Lån:	kr. 5 000,00			
3	Rente i procent	5,47%			
4	Ydelse pr. termin:	kr. 1 000,00			
5					
6	**Antal terminer**	**Rente i kr.**	**Afdrag**	**Ydelse**	**Ny restgæld**
7	0				kr. 5 000,00
8	1	kr. 273,50	kr. 726,50	kr. 1 000,00	kr. 4 273,50
9	2	kr. 233,76	kr. 766,24	kr. 1 000,00	kr. 3 507,26
10	3	kr. 191,85	kr. 808,15	kr. 1 000,00	kr. 2 699,11
11	4	kr. 147,64	kr. 852,36	kr. 1 000,00	kr. 1 846,75
12	5	kr. 101,02	kr. 898,98	kr. 1 000,00	kr. 947,77
13	6	kr. 51,84	kr. 948,16	kr. 1 000,00	-kr. 0,39

Valutakurs: Prisen i danske kroner for 100 enheder af den udenlandske valuta.

Ligninger

Regneregler for ligninger

Man må addere, subtrahere, multiplicere eller dividere (man må dog ikke multiplicere eller dividere med 0) med samme tal på begge sider af lighedstegnet.

Eksempler:

$x - 2 = 3$

$x - 2 + 2 = 3 + 2$

$x = 5$

$x + 3 = 5$

$x + 3 - 3 = 5 - 3$

$x = 2$

$\frac{1}{2}x = 3$

$\frac{1}{2}x \cdot 2 = 3 \cdot 2$

$x = 6$

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$

$x = 3$

Grafisk ligningsløsning

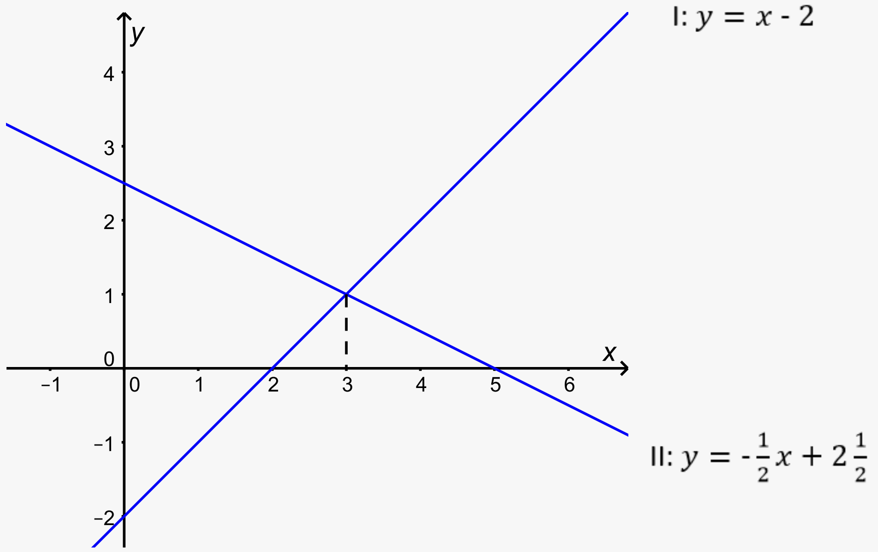
Eksempler:

Ligning: $x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

I: $y = x - 2$

II: $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

Løsning: $x = 3$



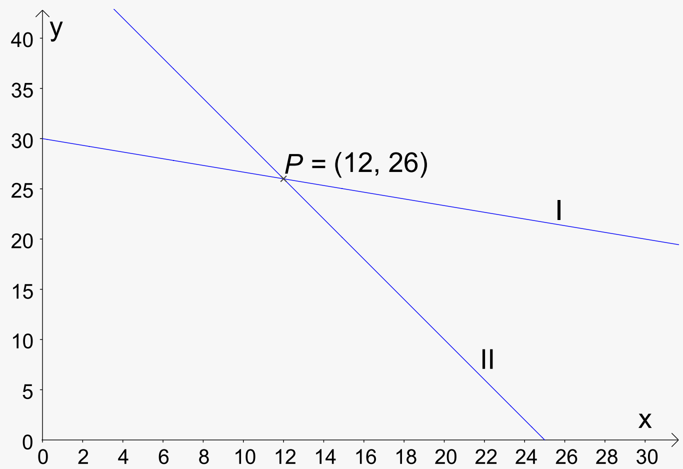
To ligninger med to ubekendte

Eksempel:

En kasket og tre T-shirts koster 90 kr.
To kasketter og en T-shirt koster 50 kr.

Hvis man kalder prisen for en kasket for x og prisen for en T-shirt for y, kan man opstille to ligninger:

I: $x + 3y = 90$
II: $2x + y = 50$



Linjerne for de to ligninger skærer hinanden i punktet (12,26). Prisen for en kasket er derfor 12 kr., og prisen for en T-shirt er 26 kr.

Uligheder

Eksempel:

Skolen har fået to tilbud på, hvad det koster om måneden at leje en kopimaskine:

Tilbud 1: 800,00 kr. pr. måned og 5 øre pr. sort/hvid kopi.
Tilbud 2: 10 øre pr. sort/hvid kopi og ingen månedlig leje.

Hvor mange kopier skal skolen tage, for at tilbud 2 er billigst?

x er antal kopier, $f(x)$ er prisen ved tilbud 1, og $g(x)$ er prisen ved tilbud 2.

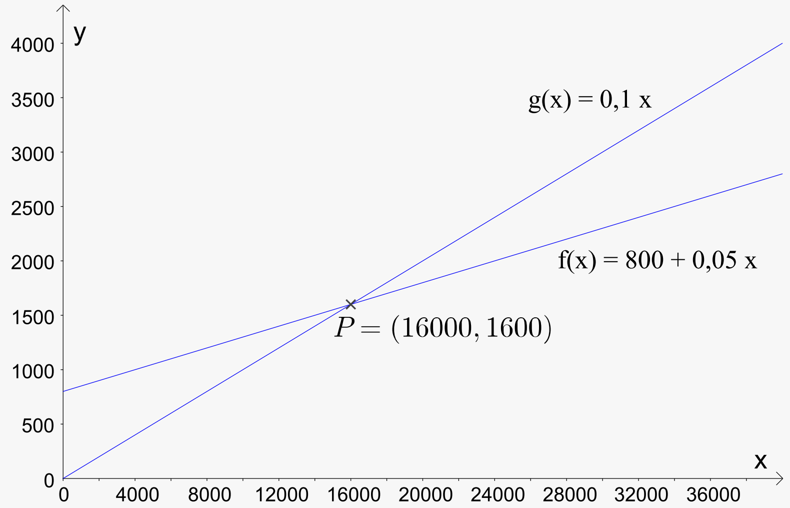
Tilbud 1: $f(x) = 800 + 0{,}05x$
Tilbud 2: $g(x) = 0{,}1x$

Ulighed:

$0{,}1x < 800 + 0{,}05x$

Graferne for $f(x)$ og $g(x)$ skærer hinanden i punktet (16000, 1600). Man kan se, at $g(x) < f(x)$, når $x < 16000$.

Tilbud 2 er billigst, hvis skolen tager under 16000 kopier pr. måned.



Formler og algebraiske udtryk

Omskrivning

$a + (b - c + d) = a + b - c + d$

$a - (b - c + d) = a - b + c - d$

$a \cdot (b - c + d) = a \cdot b - a \cdot c + a \cdot d$

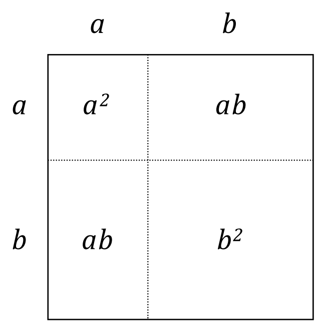
Multiplikation af flerleddede størrelser

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$

Kvadratsætninger

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Funktioner

En funktion er en sammenhæng mellem **variable**, der kan beskrives med tal. Det kan fx være sammenhængen mellem et antal kilogram kartofler og det antal kroner, du skal betale for kartoflerne.

Hvis funktionen er en sammenhæng mellem to variable, kalder man som regel den ene variabel for x og den anden for y. En funktion kan altså fx være en sammenhæng mellem x kg kartofler og y kr. Prisen, y, er afhængig af antal kilogram kartofler, og den kalder man derfor for den **afhængige variabel**. Man kalder x for den **uafhængige variabel**.

I en funktion kan der kun høre én y-værdi til en x-værdi. Sammenhængen mellem x kg kartofler og y kr. er en funktion, fordi der ikke kan høre mere en én pris til fx 2,0 kg kartofler.

Man kan beskrive en funktion med en funktionsforskrift, en graf, en tabel eller med ord.

Der findes forskellige typer af funktioner. Dem omtaler vi i det følgende.

Lineær funktion

Forskrift for en lineær funktion:

$$f(x) = ax + b$$

Tallet a er et udtryk for linjens hældning og kaldes **hældningstallet** eller **hældningskoefficienten**.

Skæringspunkt med y-aksen: $(0,b)$

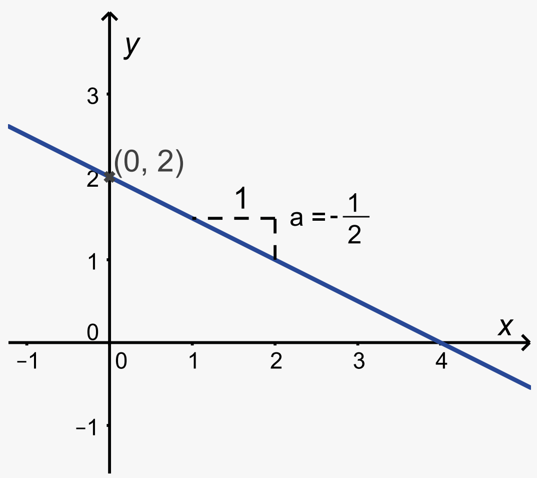
Eksempel:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 1$$

Tabel

x	-2	0	2
y	3	2	1



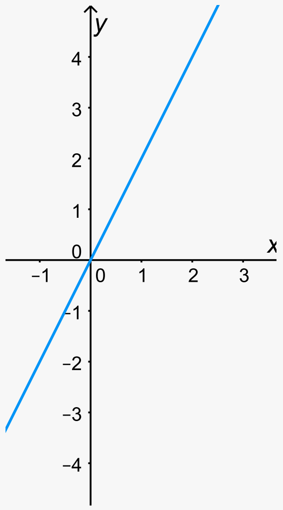
Ligefrem proportionalitet

Forskrift for ligefrem proportionalitet:

$f(x) = ax$

Eksempel:

$f(x) = 2x$



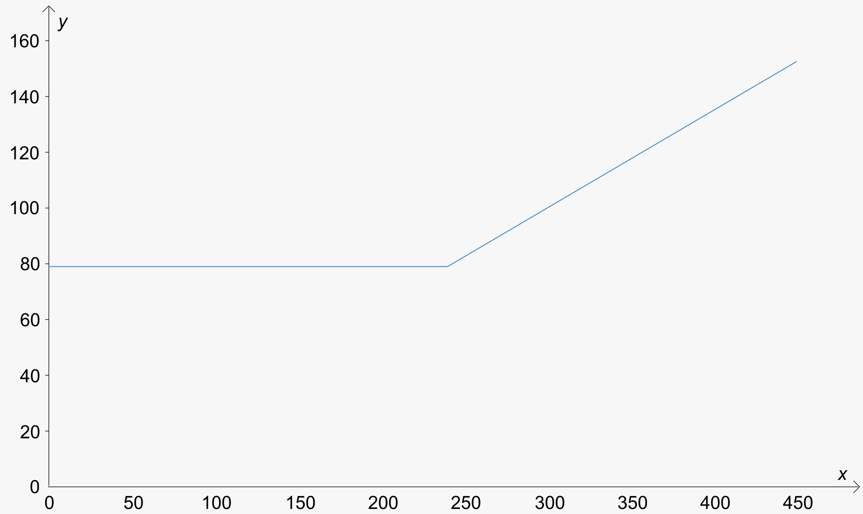
Stykkevis lineær funktion

Eksempel:

Et mobilabonnement til 79 kr. pr. måned giver 4 timers gratis taletid. Ud over 4 timer koster taletiden 35 øre pr. minut.

Graf der viser sammenhængen mellem taletiden og prisen i en måned:

pris i kroner



taletid i minutter

Andengradsfunktion

Forskrift for andengradsfunktion:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

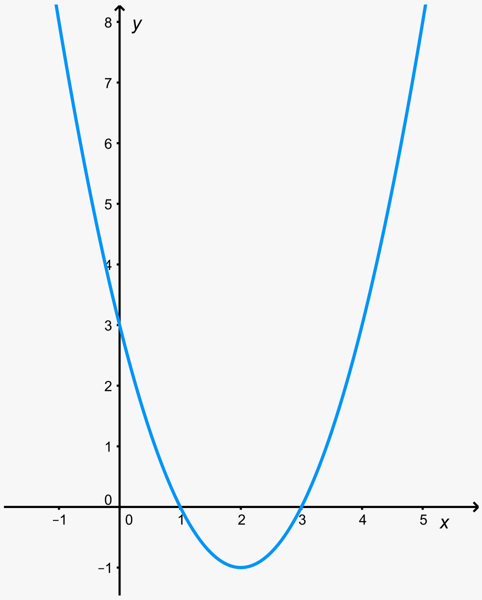
Grafen kalder man en **parabel**.

Funktionen kalder man også et **andengradspolynomium**.

Eksempel:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3	8



Omvendt proportionalitet

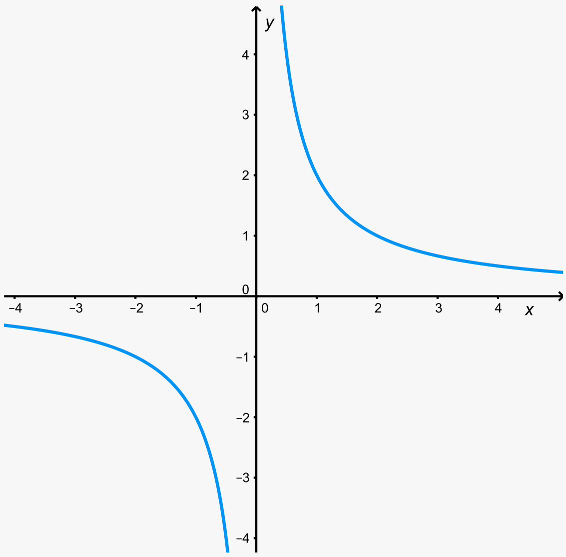
Forskrift for omvendt proportionalitet:

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

Grafen kalder man en **hyperbel.**

Eksempel:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$



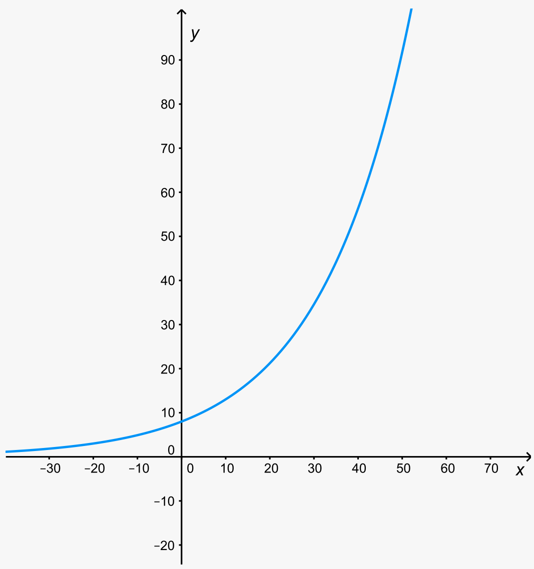
Eksponentiel funktion

Forskrift for en eksponentiel funktion:

$f(x) = b \cdot a^x$, hvor b og a er positive tal.

Eksempel:

$$f(x) = 8 \cdot 1{,}05^x$$



Hvis $b = 1$ kalder man funktionen en eksponentialfunktion.

Intervaller

Man kan angive et **interval** med kantede parenteser eller ulighedstegn.

Eksempler:

Lukket interval

Intervallet fra og med 0 til og med 3 kan skrives $[0\,;3]$ eller $0 \leq x \leq 3$

Åbent interval

Intervallet fra 2 til 5 kan skrives $]2\,;5[$ eller $2 < x < 5$

Halvåbent interval:

Intervallet fra -2 til og med 1 kan skrives $]\text{-}2;1]$ eller $\text{-}\,2 < x \leq 1$

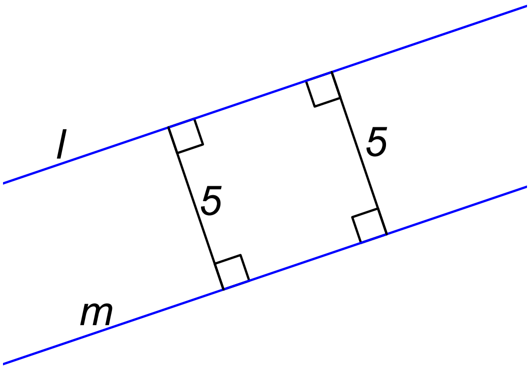
Geometri og måling

Geometriske egenskaber og sammenhænge

Linjer og linjestykker

To linjer, som ikke skærer hinanden, kalder man **parallelle**.

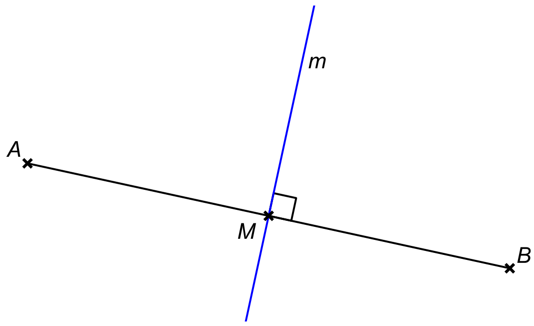
Linjerne *l* og *m* er parallelle.



En linje, som står vinkelret på et linjestykke og skærer det i **midtpunktet**, kalder man **midtnormal** til linjestykket.

Punktet *M* er midtpunkt på linjestykket *AB*.

Linjen *m* er midtnormal til linjestykket *AB*.

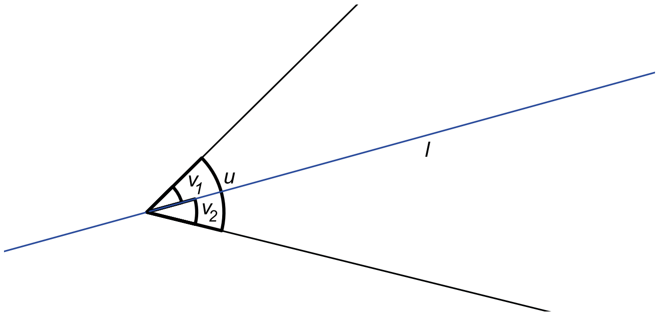


En linje, som deler en vinkel i to lige store vinkler, kalder man en **vinkelhalveringslinje**.

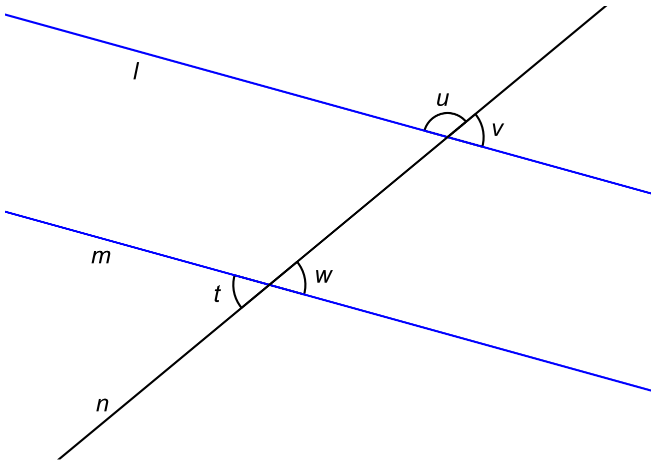
Linjen *l* er vinkelhalveringslinje til vinkel *u*.

$v_1 = v_2 = \frac{1}{2}u$

$v_1 + v_2 = u$



Nabovinkler, topvinkler og ensliggende vinkler ved parallelle linjer



Vinklerne *v* og *u* kalder man **nabovinkler**.
Nabovinkler er tilsammen 180°.

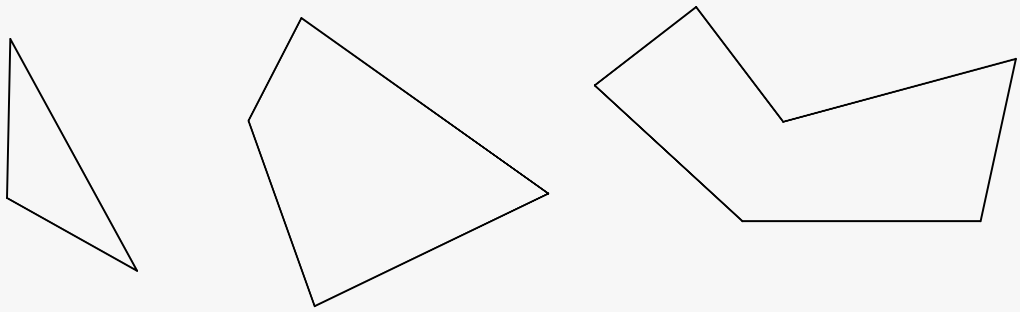
Vinklerne *t* og *w* kalder man **topvinkler**.
Topvinkler er lige store.

Linjerne *l* og *m* er parallelle.
Vinklerne *v* og *w* kalder man **ensliggende vinkler ved parallelle linjer**.
Ensliggende vinkler ved parallelle linjer er lige store.

Polygoner

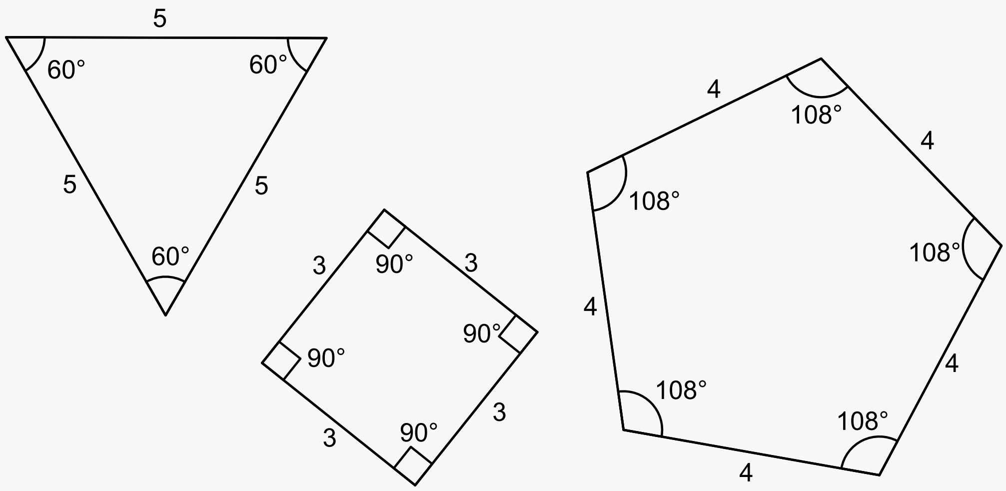
Polygon betyder 'mangekant'. Trekanter, firkanter og sekskanter er eksempler på polygoner.

Eksempler på polygoner:

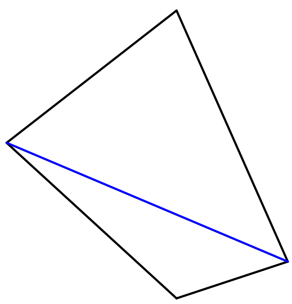


I en **regulær polygon** er alle sider lige lange, og alle vinkler er lige store.

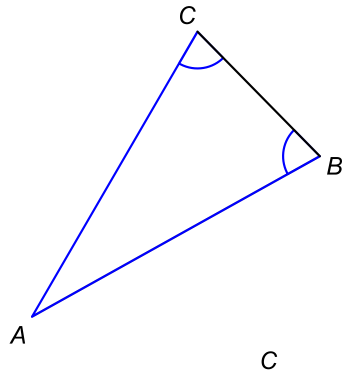
Eksempler på regulære polygoner:



Et linjestykke mellem to **vinkelspidser** i en polygon kalder man en **diagonal**.

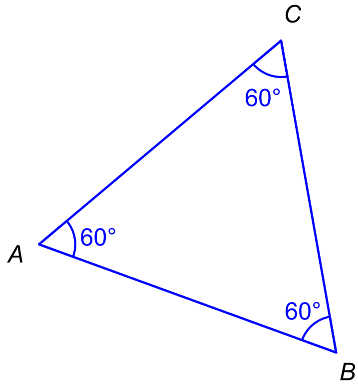


Trekanter



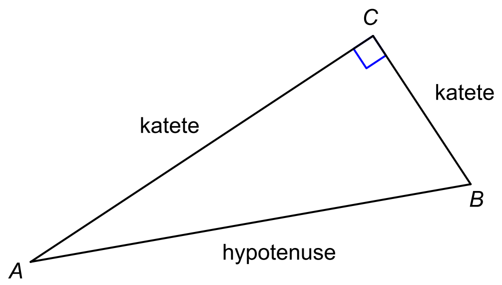
En trekant kalder man **ligebenet**, når to af dens sider er lige lange.

En ligebenet trekant har to lige store vinkler.
En trekant med to lige store vinkler er ligebenet.



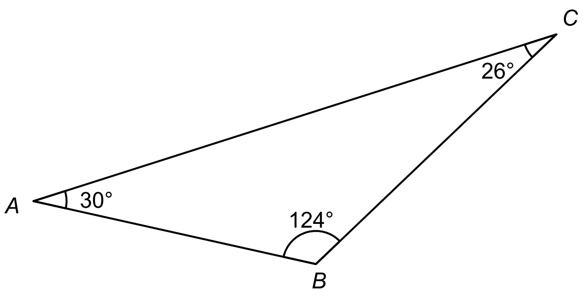
En trekant kalder man **ligesidet**, når dens tre sider er lige lange.

I en ligesidet trekant er hver af de tre vinkler 60°.
Hvis hver af de tre vinkler i en trekant er 60°, er trekanten ligesidet.



En trekant kalder man **retvinklet**, når en af vinklerne er 90°.

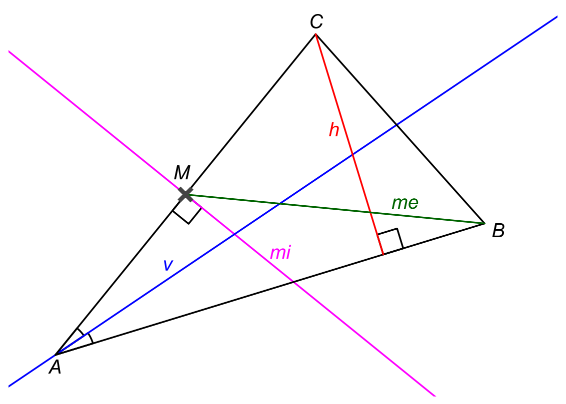
De to sider, der danner den rette vinkel i en retvinklet trekant, kalder man **kateter**.
Den side, der ligger over for den rette vinkel i en retvinklet trekant, kalder man trekantens **hypotenuse**.



Vinkelsummen i en trekant er 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Linjer ved trekanter

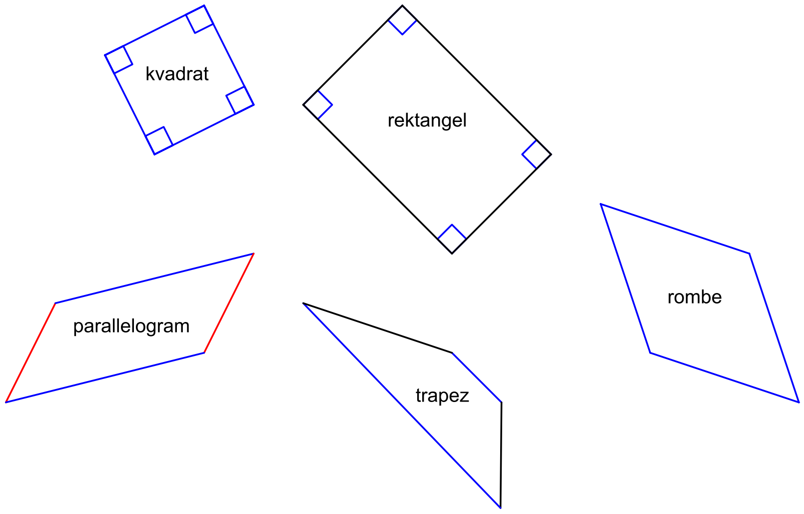


- **højde**, *h*
- **vinkelhalveringslinje**, *v*
- **median**, *me*
- **midtnormal**, *mi*

M er midtpunkt på siden *AC*.

Firkanter

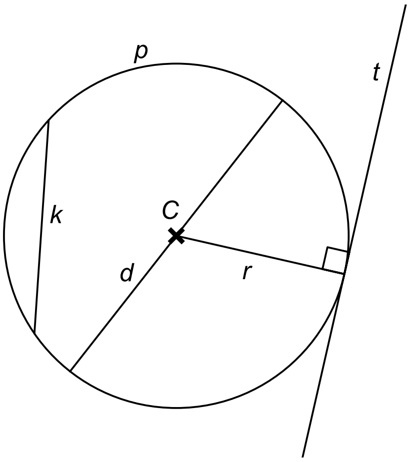
En firkant kalder man et **kvadrat**, når alle sider er lige lange, og alle vinkler er rette.
En firkant kalder man et **rektangel**, når alle vinkler er rette.
En firkant kalder man et **parallelogram**, når modstående sider er parallelle.
En firkant kalder man et **trapez**, når netop to sider er parallelle.
En firkant kalder man en **rombe**, når alle sider er lige lange.



Cirkler

C: **centrum** for cirklen
p: **cirkelperiferien**
d: cirklens **diameter**
r: cirklens **radius**
t: **tangent** til cirklen
k: **korde** til cirklen

En **cirkelbue** er en del af en cirkels periferi.



Ligedannethed

To figurer er **ligedannede**, når den ene figur er en forstørrelse af den anden.

To figurer er **kongruente**, når man kan flytte den ene figur, så den dækker den anden.

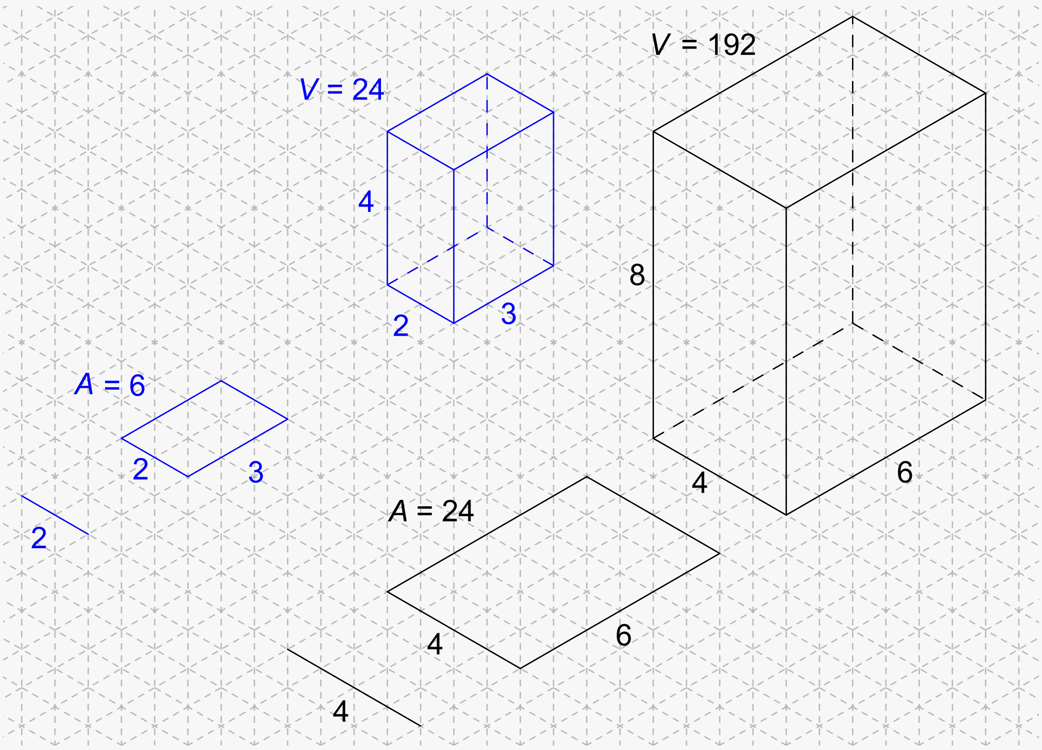
Målforhold

Forholdet mellem (længden af) ensliggende sider i to ligedannede figurer kalder man **længdeforholdet** eller **målestoksforholdet**.

Forholdet mellem arealerne af to ligedannede figurer kalder man **arealforholdet**.

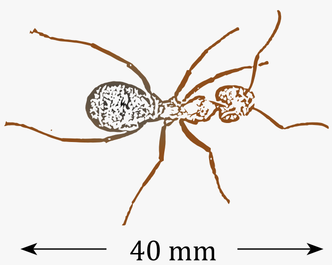
Forholdet mellem rumfanget af to ligedannede figurer kalder man **rumfangsforholdet**.

I eksemplet herunder betyder A areal og V rumfang.



På tegningen herover er længdeforholdet mellem de blå og de sorte figurer 1:2, arealforholdet er 1:4, og rumfangsforholdet er 1:8.

Rød skovmyre



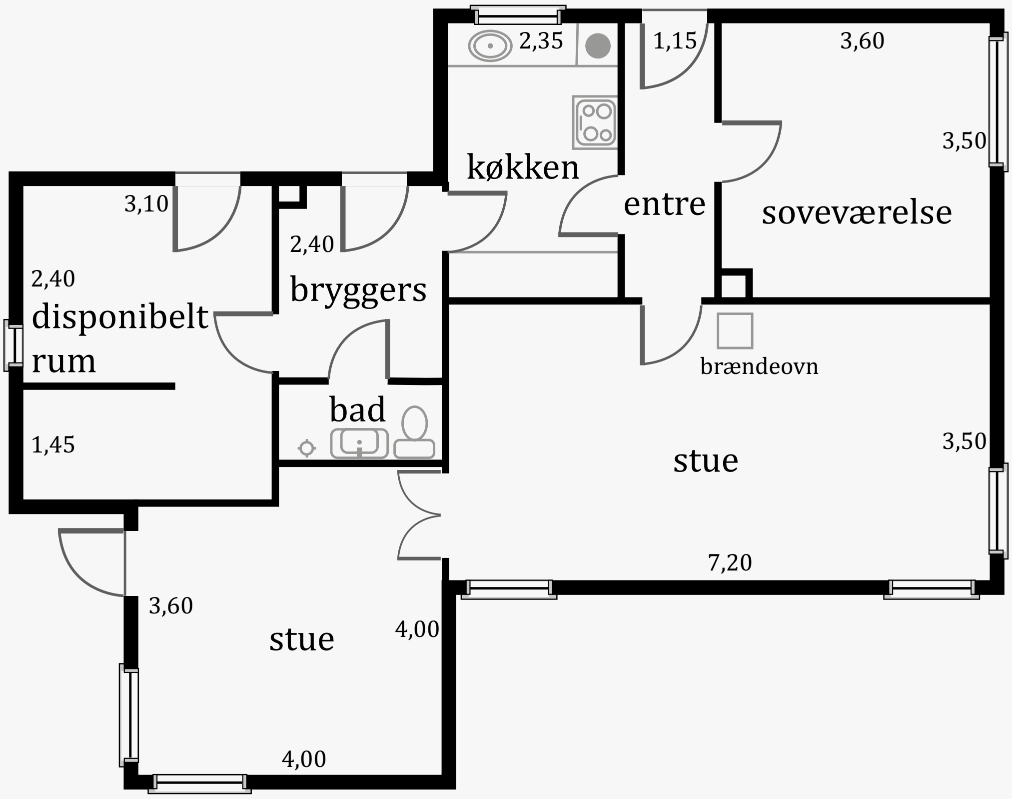
Skovmyren er tegnet i længdeforholdet 4:1.

En rød skovmyre han er cirka 10 millimeter lang.
På tegningen er længden:

$4 \cdot 10 \text{ mm} = 40 \text{ mm}$

Grundplanen af huset nedenfor er tegnet i længdeforholdet 1:100.
Den ene af væggene i stuen er 7,20 meter lang. På tegningen er længden:

$$\frac{7{,}20\text{ m}}{100} = 7{,}2\text{ cm}$$

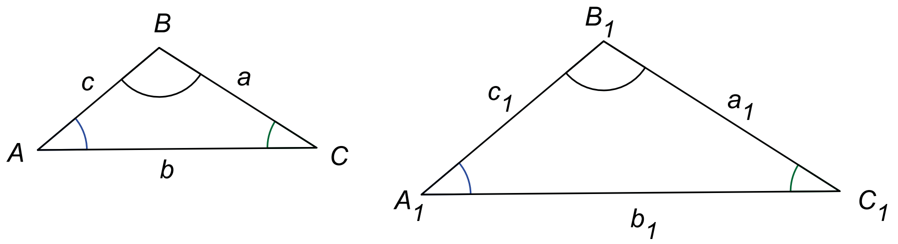


Du skal være opmærksom på, at størrelsen af de to tegninger kan variere, afhængigt af hvilken platform du bruger.

Ensvinklede trekanter

To figurer er **ensvinklede**, hvis deres vinkler er parvis lige store.

ΔABC og $\Delta A_1B_1C_1$ er ensvinklede.



Ensvinklede trekanter er ligedannede.

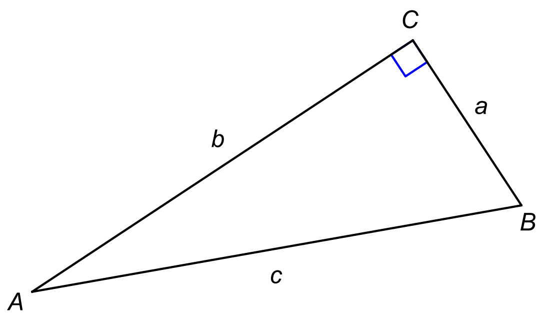
Hvis ΔABC er ensvinklet med $\Delta A_1B_1C_1$ gælder:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

Pythagoras' sætning

I en retvinklet trekant er summen af kateternes kvadrater lig med kvadratet på hypotenusen.

Hvis $\angle C = 90°$, gælder $a^2 + b^2 = c^2$

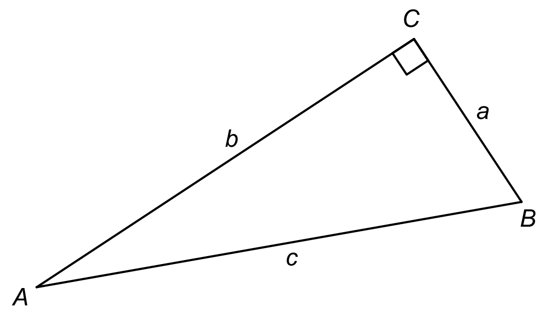


Hvis $a^2 + b^2 = c^2$ i trekant ABC, så er trekanten retvinklet, og $\angle C = 90°$.

Trigonometri

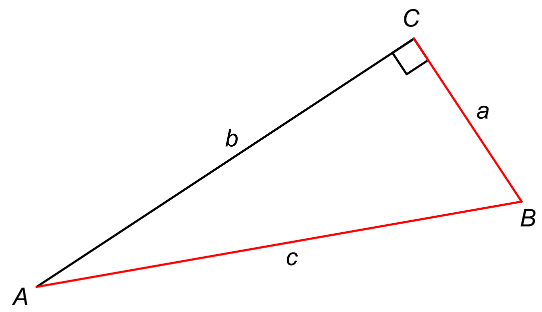
Siden b kalder man den **hosliggende katete** til $\angle A$

Siden a kalder man den **modstående katete** til $\angle A$



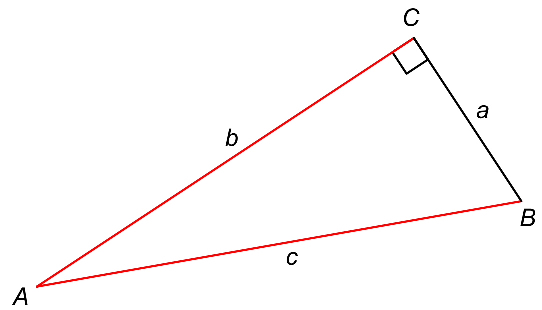
$$\sin A = \frac{den\ modstående\ katete}{hypotenusen}$$

$$\sin A = \frac{a}{c}$$



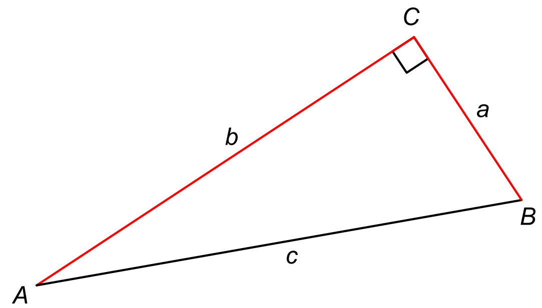
$$\cos A = \frac{hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$



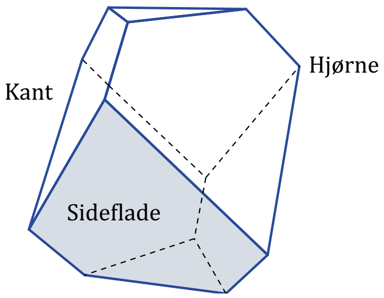
$$\tan A = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$



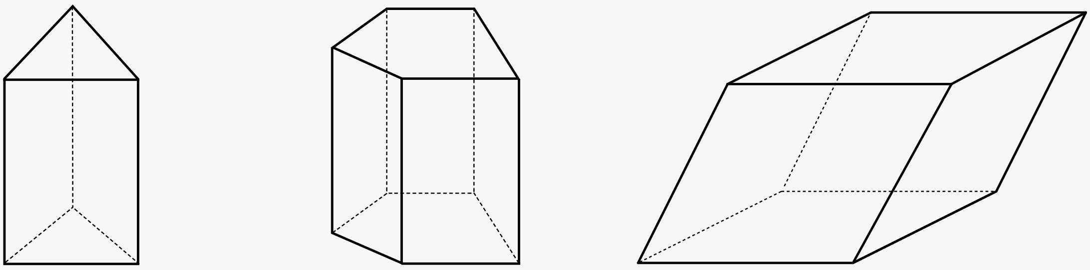
Rumlige figurer

Et **polyeder** er en rumlig figur, der har polygoner som sideflader.

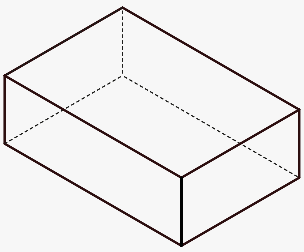


Eksempler på polyedre:

Prisme

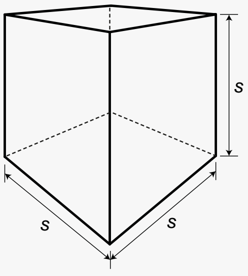


Kasse



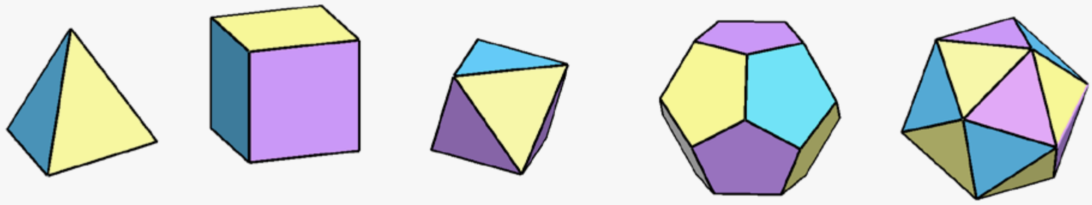
Kube

En kube kalder man også en **terning**.



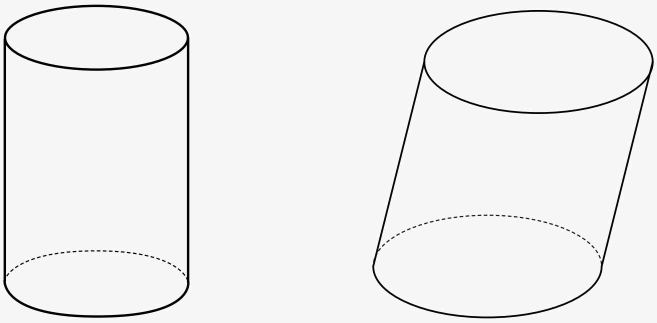
Et polyeder, der har kongruente, regulære polygoner som sideflader, kalder man et **regulært polyeder**.

Eksempler på regulære polyedre:

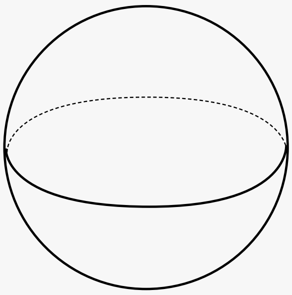


Eksempler på andre rumlige figurer:

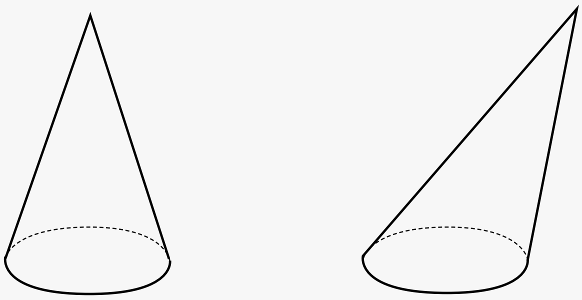
Cylinder



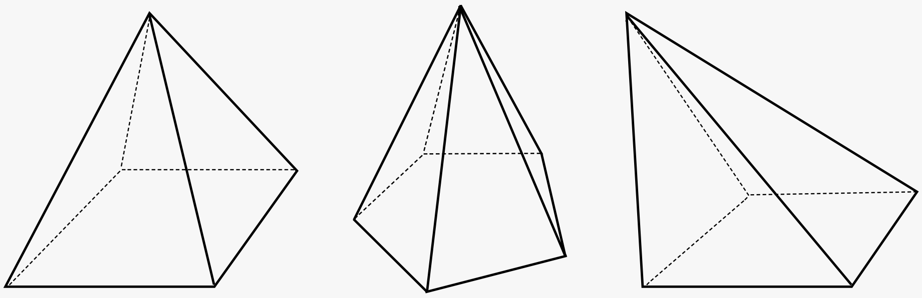
Kugle



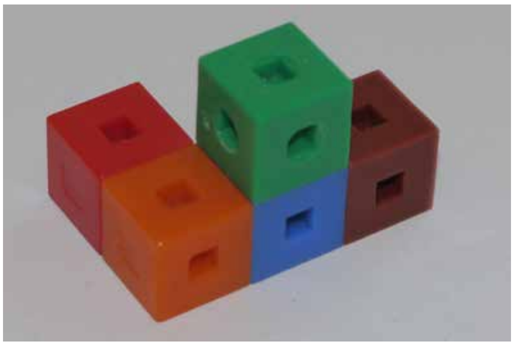
Kegle

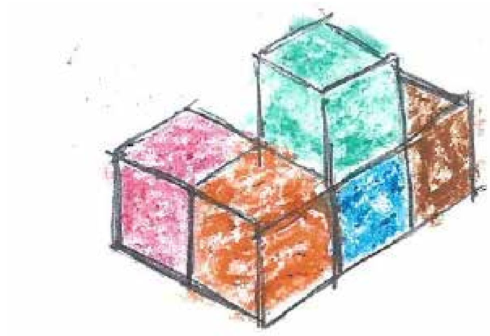


Pyramide

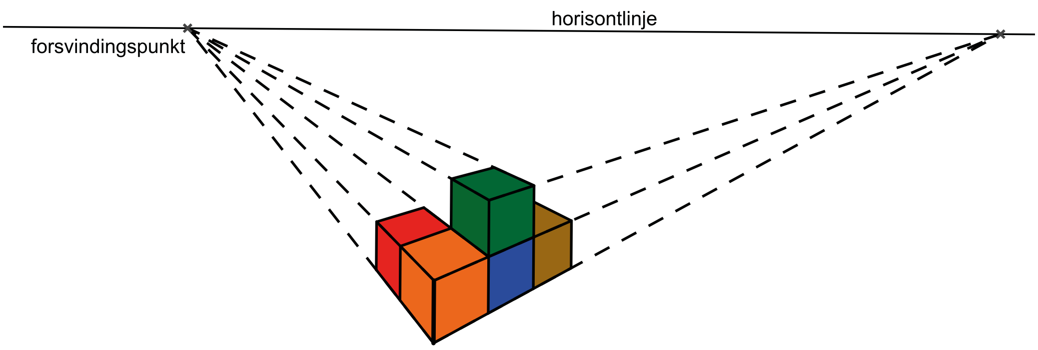


Geometrisk tegning



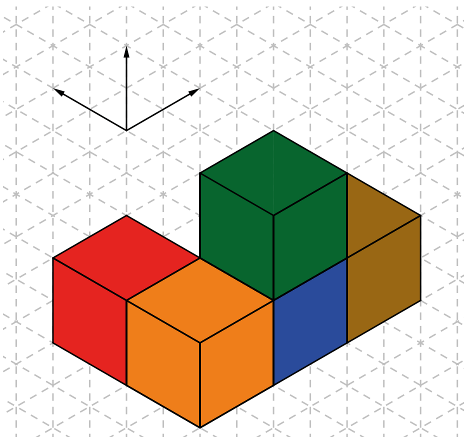


En **skitse** er en tegning, der skal give en idé om, hvordan noget ser ud. En skitse er ikke målfast, men væsentlige mål kan fremgå.

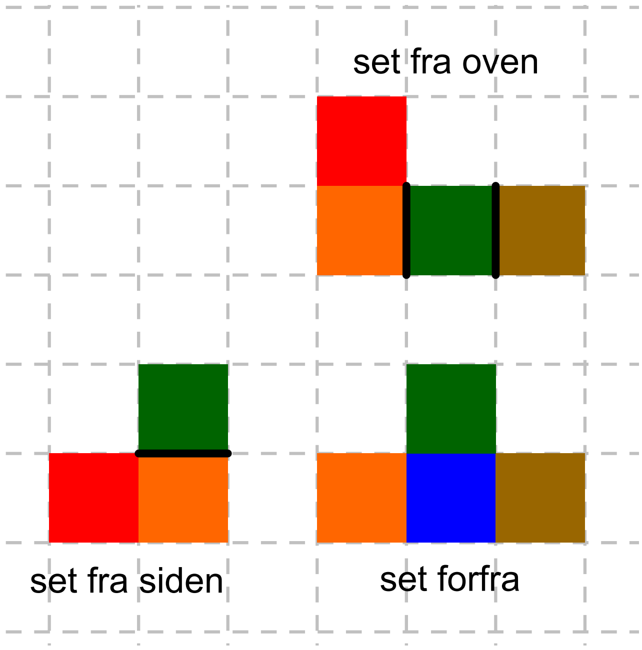


Perspektivtegning er en tegneform, hvor man forsøger at skabe dybde og rumvirkning i billedet. Man forsøger at tegne tingene, „som vi ser dem“ ved at følge nogle bestemte regler.

En **isometrisk tegning** er en tegning, der er målfast i de tre retninger, som et isometrisk papir angiver.



I en (dobbelt retvinklet) **projektionstegning** tegner man tre af et objekts sideflader set vinkelret på fra oven, fra siden og forfra.



Præcis tegning eller konstruktion

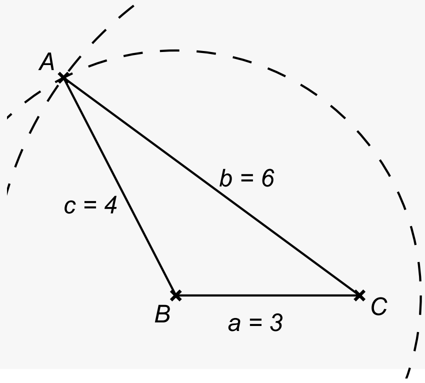
En **præcis tegning** eller en **konstruktion** er en tegning, der opfylder angivne oplysninger.

Man kan fremstille en præcis tegning af netop én trekant, hvis man får oplyst 1), 2) eller 3):

1) Tre sidelængder.

Eksempel:

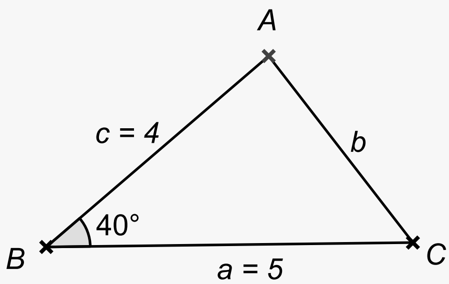
Tegn en trekant ABC, hvor $a = 3$, $b = 6$ og $c = 4$



2) To sidelængder og den mellemliggende vinkel.

Eksempel:

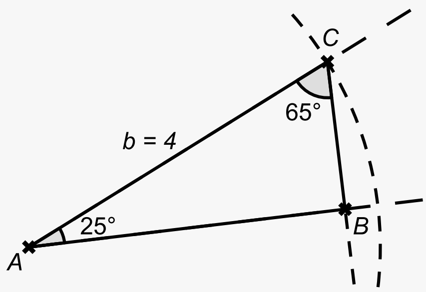
Tegn en trekant ABC, hvor $a = 5$, $c = 4$ og $\angle B = 40°$



3) To vinkler og en side.

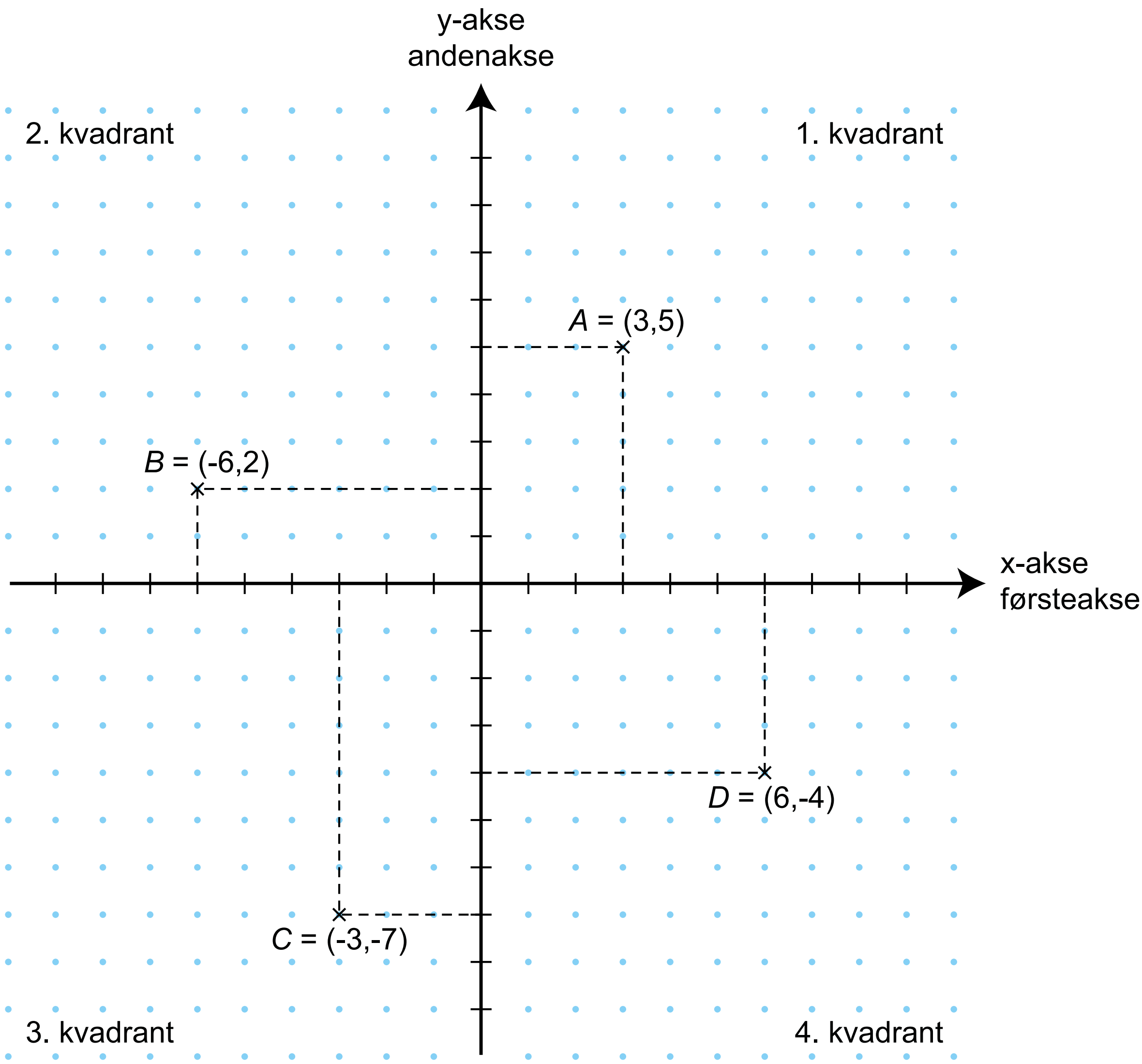
Eksempel:

Tegn en trekant ABC, hvor $\angle A = 25°, \angle C = 65°$ og $b = 4$



Placeringer og flytninger

Koordinatsystem



Ligning for en ret linje

Lodret linje

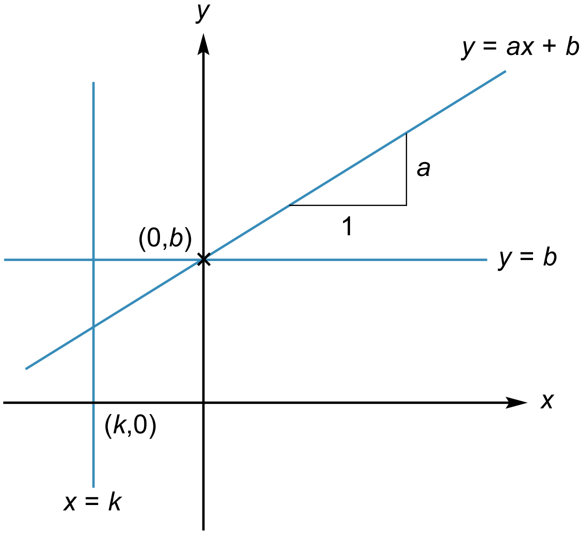
$x = k$

Ikke lodret linje

$y = ax + b$

a kalder man **hældningstal** el. **hældningskoefficient**

b er linjens skæring med ***y*-aksen**



Eksempel:

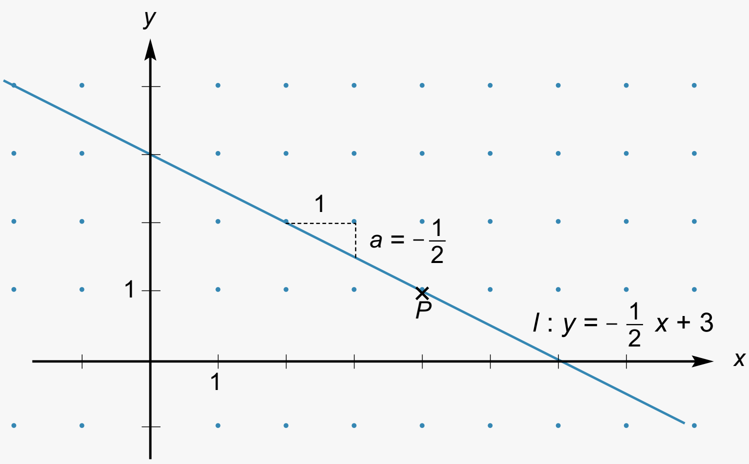
$y = -\frac{1}{2}x + 3$

Hældningstallet er $-\frac{1}{2}$.

Linjen skærer y-aksen i punktet (0,3).

Punktet $P = (4, 1)$ ligger på linjen *l*,

fordi $-\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = -2 + 3 = 1$



Vandret linje

$y = b$

Flytninger

Spejlinger, drejninger og parallelforskydninger kalder man for flytninger.

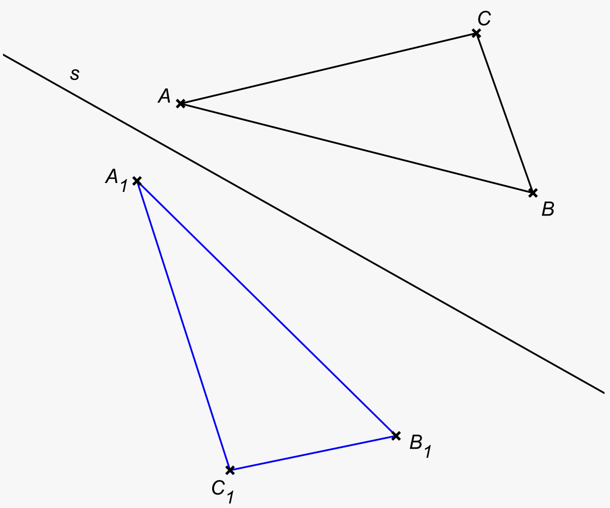
Når man flytter en figur, vil den flyttede figur være kongruent med den oprindelige figur.

Spejling

Eksempel:

ΔABC er flyttet over i $\Delta A_1B_1C_1$ ved en spejling i linjen s.

Linjen s kalder man en **spejlingsakse**.

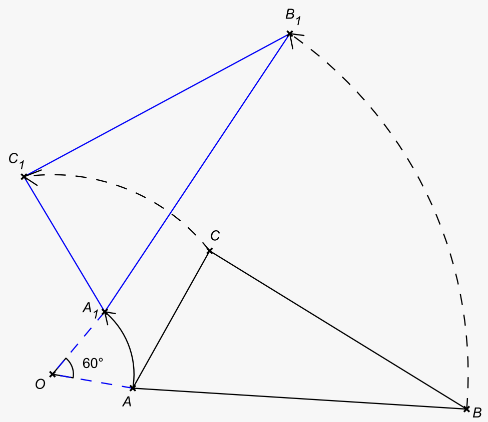


Drejning

Eksempel:

ΔABC er flyttet over i $\Delta A_1B_1C_1$ ved en drejning på 60° mod uret om punktet O.

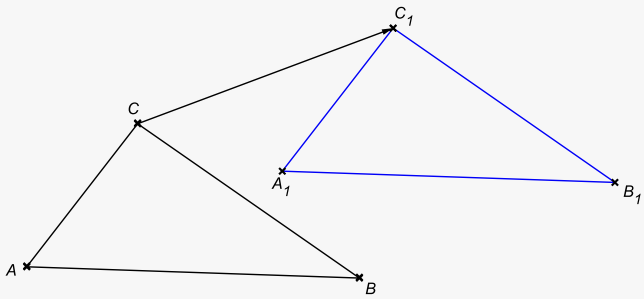
Punktet O kalder man et **omdrejningspunkt**, og vinklen på 60° kalder man en **drejningsvinkel**.



Parallelforskydning

Eksempel:

ΔABC er flyttet over i $\Delta A_1B_1C_1$ ved en parallelforskydning med længden $|CC_1|$ i retningen fra C til C_1.



Symmetri

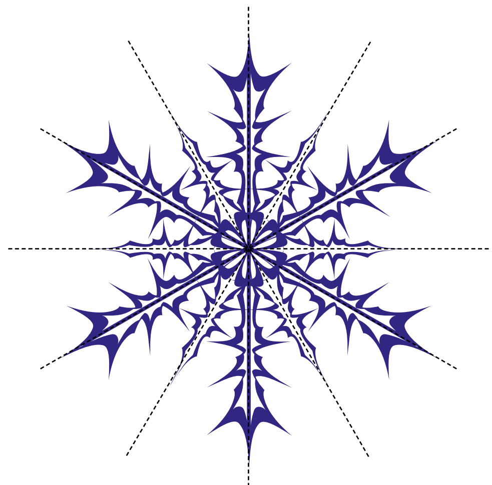
En figur har spejlingssymmetri, når man kan tegne en **symmetriakse**, således at en spejling i denne vil føre figuren over i sig selv.

Bladet har spejlingssymmetri.

En figur har drejningssymmetri, når en drejning på under 360° omkring et omdrejningspunkt kan føre figuren over i sig selv.

Figurer med spejlingssymmetri eller drejningssymmetri kalder man **symmetriske** figurer.

En figur kan have flere symmetriakser.



Iskrystallen har både spejlingssymmetri og drejningssymmetri.

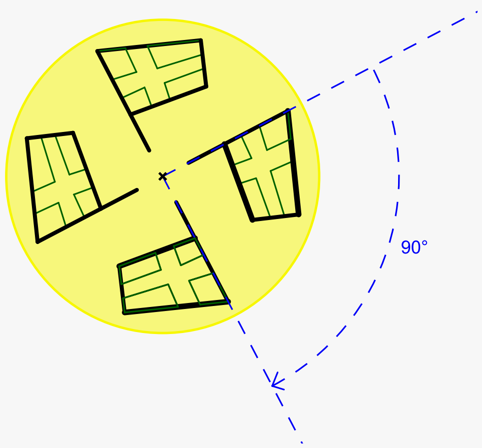
Kategorisering af geometriske mønstre og symmetrier

Rosettemønstre

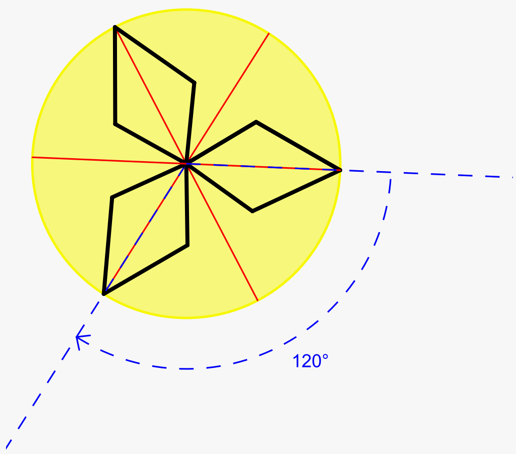
Et rosettemønster er et mønster, som er afgrænset af en cirkel eller en regulær polygon.

Et rosettemønster kan have **drejningssymmetri** og **spejlingssymmetri**.

Eksempler:



Dette rosettemønster har drejningssymmetri men ikke spejlingssymmetri. Cirklens centrum er omdrejningspunkt.
Den mindste drejning, der bringer mønsteret til at dække sig selv, er 90°.
Desuden bringer drejninger på 180°, 270° og 360° mønsteret til at dække sig selv.



Dette rosettemønster har både drejningssymmetri og spejlingssymmetri.

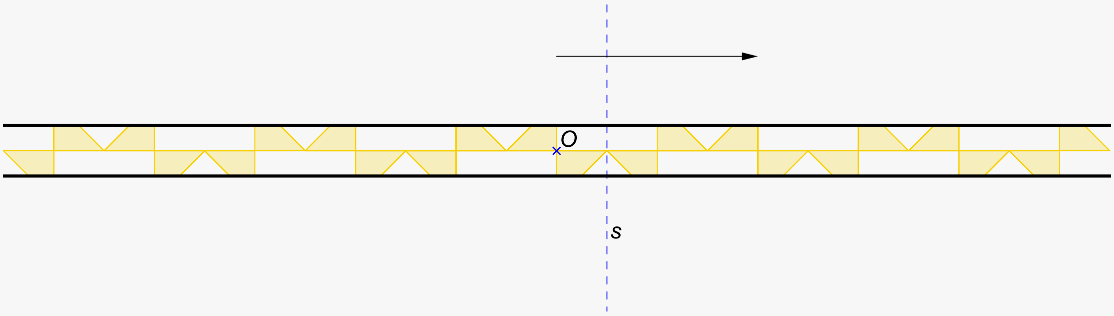
På tegningen er indtegnet den mindste **drejningsvinkel** på 120° og de tre symmetriakser.

Friser

En **frise** består af et **grundmotiv**, der gentages, og som er afgrænset af to parallelle linjer.

En frise kan have drejningssymmetri på 180° og spejlingssymmetri.

Eksempel:



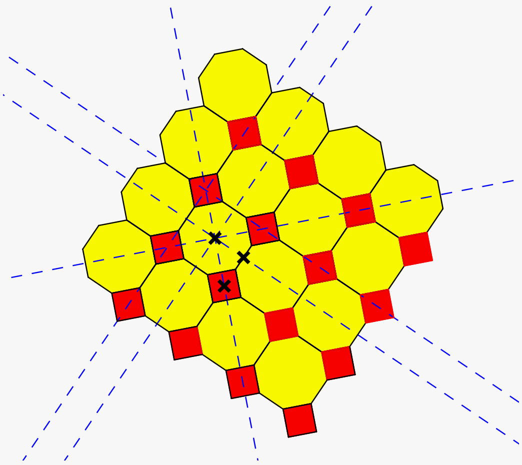
Ovenstående frisemønster har et trapez som grundmotiv. Man kan bringe frisemønsteret til at dække sig selv ved en parallelforskydning, som vist med pilen, eller ved en drejning på 180° om punktet O eller ved en spejling i linjen s.

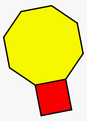
Fladedækkende mønstre

Et **fladedækkende mønster** eller en **tesselation** er opbygget af et **grundmotiv** og flytninger af grundmotivet, så det (i princippet) kan dække planen uden overlap.

Man kan bringe et fladedækkende mønster til at dække sig selv ved parallelforskydning, spejling og/eller drejning.

Eksempel:



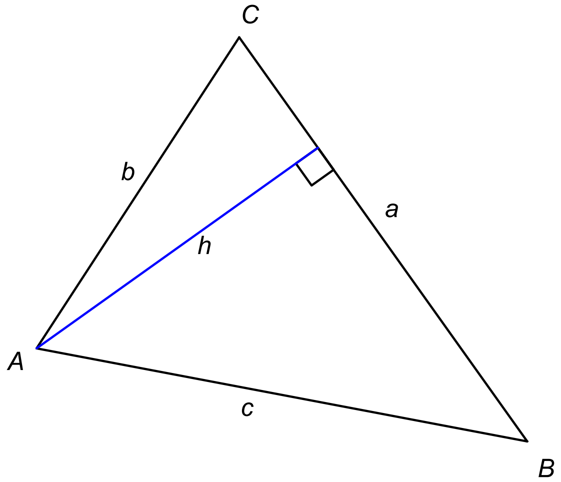


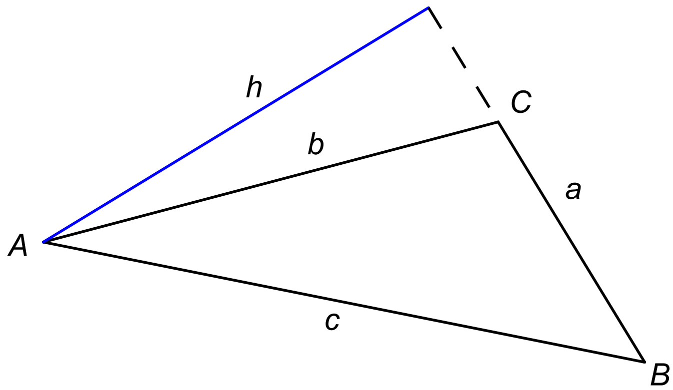
Grundmotiv

På det fladedækkende mønster herover er der indtegnet seks forskellige symmetriakser og tre omdrejningspunkter.

Måling

Areal af trekanter





$Areal = \frac{1}{2} \cdot \; a \cdot h$

$Areal = \frac{1}{2} \cdot \; a \cdot b \cdot \sin C$

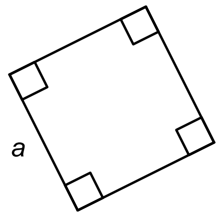
En anden måde at beregne arealet af en trekant er ved hjælp af **Herons formel**:

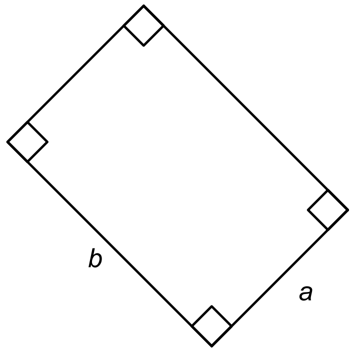
s er den halve omkreds: $s = \frac{a+b+c}{2}$

$Areal = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

Areal og omkreds af firkanter og cirkler

A er areal, og O er omkreds.





Kvadrat

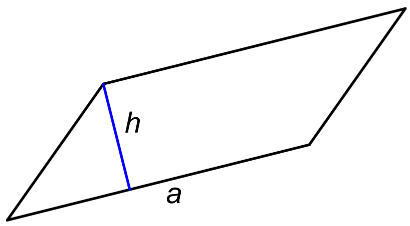
$A = a^2$

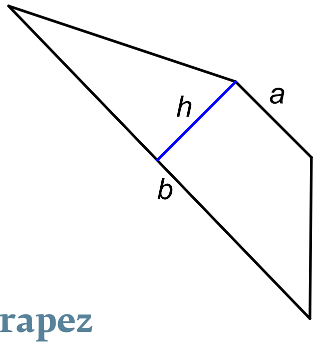
$O = 4 \cdot a$

Rektangel

$A = a \cdot b$

$O = 2 \cdot (a + b)$



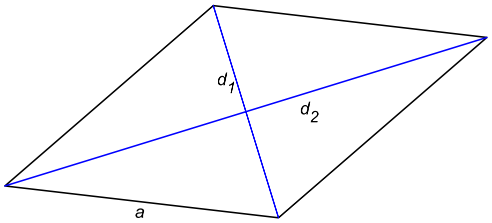


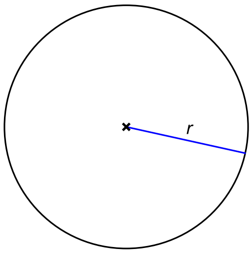
Parallelogram

$A = a \cdot h$

Trapez

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$





Rombe

Sidelængden i romben er a.

Længden af de to diagonaler er d_1 og d_2.

$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

Cirkel

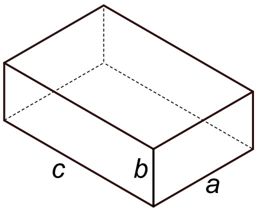
$A = \pi \cdot r^2$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r$

Rumfang og overfladeareal af rumlige figurer

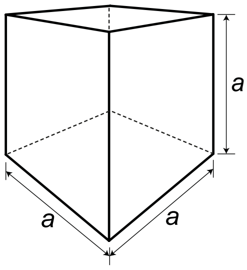
V er **rumfang**, og O er **overfladeareal**.

G er areal af **grundfladen**.



Kasse

$V = a \cdot b \cdot c$

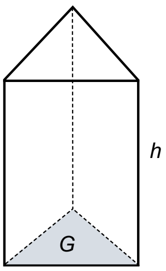


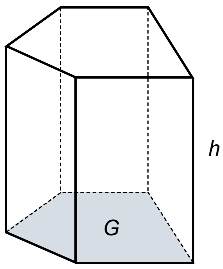
Kube

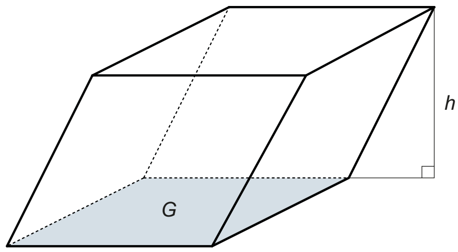
For en kube med sidelængden a gælder:

$V = a^3$

$O = 6 \cdot a^2$

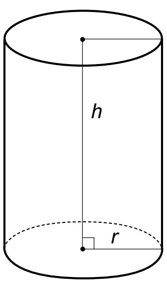


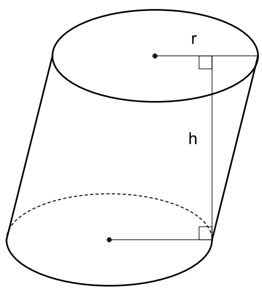




Prisme

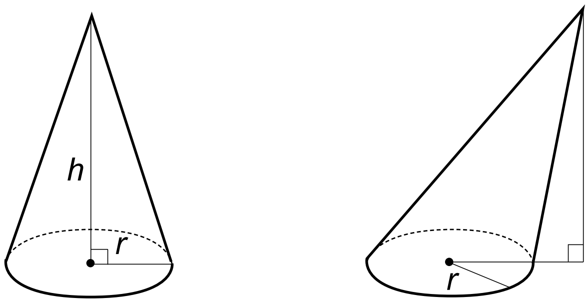
$V = h \cdot G$





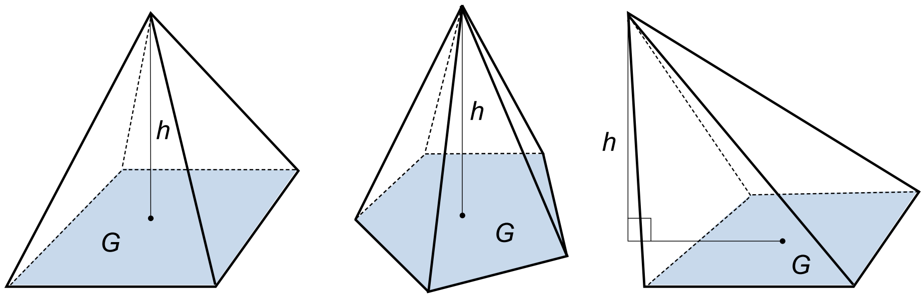
Cylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



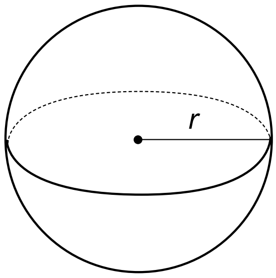
Kegle

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$



Pyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$



Kugle

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Måleenheder

Tabellerne herunder viser enhederne for længde, areal, rumfang og masse. Grundenhederne er henholdsvis meter, kvadratmeter, kubikmeter og kilogram. De enheder, der bruges sjældent, er gråtonet.

Længde

Navn	kilometer	hektometer	dekameter	**meter**	decimeter	centimeter	millimeter
Forkortelse	km	hm	dam	**m**	dm	cm	mm
Antal meter	1000	100	10	**1**	0,1	0,01	0,001

Areal

Forkortelse	km^2	hm^2	dam^2	$\mathbf{m^2}$	dm^2	cm^2	mm^2
Antal kvadratmeter	1 000 000	10 000	100	**1**	0,01	0,0001	0,000 001

Rumfang

Forkortelse	km^3	hm^3	dam^3	$\mathbf{m^3}$	dm^3	cm^3	mm^3
Antal kubikmeter	1 000 000 000	1 000 000	1 000	**1**	0,001	0,000 001	0,000 000 001

1 dm^3 = 1 L

1 L = 10 dL = 100 cL = 1000 mL

Masse

Forkortelse	t	**kg**	hg	dag	g	dg	cg	mg
Antal gram	1 000 000	**1 000**	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Massefylde

$$\text{Massefylde} = \frac{\text{masse}}{\text{rumfang}}$$

Eksempel:

2,4 kg olie har et rumfang på 3 dm^3.

Massefylden er $\frac{2{,}4\ \text{kg}}{3\ \text{dm}^3} = 0{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Fart

$$\text{Fart} = \frac{\text{vejlængde}}{\text{tid}}$$

Eksempel:

100 meter løbes på 10 sekunder.

Løberens gennemsnitsfart er $\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36\ \frac{\text{km}}{\text{t}}$

Statistik og sandsynlighed

Statistik

Når man i en statistisk undersøgelse indsamler oplysninger, kalder man hver af de oplysninger, man indsamler, et **data** eller en **observation**. En samling af data eller observationer kalder man for et **datasæt** eller et **observationssæt**.

Eksempel 1:

Datasættet herunder viser 50 elevers karakterer.

02	4	10	4	7	7	12	7	4	10
7	10	12	10	10	4	7	10	7	10
4	10	10	4	7	02	4	7	10	7
12	10	4	7	12	10	4	7	12	7
4	7	7	7	4	12	10	10	4	10

Eksempel 2:

Datasættet herunder viser alderen på hver af lærerne på en skole i antal år.

45	59	32	38	55	32	42
31	42	43	45	53	49	37
63	44	60	47	44	37	57
40	46	51	37	54	35	53
29	39	54	32	30	33	43
27	41	34	31	29	31	32
35	39	61	40	41	49	47
46	55	37	47	42	49	58
48	56	38	56	30	50	
51	25	41	52	50	59	

Eksempel 3:

Datasættet herunder viser data fra en trivselsundersøgelse blandt 116 elever på en skole.

I skolen trives jeg:	Antal elever
altid	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||
for det meste	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||
nogle gange	𝍸 𝍸 |||
sjældent	𝍸 |||
aldrig	||

Beskrivelse af datasæt med tabeller

Eksempel 1:

En skole har indsamlet data om 50 elevers karakterer. Tabellen herunder beskriver deres datasæt.

Data	-3	00	02	4	7	10	12
Hyppighed	0	0	2	12	15	15	6
Summeret hyppighed	0	0	2	14	29	44	50
Frekvens	0,00	0,00	0,04	0,24	0,30	0,30	0,12
Summeret frekvens	0,00	0,00	0,04	0,28	0,58	0,88	1,00

Eksempel 2:

Nogle elever har indsamlet data om alderen på hver af skolens 68 lærere. De har **grupperet** deres data i **intervaller**. Tabellen herunder beskriver deres datasæt.

Interval	]20;30]	]30;40]	]40;50]	]50;60]	]60;70]	I alt
Hyppighed	6	21	23	16	2	68
Summeret hyppighed	6	27	50	66	68	
Frekvens	0,09	0,31	0,34	0,24	0,03	1,00
Summeret frekvens	0,09	0,40	0,74	0,97	1,00	

Beskrivelse af datasæt med deskriptorer

Deskriptorer er talværdier, som kan beskrive et datasæt. Man kan fx beskrive datasættene fra tabellerne på forrige side med følgende deskriptorer:

Eksempel 1:

Datasættets størrelse 50

Typetal {7,10}

Middeltal $\frac{2\cdot 2+12\cdot 4+15\cdot 7+15\cdot 10+6\cdot 12}{50}=7{,}58$

Median 7

Størsteværdi 12

Mindsteværdi 2

Variationsbredde 10

Kvartilsæt (4, 7, 10)

Eksempel 2:

Datasættets størrelse: 68

Typeinterval:]40;50]

Middeltal: $25\cdot 0{,}09+35\cdot 0{,}31+45\cdot 0{,}34+55\cdot 0{,}24+65\cdot 0{,}03\approx 44$

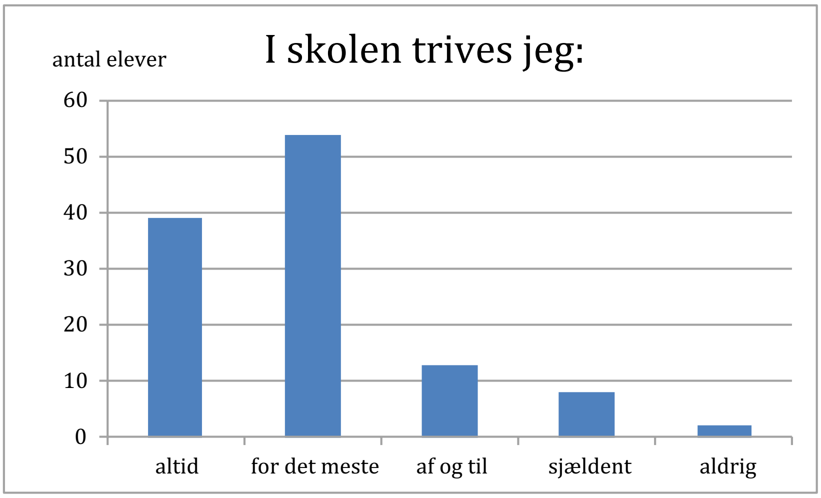
Kvartilsæt (se sumkurve): (35, 43, 51)

Der findes forskellige definitioner af medianen i datasæt med et lige antal data. I de mest benyttede definitioner er medianen den mindste eller gennemsnittet af de to midterste værdier i et **ordnet datasæt**, dvs. i et datasæt hvor data står i rækkefølge efter værdi.

Beskrivelser af datasæt med diagrammer

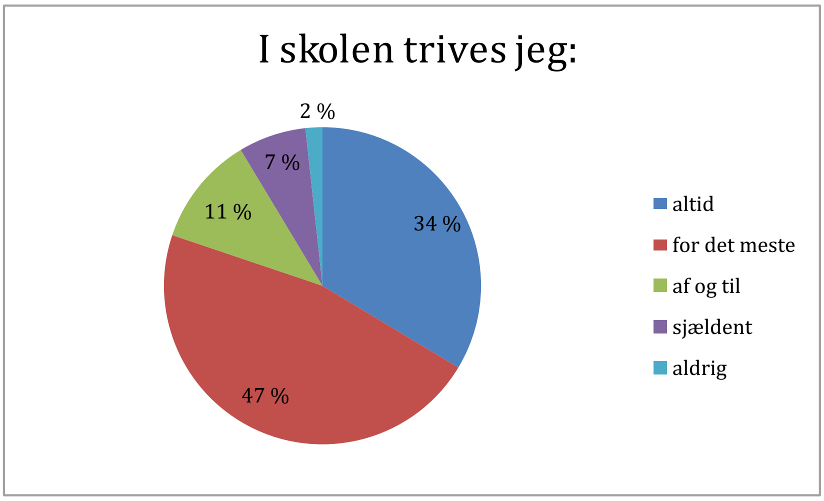
Et **pindediagram**, et **stolpediagram** eller et **søjlediagram** kan beskrive **fordelinger** af data i et datasæt.

Stolpediagrammet herunder beskriver fordelingen af svarene fra en spørgeskemaundersøgelse blandt 116 elever på en skole.

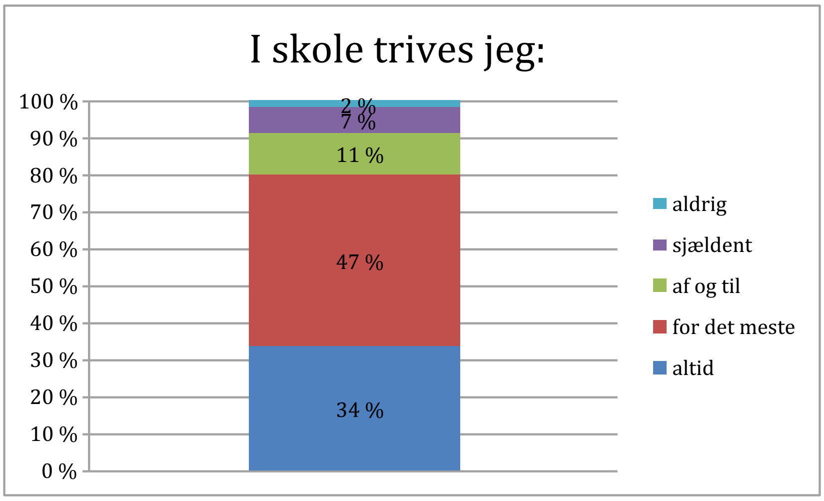


Et **cirkeldiagram** og et **stabeldiagram** kan illustrere fordelinger af data i et datasæt.

Eksemplet herunder viser et cirkeldiagram. Cirkeldiagrammet illustrerer den procentvise fordeling af svarene fra en spørgeskemaundersøgelse blandt 116 elever på en skole.

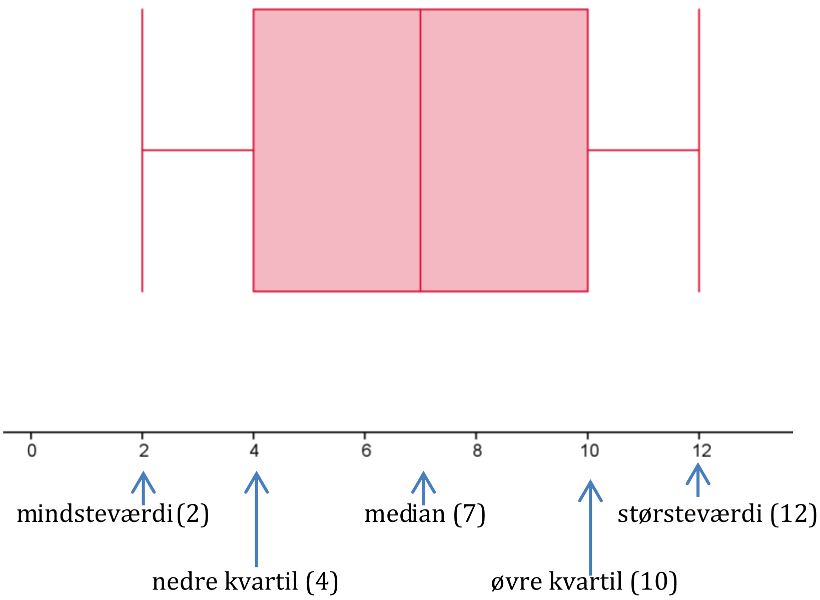


Eksemplet herunder viser et stabeldiagram. Stabeldiagrammet beskriver (som cirkeldiagrammet) den procentvise fordeling af svarene fra en spørgeskemaundersøgelse blandt 116 elever på en skole.



Et **boksplot** beskriver et datasæts mindsteværdi, kvartilsæt og størsteværdi.

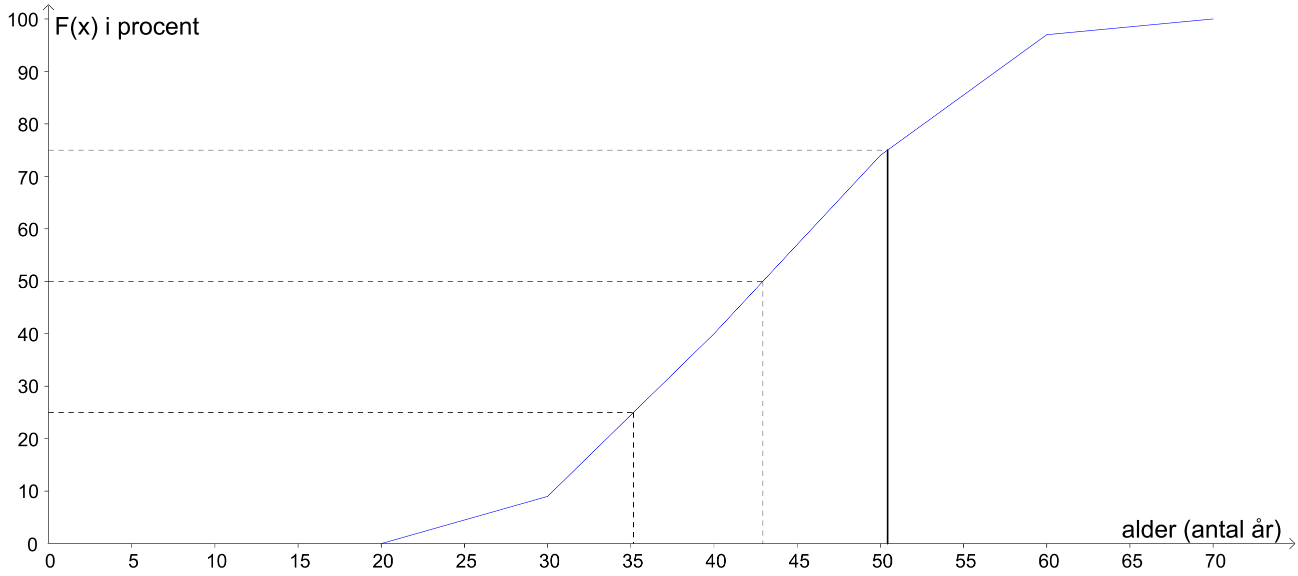
Boksplottet herunder beskriver mindsteværdi, kvartilsæt og størsteværdi i et datasæt med 50 elevers karakterer.



En **sumkurve** beskriver den summerede frekvens for et datasæt, der er grupperet.

Sumkurven herunder viser den summerede frekvens for aldrene på en skoles 68 lærere.

Sumkurven er tilføjet stiplede opmærkninger, der kan bruges til at aflæse tilnærmede værdier for det grupperede datasæts kvartilsæt: (35, 43, 51).



Sammenligning af datasæt

Eksempel:

9.A med 15 elever og 9.B med 21 elever vil sammenligne deres resultater i højdespring.

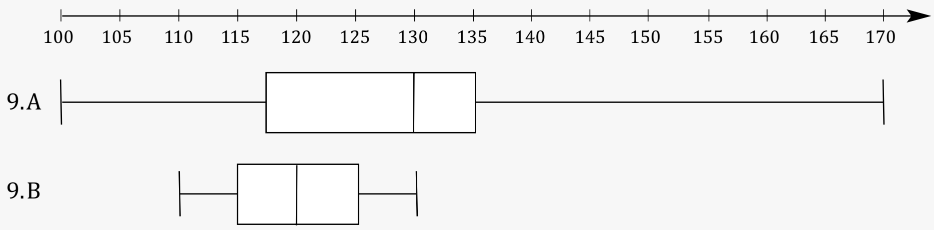
Ordnede resultater i 9.A (angivet i cm):
100, 100, 105, 115, 120, 125, 130, 130, 130, 135, 135, 135, 135, 155, 170

Mindsteværdi:	100
Størsteværdi:	170
Variationsbredde:	70
Kvartilsæt:	(117, 130, 135)

Ordnede resultater i 9.B (angivet i cm):
110, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 115, 120, 120, 120, 120, 120, 120, 125, 125, 125, 125, 125, 125, 130

Mindsteværdi:	110
Størsteværdi:	130
Variationsbredde:	20
Kvartilsæt:	(115, 120, 125)

Det er muligt at sammenligne de to observationssæt ved at tegne disse diagrammer:



Boksplot for de to klassers resultater i højdespring

Af de to diagrammer kan man bl.a. se, at halvdelen af eleverne i 9.A har sprunget 130 cm eller mere i højdespring. Det tilsvarende tal i 9.B er 120 cm. Både det største og det mindste resultat findes i 9.A. Der er således større variationsbredde i resultaterne fra 9.A end i resultaterne fra 9.B.

Man kan også se, at afstanden mellem første og tredje kvartil er mindst i 9.B. Det kunne tyde på, at eleverne i 9.B er mere ensartede end eleverne i 9.A med hensyn til højdespring.

Da medianen i 9.A (130 cm) er lig med størsteværdien i 9.B, kan man se, at halvdelen af eleverne i 9.A kan springe højere end eller lige så højt som alle elever i 9.B. Statistikken kan ikke forklare, hvorfor det er tilfældet.

Analyse af datasæt

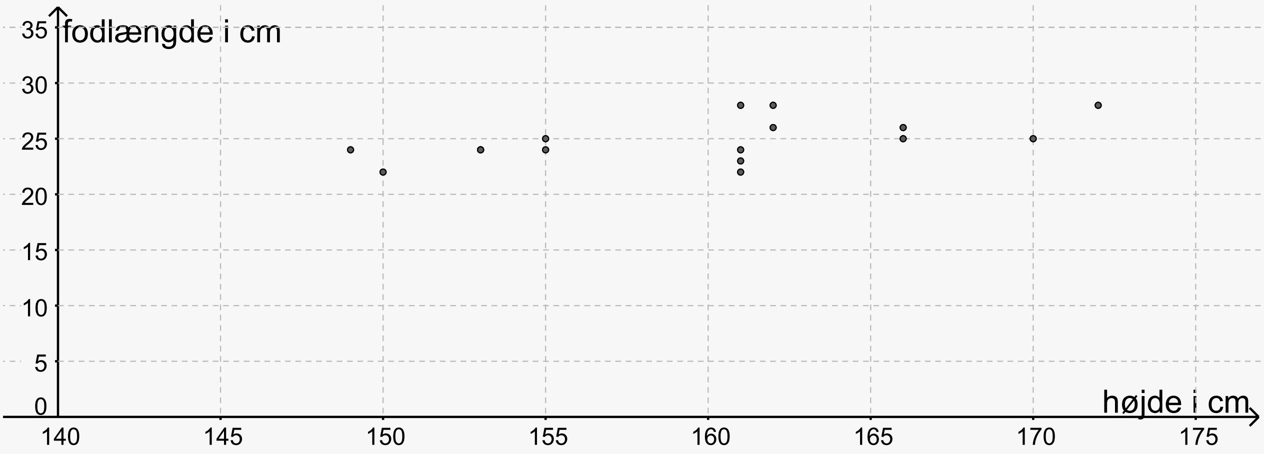
Et **punktdiagram** (eller **sammenknytningsdiagram**) kan bruges til at undersøge en mulig sammenhæng mellem **variable**.

Eksempel:

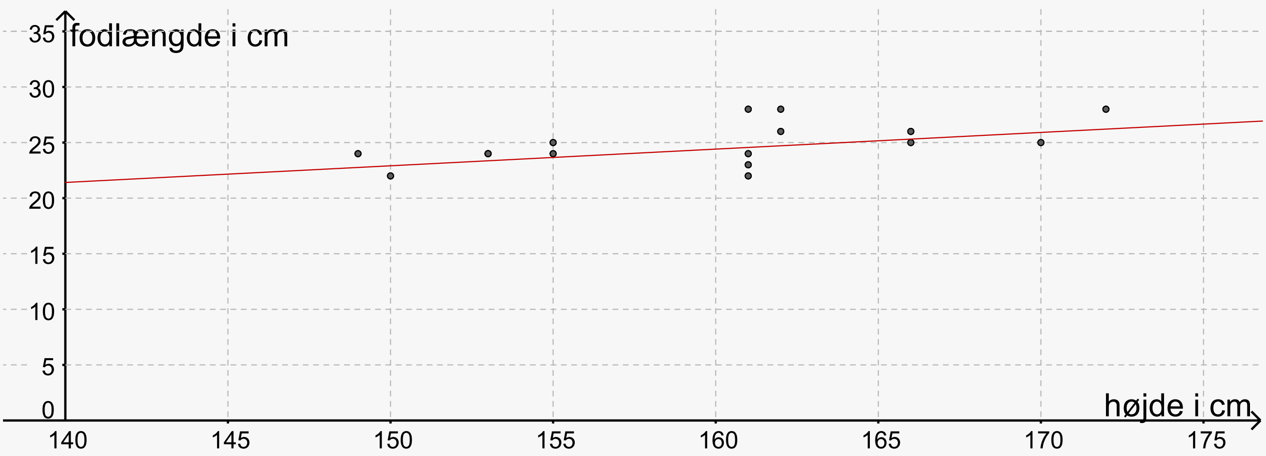
16 elever vil undersøge, om der er sammenhæng mellem deres højde og fodlængde. De har skrevet deres mål i tabellen herunder, så hver elevs højde står lige over fodlængden.

Højde i cm	172	161	153	162	161	166	149	153	162	170	150	161	166	155	155	161
Fodlængde i cm	28	28	24	28	23	26	24	24	26	25	22	24	25	24	25	22

Punktdiagrammet herunder viser elevernes data.



Eleverne har brugt et digitalt værktøj til at tegne den rette linje, som passer bedst med punkterne i punktdiagrammet:



Ved at se, hvor tæt punkterne ligger på den rette linje, kan eleverne vurdere, om der tilnærmelsesvist er en **lineær sammenhæng** mellem elevernes højder og fodlængder. Den linje, som bedst beskriver en lineær sammenhæng i datamaterialet, har i dette tilfælde forskriften $f(x) = 0{,}15x + 0{,}41$.

Sandsynlighed

Man angiver sandsynligheder med tal mellem 0 og 1, hvor 0 udtrykker sandsynligheden for den **umulige hændelse**, og 1 udtrykker sandsynligheden for den **sikre hændelse**. Man kan angive sandsynligheder med decimaltal, brøk eller procent.

I et **eksperiment** kan der være forskellige **udfald**. Eksperimentet 'kast med en terning' kan fx resultere i udfaldene: 1, 2, 3, 4, 5 og 6 (prikker). Man kalder mængden af mulige udfald i et eksperiment for eksperimentets **udfaldsrum**.

En **hændelse** er en delmængde af et udfaldsrum.

Eksempel:

I eksperimentet 'kast med en terning' er udfaldsrummet $U = \{1, 2,3,4,5,6\}$, og hændelsen 'at få et antal prikker, der er mindre end 3', er delmængden $H = \{1,2\}$.

Sandsynligheden for hændelser kan bestemmes ved hjælp af datasæt. Denne form for sandsynlighed kaldes for **statistisk sandsynlighed**. Statistisk sandsynlighed baserer sig på hyppigheden af de udfald, der er knyttet til den hændelse, man er interesseret i.

Eksempel:

Datasættet herunder viser, hvilke årstal i perioden 1900-2014 det har været hvid jul i Danmark, dvs. at mere end 90 % af landet er dækket af mere end 0,5 cm sne om eftermiddagen d. 24.12.

1915, 1923, 1938, 1956, 1969, 1981, 1995, 2009 og 2010.

Der har været hvid jul i 9 tilfælde ud af 115. Ud fra de foreliggende data er den statistiske sandsynlighed for hvid jul i Danmark derfor $\frac{9}{115}$.

(Kilde: www.dmi.dk)

Man kan i nogle situationer bestemme en sandsynlighed for en hændelse ved hjælp af teoretiske overvejelser. Denne form for sandsynlighed kalder man **teoretisk sandsynlighed**. I teoretisk sandsynlighed kan man benytte formlen herunder i situationer, hvor man kan opstille et udfaldsrum med udfald, som er lige sandsynlige.

I et eksperiment, hvor alle udfald er lige sandsynlige, gælder:

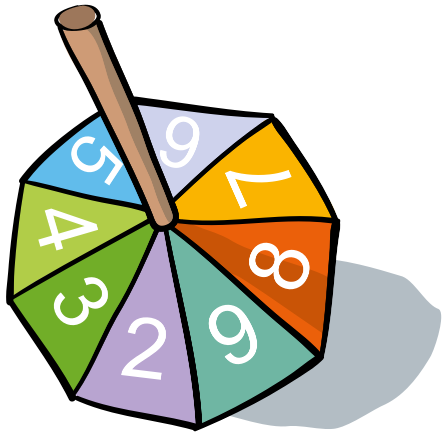
$$P(H) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$$

P står for 'sandsynlighed', og *H* står for 'hændelse'.

P(H) betyder 'sandsynligheden for hændelsen *H*'.

'antal gunstige udfald' er antallet af udfald, som er knyttet til hændelsen.

'antal mulige udfald' er antallet af udfald i eksperimentets udfaldsrum.



Eksempel:

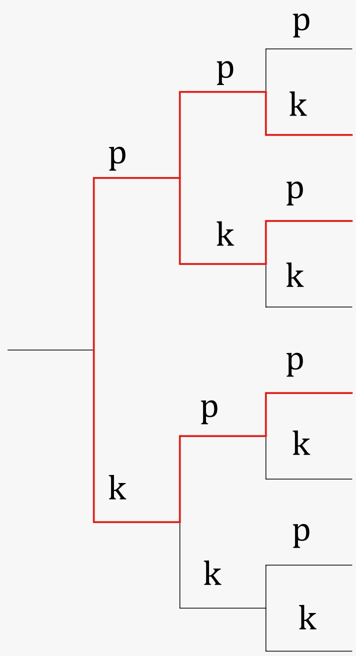
I nogle eksperimenter kan det være svært at finde frem til antallet af gunstige eller mulige udfald. I den forbindelse kan man anvende et **tælletræ**.

Eksempel:

I et møntkast er der lige så stor sandsynlighed for at få 'plat', som er der for at få 'krone'.

Hvor stor er sandsynligheden for at få netop to plat i kast med tre mønter?

Tælletræet til højre viser 8 mulige udfald og 3 gunstige udfald (p = plat og k = krone). Sandsynligheden for at få netop to plat i kast med tre mønter er derfor $\frac{3}{8}$.



Eksempler på beregninger af sandsynligheder:

Additionsprincippet (enten ... eller)

Du slår en gang med en almindelig terning. Hvor stor er sandsynligheden for at slå enten en 5'er eller en 6'er?

Svar: $P(5\ eller\ 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Multiplikationsprincippet (både ... og)

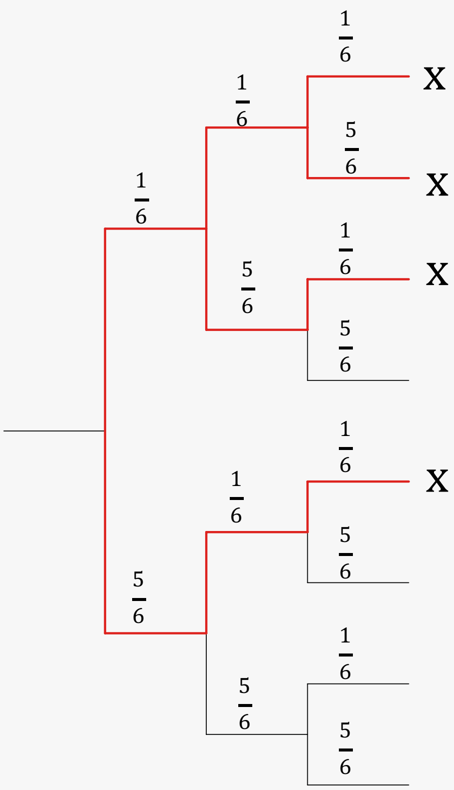
Du slår to gange med en almindelig terning. Hvor stor er sandsynligheden for at slå en 6'er i både første og andet slag?

Svar: $P(6\ og\ 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Man kan bruge et **chancetræ** i forbindelse med beregninger af sandsynligheder.

Eksempel:

Du slår tre gange med en almindelig terning. Hvor stor er sandsynligheden for at slå mindst to 6'ere?



$$P(mindst\ to\ 6'ere\ på\ tre\ slag) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{27}$$

Stikordsregister

R

S

T

U

V

Y

Ø

Å