BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Evaluering af de skriftlige prøver i matematik, stx og hf sommeren 2023

Evaluering af de skriftlige prøver i matematik, stx og hf sommeren 2023
[Forside undertitel]

2024
ISBN nr. [xxx xxx xxx] (web udgave)

Design: Center for Kommunikation og Presse
Denne publikation kan ikke bestilles.
Der henvises til webudgaven.

Publikationen kan hentes på:
www.uvm.dk
Børne- og Undervisningsministeriet
Departementet
Frederiksholms Kanal 21
1220 København K

Indhold

Forord

I dette evalueringshæfte gennemgås prøveresultaterne ved de skriftlige prøver i matematik i det almene gymnasium og hf ved sommerprøverne maj-juni 2023.

Evalueringsgruppen bestod af studienævnsformand Ernst Hansen, Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet, lektor Kristoffer Grue Jensen, Stenhus Gymnasium & HF og lektor Lene Søndergaard, Randers HF & VUC, som har forfattet afsnit 2-12. Datamateriale til forcensuren er indsamlet og organiseret af lektor Niels Østergaard, HF Efterslægten. Alle fire takkes mange gange for deres indsats.

Hver eksaminands besvarelse bedømmes ved votering mellem to censorer. Censorerne takkes ligeledes for uvurderlig indsats med at rette og bedømme årets besvarelser samt indberette statistiske oplysninger til forcensuren samt kommentarer i øvrigt om elevernes besvarelse af opgaverne.

I 2023-evalueringen kommenteres elevernes besvarelser af de enkelte spørgsmål og delspørgsmål, baseret på indsendte noter herom fra én censorgruppe pr. opgave. Den nye form fik god modtagelse i 2022 og fortsættes her. Derfor skal en særlig tak rettes til de censorgrupper, der i forbindelse med censormødet indsendte materiale til disse kommentarer og således bidrog til denne del af rapporten.

Karakterstatistikker for de gymnasiale prøver offentliggøres også på www.uddannelsesstatistik.dk efter hver prøvetermin.

Kim Bertelsen
Fagkonsulent i matematik stx og hf

1 Baggrund

1.1 Elever til prøve

Prøveforekomst	Antal eksaminander
Stx A, 22. maj 2023	10273
Stx A, 24. maj 2023	3475
Stx B, 22. maj 2023	830
Stx B, 24. maj 2023	8195
Hf B, 22. maj 2023	3622
Hf C, 22. maj 2023	7951

1.2 Prøveforløb

Ved prøven i matematik A, stx, 22. maj 2023 viste det sig, at der var problemer med et delspørgsmål. I opgave 11, en modelleringsopgave om bøflers masse som funktion af alderen, skal eleverne i delspørgsmål 11b bestemme en partikulær løsning til en differentialligning. Det viste sig, at der havde været problemer med delspørgsmålet, fordi nogle elever har siddet med værktøjer, der kun vanskeligt har kunnet løse differentialligningen. Omfanget af vanskeligheder er ganske forskelligt afhængig af værktøj, version og indstillinger. Under alle omstændigheder kan man dårligt karakterisere delspørgsmålet som et "mindstekravsspørgsmål", da det med nogle værktøjer var nødvendigt at bestemme den fuldstændige løsning først.

Censorerne blev i censorbrevet udsendt på prøvedagen bedt om at inddrage dette forhold ved bedømmelsen, herunder ved den helhedsvurdering, der finder sted forud for karakterfastsættelsen.

1.3 Prøveform og prøvesæt

Prøveformerne i matematik stx og hf for hvert af niveauerne er som følger.

Niveau	Delprøve 1	Delprøve 2	Samlet varighed
Matematik stx A	2 timer uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	3 timer med hjælpemidler	5 timer
Matematik stx B	1½ time uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	2½ time med hjælpemidler	4 timer
Matematik hf B	1½ time uden andre hjælpemidler end	2½ time med hjælpemidler	4 timer

	godkendt formelsamling		
Matematik hf C	1 time uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	2 timer med hjælpemidler	3 timer

Til prøverne på stx A og hf B hører et forberedelsesmateriale.

Prøverne på stx A og stx B har hver to prøveforekomster i eksamensperioden maj-juni, for at hver elevs skriftlige prøver kan afvikles i løbet af et forholdsvis kort tidsrum uanset elevens fagkombination.

Opgavekommissionerne tilstræber at sammensætte opgavesæt, der rummer opgaver af varierende sværhedsgrad, således at elever på alle faglige niveauer kan få lejlighed til at vise, hvad de kan. Således indeholder et opgavesæt både opgaver, der tester mindre komplekse færdigheder og kompetencer såvel som vanskeligere opgaver og delspørgsmål.

1.4 Hjælpemidler

Ved delprøve 1 er det eneste tilladte hjælpemiddel den af ministeriet udsendte formelsamling for niveauet.

Opgaverne til delprøve 2 udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over et matematisk værktøjsprogram, jf. læreplanens pkt. 3.3, som omfatter faciliteter, der understøtter eksperimenterende og dynamiske aktiviteter med funktioner samt i geometri og statistik, herunder dynamisk graftegning og regnearksfaciliteter, samt generel symbolmanipulation med CAS.

Samlingen af vejledende eksamensopgaver og tidligere stillede opgaver til niveauet viser rækkevidden af den type opgaver, som elevens digitale værktøjer skal kunne håndtere, og holdets underviser eller institutionen må vælge værktøjer, der som udgangspunkt kan håndtere disse opgaver. Det er dernæst en del af undervisningen, at eleverne bliver så robuste i deres omgang med det digitale værktøj, at de har kan vælge en brugbar strategi ved løsningen af en konkret opgave.

1.5 Censur og censurresultat

Karakterfastsættelsen for den enkelte elevs besvarelse sker ved votering mellem to censorer med udgangspunkt i pointsummen for besvarelsen og en standardoversættelsesskala fra points til karakter. De karakterer, som censorerne afgiver, er dog ikke alene et resultat af en pointsammentælling. På grundlag af et givet antal point fastsættes en foreløbig karakter; i den endelige karakterfastsættelse indgår tillige en diskussion mellem censorerne samt en helhedsvurdering af den enkelte besvarelse.

Ved den såkaldte "forcensur" ca midtvejs i censurperioden indberetter for hvert hold én af censorerne de foreløbigt tildelte points for hvert spørgsmål for holdets fem første elever og giver derudover i prosaform generelle kommentarer til elevernes besvarelse af opgaverne.

Forcensuren giver mulighed for en tidlig vurdering af, om opgavesættene har fungeret efter hensigten, og giver mulighed for at opdage eventuelle uhensigtsmæssigheder, som kunne give anledning til ændring af oversættelsesskalaen.

Normalt vil man ændre oversættelsesskalaen for et sæt, hvis man fx kan pege på delspørgsmål eller opgaver, som faldt anderledes godt eller dårligt ud end forventet, eller hvis omfanget af sættet viser sig at være for stort eller for lille, altså tydelige tegn på, at ellers gode elever har opnået en uventet lav pointsum eller omvendt.

Resultatet af karaktergivningen samt evalueringsgruppens arbejde giver anledning til følgende bemærkninger:

- Andelen af elever, der ikke består, er desværre høj. Det gælder fortsat navnlig på de obligatoriske niveauer stx B og hf C.

- I **matematik A, stx**, ses glædeligt, at langt hovedparten af eleverne høster points i de opgaver/del-spørgsmål, der tester grundlæggende viden og færdigheder. Herunder hentes også mange points i grundlæggende opgaver i forberedelsesmaterialet. Det er også glædeligt, at specifikt opgaver i emnet differentialligninger er gået usædvanligt godt. En undtagelse fra den gode historie er opgaver, der kræver færdigheder i simpel algebra, hvor opgaver i begge sæt af typer, der stilles jævnligt, falder dårligt ud.

- For **matematik B, stx** tegner der sig et billede af, at det ofte er lykkedes eleverne at tilegne sig/lære helt elementære færdigheder, gerne med simpel brug af CAS, men at en grundlæggende forståelse af de tilhørende begreber ikke er fulgt med. De fleste elever kan eksempelvis tegne, men mange kan ikke aflæse $f(1)$ på en graf. En del kan differentiere, men mange kan ikke bruge det til at bestemme et minimum. Og en del kan anvende deres CAS-værktøj til at besvare spørgsmål om binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion, men mange kan ikke aflæse simle sandsynligheder fra en tabel. En høj andel af eleverne på stx B opnår ikke en sådan robusthed bredt i rækken af kernestofemner, at de kan høste points i sættenes nemme delspørgsmål. Beklageligvis måtte man ved forcensuren konstatere, at en række delspørgsmål navnlig i delprøve 1, herunder spørgsmål 3a, 4b, 7c og 11b i sættet 22. maj 2023 og 4a, 4b og 11ab i sættet 24. maj 2023, var faldet en del dårligere ud end forventet, i retrospekt især, fordi der i flere af disse spørgsmål var flere steder efter hinanden i løsningen af opgaven, hvor det kunne gå galt for eleven. Det er indtrykket af forcensurstatistikken, at dette har ramt elever på hele skalaen, og for at imødegå dette blev det besluttet at flytte karaktergrænserne fra 02 til og med 12 med 10 points.

- Besvarelserne på **matematik B, hf**, har ikke udløst store overraskelser. En enkelt opgavetype, hvor eleverne skal tage stilling til forskellige udsagn, kan være værd at vise eleverne, fordi mange eksaminander unødvendigt mister points, tilsyneladende fordi de glemmer at forholde sig til samtlige svarmuligheder, sådan som opgaven kræver.

- I årets delprøve 1 i **matematik C, hf,** havde mange elever vanskeligheder med at udfylde en støttepunktstabel med funktionsværdier ud fra en given forskrift. I delprøve 2 var der som andre år vanskeligheder med den praktiske fortolkning og brug af vækstfaktoren i en eksponentiel udvikling.

I afsnit 5, 8, 10 og 12 i denne rapport sammenfattes indtrykkene af elevbesvarelser af de enkelte sæt.

De benyttede oversættelsesskalaer ses i de følgende afsnit ved gennemgangen af prøveresultaterne for hvert sæt. Skalaerne for censurerede sæt stilles til rådighed efter censuren på www.prøvebanken.dk, hvor de ligesom terminens prøvesæt kan downloades af undervisere.

2 Datamateriale og forudsætninger for analyse

2.1 Introduktion

I det følgende er det hensigten at afdække og identificere en række mønstre i pointgivningen og at præsentere en terminologi, der kan italesætte disse mønstre.

Datamaterialet er den såkaldte forcensur. Ved eksamen vurderes hver besvarelse af to censorer. Dette organiseres holdvis. De to censorer arbejder tidsforskudt, fordi en del af materialet foreligger på papir. Førstecensor indrapporterer en detaljeret bedømmelse af besvarelserne fra fem elever fra hver klasse (de fem første fra karakterlisten eller fra listen i netprøver.dk), og disse bedømmelser udgør forcensuren.

Forcensuren er en kvalitetssikringsmekanisme i bedømmelsesprocessen: Den giver et samlet overblik inden den endelige karaktergivning - og hvis bestemte opgaver ser ud til at falde anderledes ud end forventet ift. sværhedsgraden, er der dermed mulighed for at justere oversættelsesskalaen fra points til karakter. Men forcensuren har også en vigtig rolle at spille i den efterfølgende evalueringsproces, fordi oplysningerne er så detaljerede. For den overordnede bedømmelsesproces foreligger der kun oplysninger om den endelige karakter for hver enkelt elev.

Datamateriale fra forcensuren er indsamlet og organiseret af Niels Østergaard. Analysen er gennemført af Ernst Hansen.

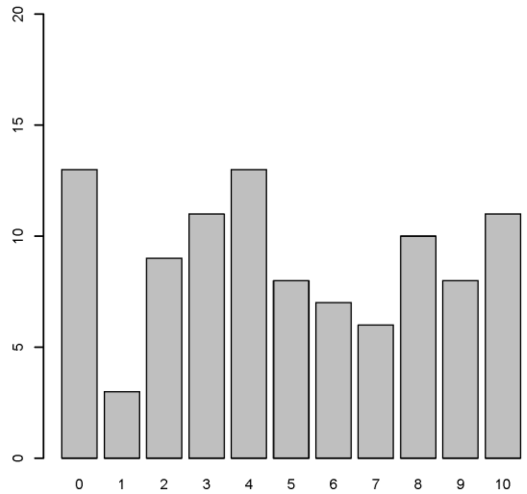
2.2 Terminologi

For hvert delspørgsmål kan data fra forcensuren opsummeres i en tabel som i tabel 1.

Score	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Procent	13	3	9	11	13	8	7	6	10	8	11

Tabel 1: Eksempel på bedømmelse af et delspørgsmål. Procenttallet angiver hvor mange procent af besvarelserne fra forcensuren i den pågældende prøve, der har opnået scoren i kolonnen. Procenttallene summer således til 100 (på nær diskrediteringsfejl).

Informationen i tabellen over scorerne forstås lettest ved at optegne et søjlediagram:



Figur 1: *Grafisk repræsentation af data fra tabel 1.*

Eksemplet i figur 1 er ganske ukarakteristisk for de søjlediagrammer man ser for de faktiske bedømmelser. En ligefordeling over de mulige scorer er et sjældent fænomen. Normalt vil der være en skævhed i den ene eller den anden retning, ofte ganske udtalt. Det er formentlig et karakteristisk forhold for matematik.

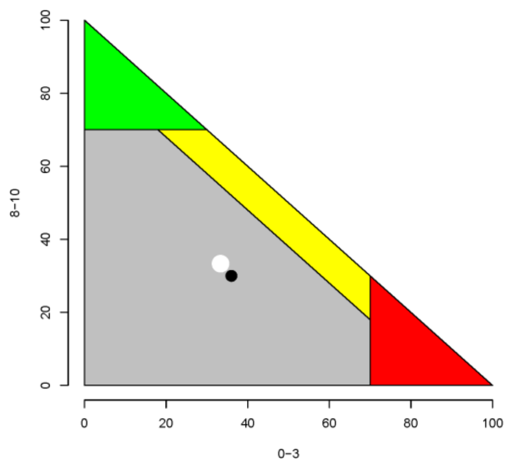
Det er ikke klart om skævheden ligger i spørgsmålenes formulering, i elevernes præstationer eller om den skabes af bedømmelsespraksis. Men det vil fremgå af denne rapport at det er uhyre sjældent at se bedømmelser af spørgsmål hvor midterområdet har nogen særlig vægt. Bedømmelserne vil koncentrere sig i den ene ende af skalaen eller i den anden ende - eller eventuelt i begge ender (svarende til at halvdelen af eleverne ikke kan få hul på spørgsmålet, mens den anden halvdel af eleverne løser spørgsmålet perfekt).

For at kunne formulere os kvalitativt om disse skævheder kan vi forgrove oplysningerne fra tabel 1 til følgende tabel:

Score	0-3	4-7	8-10
Procent	36	34	30

Tabel 2: *Grov version af data fra tabel 1.*

Denne grove version af data kan repræsenteres i et kompositionsdiagram, hvor vi optegner de to ydergrupper.

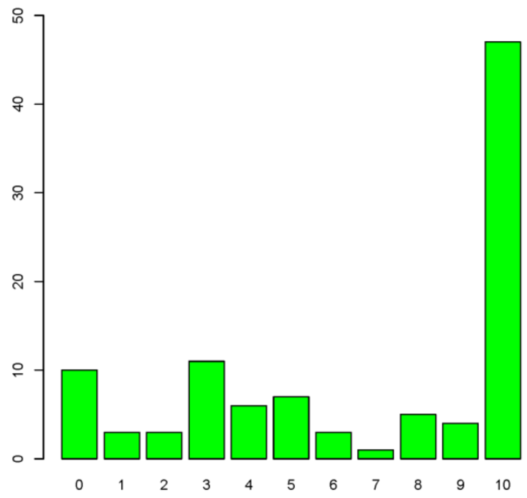


Figur 2: *Kompositionsdiagram. Data fra tabel 2 er repræsenteret af den sorte prik. Det hvide punkt vil svare til at lige mange elever får bedømmelser i de tre grupper 0-3, 4-7 og 8-10. De farvede områder forklares nedenfor.*

Det røde område på figur 2 repræsenterer et spørgsmål, der er gået dårligt for hovedparten af eleverne. Det grønne område repræsenterer et spørgsmål, der er gået godt for hovedparten af eleverne. Et spørgsmål, hvor hovedparten af eleverne scorer i midterområdet, vil blive afbildet nede omkring origo. Det gule område på tegningen repræsenterer et spørgsmål, hvor der er bedømmelser i begge ender af skalaen, men stort set ingen bedømmelser i midterområdet. Den præcise definition af disse områder vil blive givet nedenfor.

Let spørgsmål

Vi definerer et *let* spørgsmål som et spørgsmål, hvor mindst 70 procent af eleverne scorer 8-10. Et typisk søjlediagram vil se ud som i figur3.



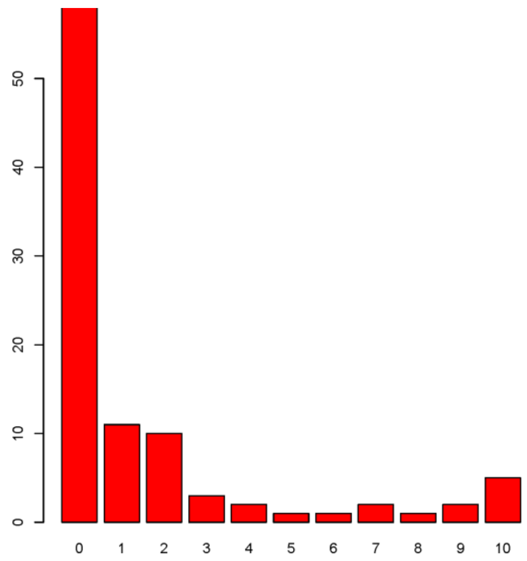
Figur 3: *Eksempel på et søjlediagram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'let'.*

Det er vigtigt at et eksamenssæt har enkelte spørgsmål i denne kategori. De skal bruges til at skelne de elever der kan lidt fra de elever der intet kan. Men der skal ikke være for mange af den slags spørgsmål, for de har ingen funktion i forhold til at separere middelelever fra hinanden.

Det præcise valg af 70 procent som skæringsgrænse har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Svært spørgsmål

Vi definerer et *svært* spørgsmål som et spørgsmål hvor mindst 70 procent af eleverne scorer 0-3. Et typisk søjlediagram vil se ud som i figur 4.



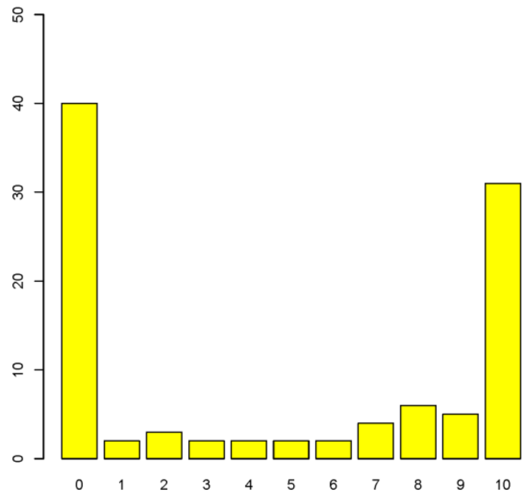
Figur 4: *Eksempel på et søjlediagram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'svært'.*

Det er vigtigt at et eksamenssæt har enkelte spørgsmål i denne kategori. De skal bruges til at skelne mellem top-eleverne. Men der skal ikke være for mange af den slags spørgsmål, for de har ingen funktion i forhold til at separere middelelever fra hinanden.

Det præcise valg af 70 procent som skæringsgrænse har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Knald-eller-fald spørgsmål

Vi definerer et *knald-eller-fald* spørgsmål som et spørgsmål der hverken er let eller svært og hvor under 12 procent af eleverne scorer 4-7. Et typisk søjlediagram vil se ud som i figur 5.



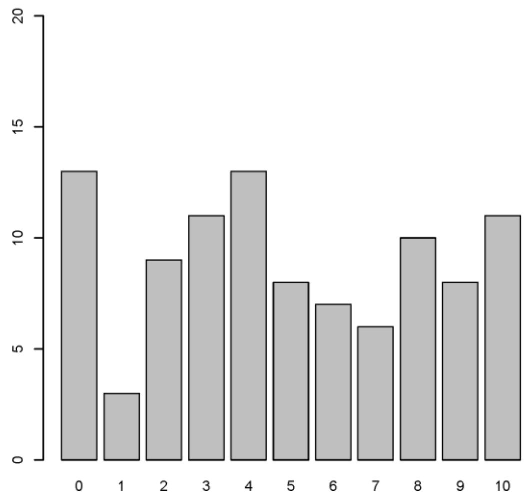
Figur 5: *Eksempel på et søjlediagram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'knald-eller-fald'.*

Hvis spørgsmålet hverken er let eller svært, vil der være mindst 18 procent i både 0-3 gruppen og 8-10 gruppen. De to ydergrupper vil således hver især være mindst 50 procent større end midtergruppen. Forbløffende mange spørgsmål har knald-eller-fald karakter i et eller andet omfang. Det er et helt typisk fænomen at 0 og 10 er de to enkeltscorer der gives flest af i de enkelte spørgsmål. Præcis hvor man sætter grænsen i den formelle definition har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Det kan være udmærket med et vist antal knald-eller-fald spørgsmål i et eksamenssæt. De har en vis funktion i at separere elever i midterområdet.

Standard-spørgsmål

Et spørgsmål defineres som *standard* hvis det ikke falder i en af de tre allerede definerede kategorier *let*, *svær* eller *knald-eller-fald*. Der skal altså være under 70 procent i hver af de to yderområderne 0-3 og 8-10, og mindst 12 procent i midterområdet 4-7. Et typisk søjlediagram kan se ud som i figur 6.



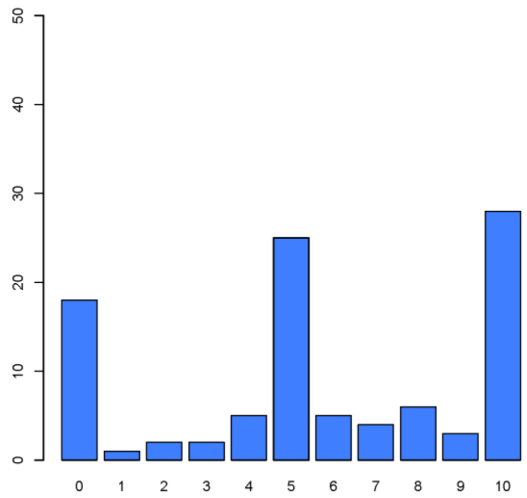
Figur 6: *Eksempel på et søjlediagram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive karakteriseret som standard.*

Bemærk at hvis der fandtes spørgsmål hvor scorerne klumpede sig sammen i midterområdet, så ville man nok have behov for en speciel kategori til at fange dette fænomen. Men i praksis ses der aldrig spørgsmål af den karakter. Derfor føles behovet for en ekstra kategori ikke så stærkt.

Som udgangspunkt vil man ønske at der er mange standardspørgsmål i et opgavesæt, for spørgsmål af denne karakter er de bedst egnede til at differentiere mellem elever på nogenlunde samme niveau.

Midtertop spørgsmål

Inden for standardspørgsmålene er der et enkelt mønster der er så karakteristisk at det fortjener sin egen kategori: det drejer sig som spørgsmål hvor der er markant flere elever der får præcis 5 end de umiddelbare naboscorer 4, 6 og 7. Søjlediagrammer med dette mønster har en top i midten. Et typisk søjlediagram vil se ud som i figur 7.



Figur 7: E*ksempel på et søjlediagram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'midtertop'.*

Denne midtertop kan opstå hvis spørgsmålet har en todelt formulering. For eksempel:

Bestem parametrene *a* og *b*, og giv en fortolkning af *b*.

Her vil der være en række elever der fejlfrit kan bestemme parametrene, men som ikke har noget brugbart at sige om deres fortolkning. I praksis fungerer sådanne spørgsmål som en kombination af to 5-point spørgsmål nærmere end som et 10-point spørgsmål.

Rent operativt definerer vi et *midtertop* spørgsmål som et spørgsmål der som udgangspunkt er standard, men hvor der er en markant top i scoren 5. For næsten alle spørgsmål er det sådan at der er flere der scorer netop 5 end nabo-scorerne - det er formentlig et retteteknisk fænomen. Der skal være markant flere før vi udråber spørgsmålet til at have midtertop. Vi kræver at mindst halvdelen af scorerne i midterområdet 4-7 falder i netop 5.

Det er er ikke klart om det bedømmelsesteknisk er godt eller skidt med en midtertop. Men hvis et spørgsmål har en midtertop så kan det så godt som altid føres tilbage til spørgsmålets formulering.

Vi opsummerer disse definitioner samlet:

Klassifikationskriterier:

Let spørgsmål - mindst 70 procent i 8-10

Svært spørgsmål - mindst 70 procent i 0-3

Knald-eller-fald - hverken let eller svært, højst 12 procent i 4-7

Standard spørgsmål - hverken let, svært eller knald-eller-fald

Midtertop - se præcis definition ovenfor

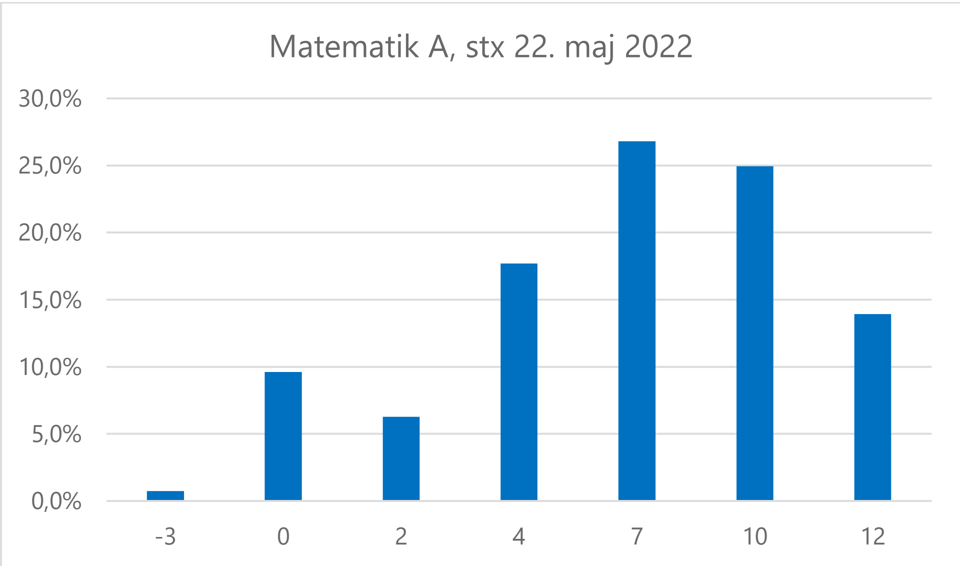
3 Stx A-niveau 22. maj 2023

Prøveresultat matematik A, stx 22. maj 2023

Antal eksaminander til prøve	**10273**
Karaktergennemsnit	**6,9**
Andel ikke-beståede	**10,3 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	0,7%	9,6%	6,3%	17,7%	26,8%	25,0%	13,9%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-21	15-89	82-106	100-146	140-196	190-231	225-250

3.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 2607 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 14 opgaver med i alt 25 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

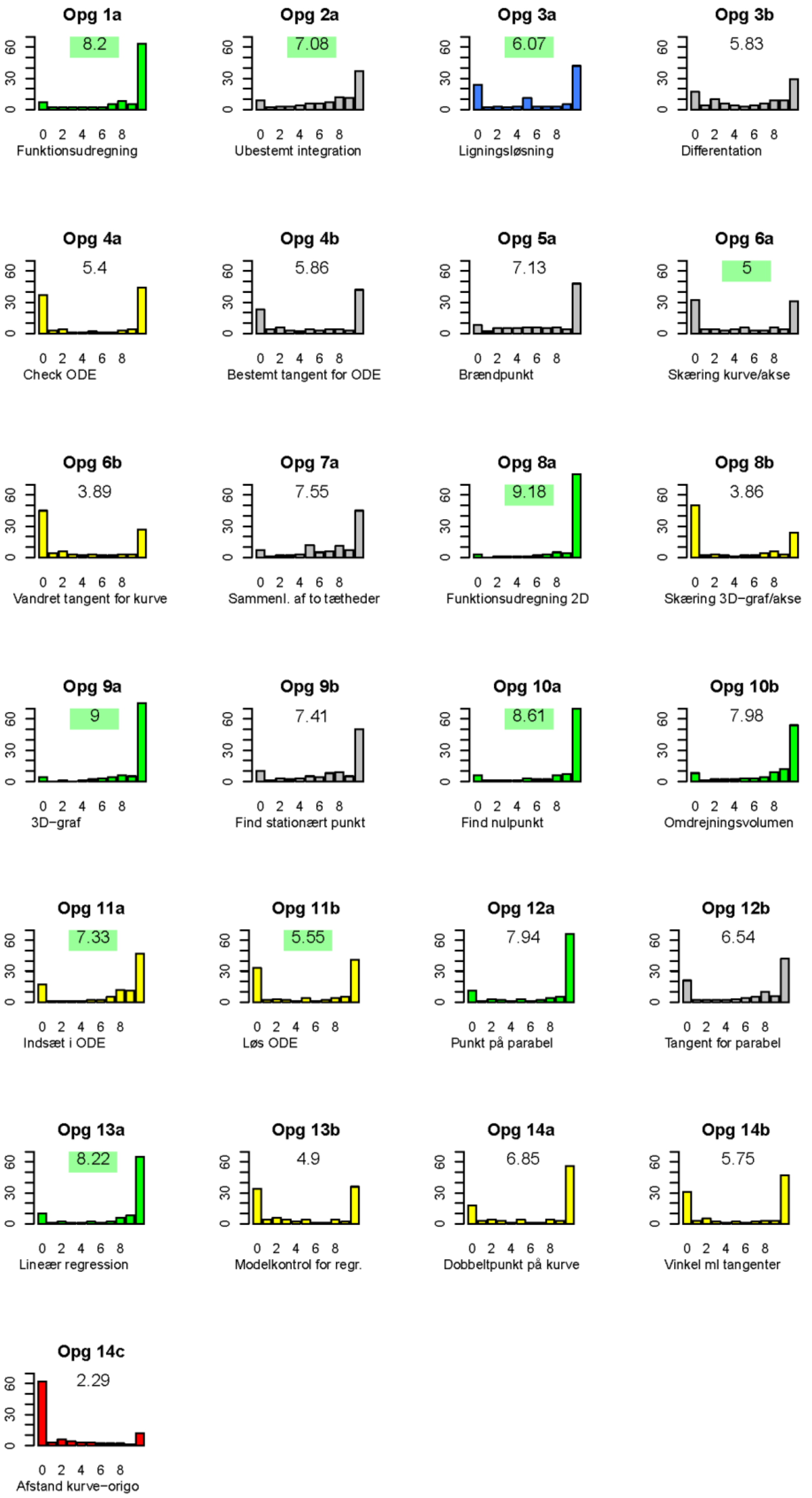
	Antal
Mindstekrav (grøn)	10
Ikke-mindstekrav (hvid)	15

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	12
Delprøve 2	13

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 8 nedenfor.

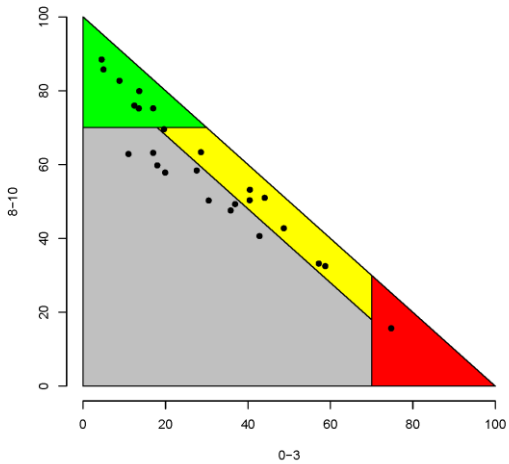


Figur 8: *Resultater for de 25 spørgsmål for STX-A 22. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
7	1	8	8	1

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

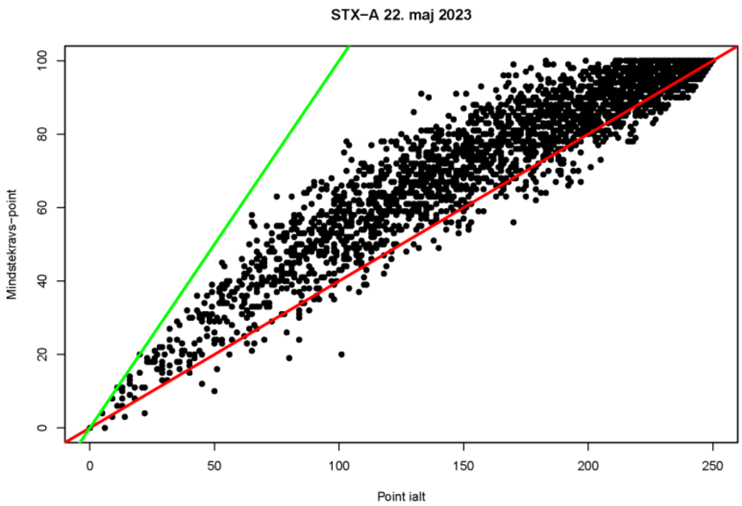


Figur 9: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-A 22. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
8a	∗ Funktionsudregning 2D	9.18
9a	∗ 3D-graf	9
10a	∗ Find nulpunkt	8.61
13a	∗ Lineær regression	8.22
1a	∗ Funktionsudregning	8.2
10b	Omdrejningsvolumen	7.98
12a	Punkt på parabel	7.94
7a	Sammenl. af to tætheder	7.55
9b	Find stationært punkt	7.41
11a	∗ Indsæt i ODE	7.33
5a	Brændpunkt	7.13
2a	∗ Ubestemt integration	7.08
14a	Dobbeltpunkt på kurve	6.85
12b	Tangent for parabel	6.54
3a	∗ Ligningsløsning	6.07
4b	Bestemt tangent for ODE	5.86
3b	Differentation	5.83
14b	Vinkel ml tangenter	5.75
11b	∗ Løs ODE	5.55
4a	Check ODE	5.4
6a	∗ Skæring kurve/akse	5
13b	Modelkontrol for regr.	4.9
6b	Vandret tangent for kurve	3.89
8b	Skæring 3D-graf/akse	3.86
14c	Afstand kurve-origo	2.29

Tabel 3: *Spørgsmålene for STX-A 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* ***mindstekrav,*** *er farvet grønne og markeret med en stjerne.*



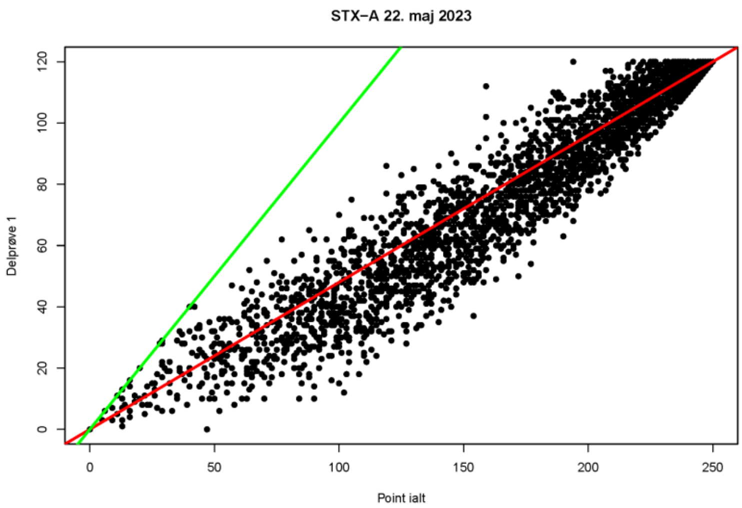
Figur 10: *STX-A 22. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får mere ud af mindstekravsopgaverne end af de øvrige, men ikke så meget som man kunne forvente. Specielt fremgår det at de sværeste mindstekravsopgaver er lige så svære som de sværeste ikke-mindstekravsopgaver. Kun de allerdygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
8a	∗ Funktionsudregning 2D	9.18
9a	3D-graf	9
10a	Find nulpunkt	8.61
13a	Lineær regression	8.22
1a	∗ Funktionsudregning	8.2
10b	Omdrejningsvolumen	7.98
12a	Punkt på parabel	7.94
7a	∗ Sammenl. af to tætheder	7.55
9b	Find stationært punkt	7.41
11a	Indsæt i ODE	7.33
5a	∗ Brændpunkt	7.13
2a	∗ Ubestemt integration	7.08
14a	Dobbeltpunkt på kurve	6.85
12b	Tangent for parabel	6.54
3a	∗ Ligningsløsning	6.07
4b	∗ Bestemt tangent for ODE	5.86
3b	∗ Differentation	5.83
14b	Vinkel ml tangenter	5.75
11b	Løs ODE	5.55
4a	∗ Check ODE	5.4
6a	∗ Skæring kurve/akse	5
13b	Modelkontrol for regr.	4.9
6b	∗ Vandret tangent for kurve	3.89
8b	∗ Skæring 3D-graf/akse	3.86
14c	Afstand kurve-origo	2.29

Tabel 4: *Spørgsmålene for STX-A 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* ***uden adgang til CAS*** *er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 11: *STX-A 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 48 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får en del mere ud af delprøve 2 end af delprøve 1. Specielt er der nogle der får fuldt (eller næsten fuldt) point i delprøve 2 mens de mangler en del point i delprøve 1.

3.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx A-sættet fra den 22. maj 2023 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens delspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra afsnit 2.2.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. En del rettegrupper fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

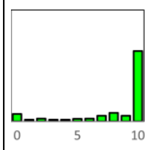
3.3 Delprøve 1

3.3.1 Opgave 1 - Sammensatte funktioner

Opgave 1 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad \text{og} \quad g(x) = 2^x.$$

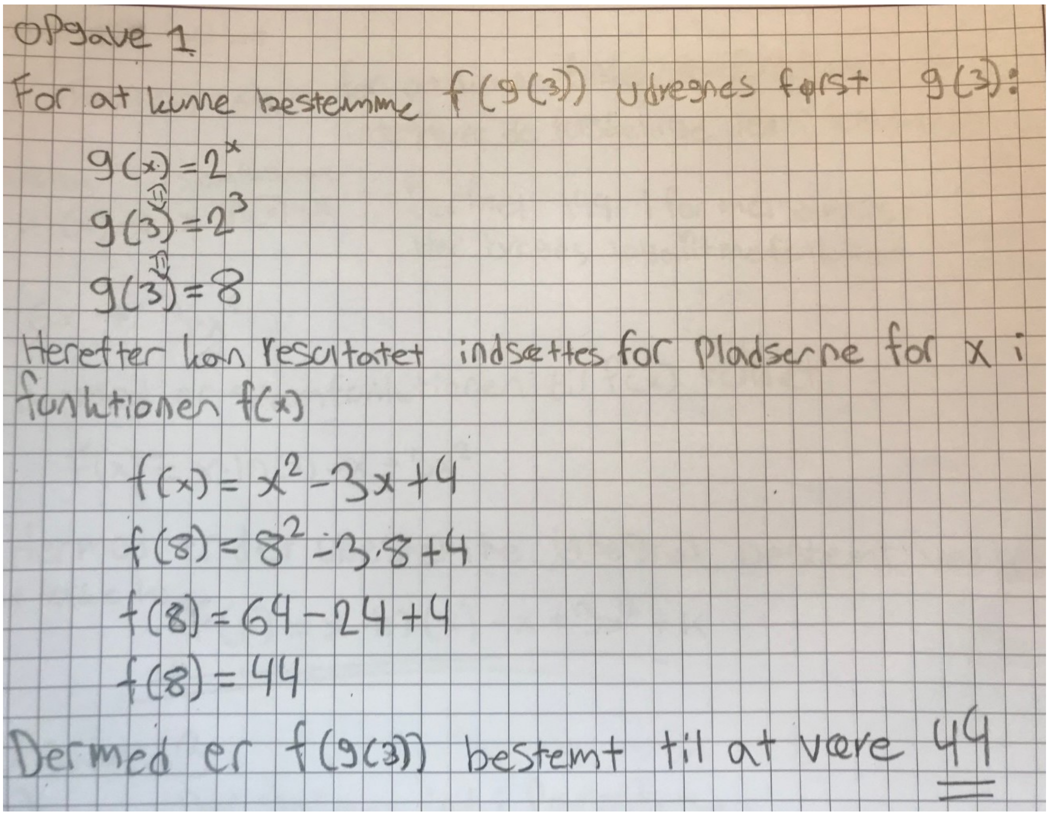
a) Bestem $f(g(3))$.



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 8,2)

De fleste elever besvarer dette spørgsmål fint - særligt de elever der først udregner $g(3)$ og derefter indsætter i forskriften for f. Nogle elever er udfordret i udregningen $f(8) = 64 - 24 + 4$, da de først udregner $24 + 4$, og derfor får resultatet $f\big(g(3)\big) = 36$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 1

For at kune bestemme $f(g(3))$ udregnes først $g(3)$:

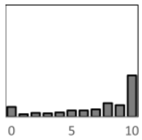
$$g(x) = 2^x$$
$$g(3) = 2^3$$
$$g(3) = 8$$

Herefter kan resultatet indsættes for pladserne for x i funktionen $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$
$$f(8) = 8^2 - 3 \cdot 8 + 4$$
$$f(8) = 64 - 24 + 4$$
$$f(8) = 44$$

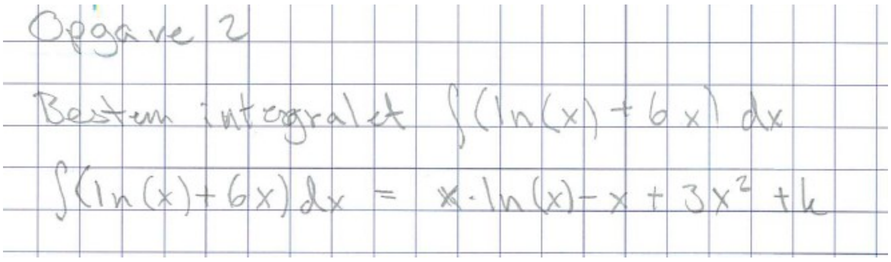
Dermed er $f(g(3))$ bestemt til at være $\underline{\underline{44}}$

3.3.2 Opgave 2 - Ubestemt integral

Opgave 2	a) Bestem integralet $\int (\ln(x) + 6x)\,dx$.	

Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 7,1)
Mange elever besvarer dette spørgsmål fint. Særligt godt går det med at integrere $\ln(x)$, mens der er flere, der er udfordret af leddet $6x$, hvor nogle differentiere i stedet. Dette kunne underbygge det generelle indtryk, man får af besvarelserne af sættet, at mange elever er blevet gode til at slå op i deres formelsamling, og derfor har styr på $\ln(x)$, mens det er lidt sværere at hente hjælp i formelsamlingen til udtrykket $6x$. Bemærk endvidere at mange censorer savner den additive konstant.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 2
Bestem integralet $\int (\ln(x) + 6x)\,dx$
$\int (\ln(x) + 6x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + 3x^2 + k$

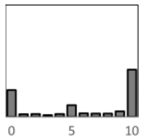
3.3.3 Opgave 3 - Nulreglen og differentialregning

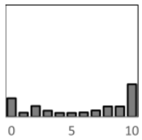
Opgave 3 a) Løs ligningen $\sqrt{x}\cdot(4x-12)=0$.

Funktionen f er givet ved

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot(4x-12).$$

b) Bestem $f'(x)$.





Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 6,1)

I dette spørgsmål testes om eleverne har kendskab til nulreglen. For de elever, der kan anvende denne regel, løses opgaven fint af mange, men en del mener ikke at ligningen $\sqrt{x}=0$ har en løsning. Nogle elever gætter løsninger og gør prøve. Bemærk i den forbindelse at gættemetoden ikke giver fuldt point. De elever, der ikke anvender nulreglen, forsøger at gange ind i parentesen, hvilket naturligvis ikke fører noget godt med sig.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 3

a) Løs ligningen $\sqrt{x}\cdot(4x-12)=0$

Ligningen er givet ved et produkt lig 0, derfor benyttes nulreglen.

$\sqrt{x}\cdot(4x-12)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \vee 4x-12=0 \Leftrightarrow$

$x=0 \vee 4x=12 \Leftrightarrow x=3$

Ligningen har løsningerne $x=0$ og $x=3$.

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 5,8)

Ikke overraskende er der en del elever, der ikke anvender produktreglen, men nøjes med at gange de to afledte funktioner sammen. Få elever får reduceret med 2 i første led.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Funktionen f er givet ved $f(x) = \sqrt{x} \cdot (4x-12) = 0$

b) Bestem $f'(x)$

$f'(x)$ er den afledede funktion. Den udregnes ved at differentiere funktionen. f er en produktfunktion, derfor benyttes produktreglen.

$$(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

For funktionen f gælder det at $g(x) = \sqrt{x}$ og $h(x) = 4x-12$

$$f'(x) = (g(x) \cdot h(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (4x-12) + \sqrt{x} \cdot 4 =$$

$$\frac{4x-12}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = \frac{2x-6}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$$

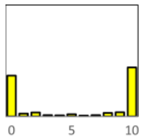
$f'(x)$ er lig $f'(x) = \dfrac{2x-6}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$.

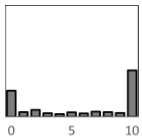
3.3.4 Opgave 4 - Differentialligninger

Opgave 4 En funktion f er givet ved $f(x) = 2e^x + x$.

a) Gør rede for, at f er en løsning til differentialligningen $y' = y - x + 1$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, 2)$.

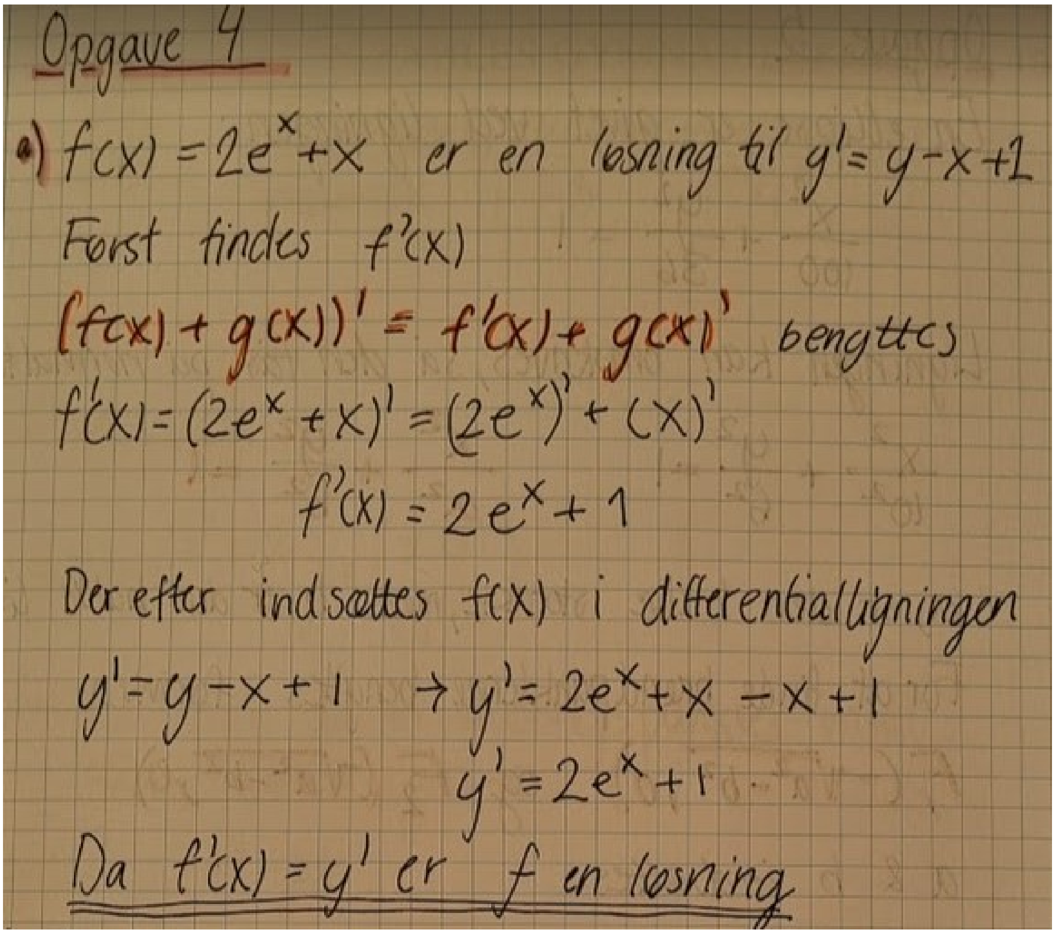




Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 5,4)

Dette spørgsmål deler vandene. Dem, der kan "gøre prøve", besvarer spørgsmålet fint - dog er det vigtigt, at besvarelsen afsluttes med en konklusion. En del elever forsøger at løse differentialligningen ved hjælp af en løsningsformel fra formelsamlingen, hvilket i princippet er muligt, men bestemt ikke meningen med opgaven.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 4

a) $f(x) = 2e^x + x$ er en løsning til $y' = y - x + 1$

Først findes $f'(x)$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g(x)'$ benyttes

$f'(x) = (2e^x + x)' = (2e^x)' + (x)'$

$f'(x) = 2e^x + 1$

Derefter indsættes $f(x)$ i differentialligningen

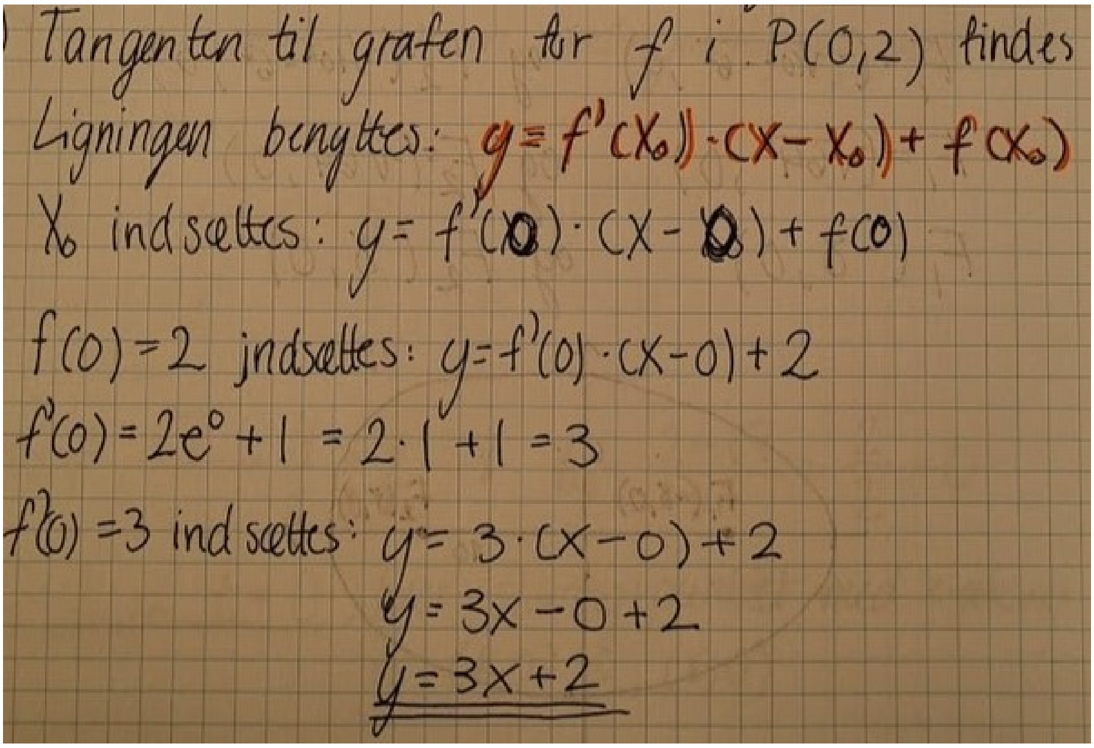
$y' = y - x + 1 \rightarrow y' = 2e^x + x - x + 1$

$y' = 2e^x + 1$

Da $f'(x) = y'$ er f en løsning

Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 5,9)
Der er færre elever, som må give helt fortabt på dette spørgsmål. Formentlig fordi opgaven kan besvares uden brug af differentialligningen. Bemærk at der er en del elever, der udregner e^0 til 0.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

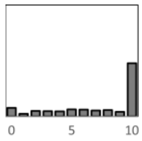

Tangenten til grafen for f i $P(0,2)$ findes
Ligningen benyttes: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
x_0 indsættes: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
$f(0) = 2$ indsættes: $y = f'(0) \cdot (x - 0) + 2$
$f'(0) = 2e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$f'(0) = 3$ indsættes: $y = 3 \cdot (x - 0) + 2$
$y = 3x - 0 + 2$
$\underline{\underline{y = 3x + 2}}$

3.3.5 Opgave 5 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

Opgave 5 En ellipse er givet ved ligningen

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 7,1)

De fleste elever klarer sig rigtig godt i spørgsmålene fra forberedelsesmaterialet - pointgennemsnittene er på niveau med mange af mindstekravsopgaverne. Dette tyder på, at eleverne efter en del skriftlige eksamensopgaver i materialet har oparbejdet en rutine i disse opgaver. Desværre kniber det for en del elever at udregne kvadratroden af $\sqrt{10^2-6^2}$, idet kvadratroden blot distribueres ud på de to led, og kvadratet dermed ophæves. Endvidere bør det nævnes, at der blandt mange gode besvarelser er hold, der skiller sig negativt ud i forhold til besvarelsen af spørgsmål i forberedelsesmaterialet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5

En ellipse er givet ved ligningen

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter

Jeg finder brændpunkterne således:

$$F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0) \text{ og } F_2(\sqrt{a^2-b^2},0)$$

Først skal jeg tage kvadratroden af 100 og 36, da normalformen for ellipsen hedder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\sqrt{100}=10$ og $\sqrt{36}=6$. Så indsætter jeg 10 på a's plads og 6 på b's plads i brændpunkterne

$$F_1(-\sqrt{10^2-6^2},0) \Leftrightarrow$$
$$F_1(-\sqrt{100-36},0) \Leftrightarrow$$
$$F_1(-\sqrt{64},0) \Leftrightarrow$$
$$F_1(-8,0)$$

Så finder jeg det andet brændpunkt

$$F_2(\sqrt{10^2-6^2},0) \Leftrightarrow$$
$$F_2(\sqrt{100-36},0) \Leftrightarrow$$
$$F_2(\sqrt{64},0) \Leftrightarrow$$
$$F_2(8,0)$$

Min beregning viser, at koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter er $F_1(-8,0)$ og $F_2(8,0)$

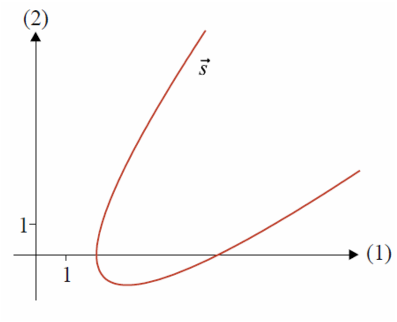
3.3.6 Opgave 6 - Vektorfunktioner

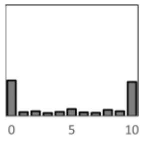
Opgave 6 Figuren viser banekurven for en vektorfunktion $\vec{s}$ givet ved

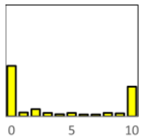
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}.$$

a) Bestem t-værdien til hvert af banekurvens to skæringspunkter med førsteaksen.

b) Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven, hvor den har en vandret tangent.







Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 5,0)
En del elever "aflæser" koordinatsættene til skæringspunkterne på førsteaksen. Nogle går derefter videre til at bestemme de tilhørende t-værdier. En sådan besvarelse er (naturligvis) ikke fyldestgørende, men viser en del forståelse. Langt værre er det, at mange elever i deres besvarelse af dette spørgsmål sætter $t = 0$ og udregner koordinatsættet til det tilhørende punkt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

OPGAVE 6

a) Jeg skal bestemme t-værdierne til banekurven for $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^2-2t \end{pmatrix}$'s to skæringspunkter med x-aksen. Skæringspunkter med x-aksen har y-koordinaten 0, så jeg sætter vektorfunktionens y-koordinat lig 0 og løser andengradsligningen for at finde t:

fortsat →

$t^2 - 2t = 0$ Først finder jeg diskriminanten: $d = b^2 - 4ac$

$d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = (-2)^2 = 4$ Derefter løser jeg for t_1 og t_2:

$t = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow$

$t_1 = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$t_2 = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Altså er t-værdierne for banekurvens skæringer med x-aksen $t_1 = 2$ og $t_2 = 0$

Spørgsmål 6b (pointgennemsnit: 3,9)

I dette spørgsmål er aflæsningsbesvarelser endnu mere problematiske, idet der så ikke efterfølgende skal vises nogle matematiske udregninger. Det er vigtigt at gøre eleverne klart, at i de opgaver, hvor der må aflæses i et koordinatsystem i delprøve 1, vil der ofte være indtegnet et gitter i koordinatsystemet, eller punkterne vil på anden vis være tydeligt markerede. En del elever er også udfordret af en basal forståelse af begrebet vandret tangent, formentlig fordi det her optræder i forbindelse med en vektorfunktion og ikke en "almindelig" funktion af én variabel.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Jeg skal bestemme koordinatsættet til punktet på banekurven som har en vandret tangent. Jeg starter med at finde hastighedsfunktionen ved at differentiere $\vec{s}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^2-2t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t-2 \end{pmatrix}$$

Da et punkt med en vandret tangent ikke har nogen op- eller nedadgående hældning, sætter jeg $y'(t)=0$ og løser for t:

$$2t-2=0 \iff 2t=2 \iff t=1$$

Nu indsætter jeg $t=1$ i den oprindelige funktion, $\vec{s}(t)$, og finder koordinatsættet til punktet:

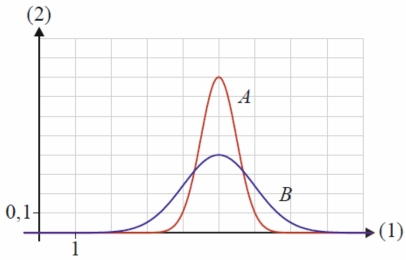
$$\vec{s}(1) = \begin{pmatrix} (1)^2+2 \\ (1)^2-2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

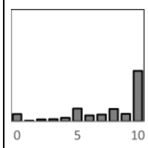
Altså er punktet med vandret tangent $P(3,-1)$

3.3.7 Opgave 7 - Normalfordelingen

Opgave 7

Bilag vedlagt





Figuren viser graferne for tæthedsfunktionerne for to normalfordelinger A og B.

a) Gør for hver af følgende påstande rede for, om den er korrekt.

1. Normalfordeling A og B har samme middelværdi.
2. Normalfordeling A og B har samme spredning.

Benyt bilaget.

Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 7,6)
Spørgsmålet går godt for mange. De fleste kan argumentere for, at de to normalfordelinger har samme middelværdi. Differentieringen i pointgivningen afhænger derefter af i hvilket omfang eleverne kan argumentere for, at spredningen i B er størst. Mange elever angiver fornuftige kvalitative begrundelser for forskellig spredning. Bemærk at formuleringer som "Benyt bilaget" eller "Brug bilaget" i spørgsmålsformuleringer ikke er en skærpelse af de generelle krav, der står oplistet på opgavesættenes første side. I princippet kan der gives fuld point for en meget nøje beskrivelse af den fremgangsmåde, hvormed bilaget anvendes - uden at dette vedlægges, men sandsynligheden for, at en sådan beskrivelse er fyldestgørende, er ikke stor.

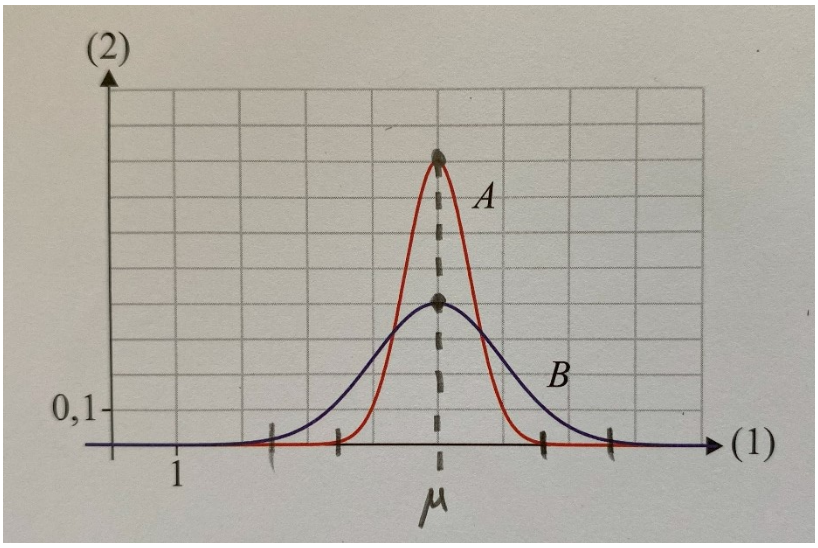
Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 7:

Påstand 1 "Normalfordeling A og B har samme middelværdi" er korrekt, da middelværdien er x-koordinaten til tæthedsfunktionens toppunkt og toppunktet for A og B ligger ved samme x-koordinat (se bilag).

Påstand 2 "Normalfordeling A og B har samme spredning" er forkert, for som man kan se på bilaget er fordelingerne ikke ens, og det ville de være hvis de både havde samme middelværdi og spredning. Da deres middelværdi er den samme må deres spredning være forskellig.

Klokkeformen for B er bredere end A's så B har en større spredning.

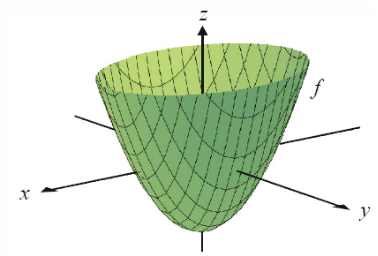

(2)
A
B
0,1
1
(1)
μ

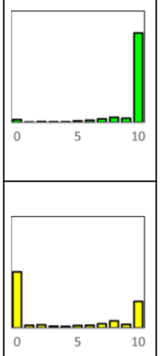
3.3.8 Opgave 8 - Funktioner af to variable

Opgave 8 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved $f(x,y)=x^2+2y^2-4$.

a) Bestem $f(2,3)$.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og x-aksen.





Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 9,2)
Dette spørgsmål besvarer de fleste elever korrekt, og den eneste udfordring er regnestykket $2 \cdot 3^2$ der for nogle opfattes som $(2 \cdot 3)^2 = 36$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

a) I denne opgave skal jeg bestemme f(2,3) og det gør jeg ved at sætte 2 i x's plads og 3 i y's plads:

$f(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 3^2 - 4$

$f(2,3) = 4 + 18 - 4$

$f(2,3) = 18$

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 3,9)

Dette spørgsmål har ikke været stillet før, og ca. halvdelen af eleverne kommer slet ikke i gang med at besvare spørgsmålet. Af dem der kan gennemskue en strategi, får mange 10 point, men en del censorer savner forklaringer hos eleverne for, hvorfor z og y sættes lig 0.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) I denne opgave skal jeg bestemme koodinatsættet til
Hvert af skærningspunkter mellem grafen f og x-aksen
og Det betyder at både z-værdier og y-værdier er 0 så derfor
bliver udtrykket til:

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4$$
$$0 = x^2 + 2\cdot 0^2 - 4$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Så koordinatsættet for de skærningpunkter er
$P = (2,0,0)$ og $Q = (-2,0,0)$

3.4 Delprøve 2

3.4.1 Opgave 9 - Funktioner af to variable

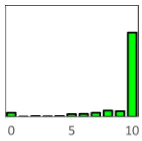
Opgave 9 En funktion *f* af to variable er givet ved

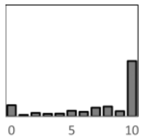
$$f(x,y)=x^2-6x\cdot y+3y^2+2\,.$$

a) Tegn grafen for *f* i området $[-4;4]\times[-4;4]\times[-5;5]$.

Det oplyses, at *f* har netop ét stationært punkt *P*.

b) Bestem koordinatsættet til *P*.





Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 9,0)
De fleste elever får fuldt point for deres besvarelse af dette spørgsmål, og mange censorer påpeger også, at spørgsmålet ikke udfordrer eleverne nok - dog har en del Maple-bruger svært ved at få afleveret en pæn graf.

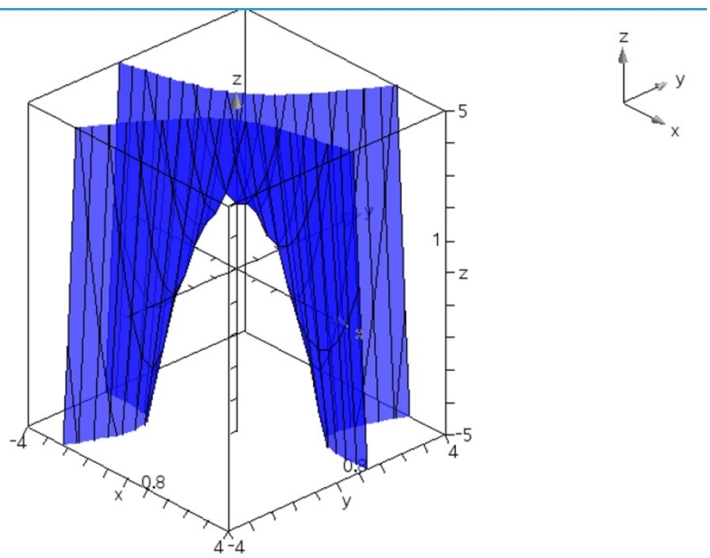
Et eksempel på en elevbesvarelse:

opg 9:

A: En funktion af to variable er givet ved funktionsforskriften $f(x,y)=x^2-6x\cdot y+3y^2+2$. Jeg skal tegne grafen for f i området $[-4;\ 4]\times[-4;\ 4]\times[-5;\ 5]$. Jeg tegner grafen på næste side.

se næste side ->

som det kan aflæses på figuren, er der tale om en hyperbolsk paraboloide.



Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 7,4)

Endnu et spørgsmål som går godt for mange elever. På en del hold følger eleverne en fast skabelon i deres besvarelser, og de fleste kommer frem til, at $x = 0$ og $y = 0$ i det stationære punkt. Til gengæld er der en del elever, som ikke får udregnet den tilhørende z-koordinat - jf. Vejledning til læreplan i Matematik A, stx.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

B: Det oplyses at funktionen af to variable fra forrige delopgave har et stationært punkt, jeg skal bestemme koordinatsættet til dette punkt. For at bestemme koordinatsættet til det stationære punkt starter jeg med at finde gradienten ved at differentiere partielt og laver en ligning med to ubekendte, x og y, hvor de partielt afledte begge er lig med nul

$partielt\_x=\frac{d}{dx}\left(x^2-6\cdot x\cdot y+3\cdot y^2+2\right) \blacktriangleright partielt\_x=2\cdot x-6\cdot y$

$partielt\_y=\frac{d}{dy}\left(x^2-6\cdot x\cdot y+3\cdot y^2+2\right) \blacktriangleright partielt\_y=6\cdot y-6\cdot x$ Herefter løses ligningen med de to partielle lig nul: $\mathrm{solve}\left(6\cdot y-6\cdot x=0 \text{ and } 2\cdot x-6\cdot y=0,x,y\right) \blacktriangleright x=0 \text{ and } y=0$

Disse værdier for x og y indsætter jeg i den oprindelige funktion f(x,y) for at finde z.

$z\_koordinat=0^2-6\cdot 0\cdot 0+3\cdot 0^2+2 \blacktriangleright z\_koordinat=2$

dvs. at funktionen f(x,y) har et stationært punkt med koordinatsættet $P(0,0,2)$

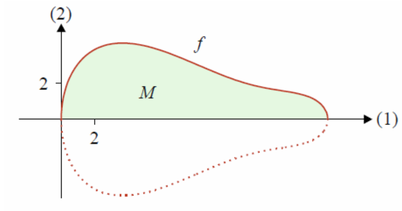
3.4.2 Opgave 10 - Integralregning

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\frac{1}{16}\cdot\sqrt{(16x-x^2)\cdot(x^2-24x+164)} \quad , \quad 0\leq x\leq 16 .$$

a) Løs ligningen $f(x)=0$.

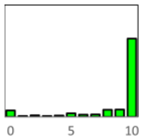
Figur 1

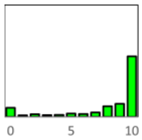


Figur 2

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M.
Figur 1 viser en legetøjskegle. I en model kan legetøjskeglen beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved, at M drejes 360° om førsteaksen.
I modellen på figur 2 har begge akser enheden cm.

b) Benyt modellen til at bestemme rumfanget af legetøjskeglen.





Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 8,6)
Et nemt spørgsmål for de fleste, men en del Maple-brugere er udfordret af de imaginære løsninger til ligningen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10

a)

Ligningen $f(x)=0$ skal løses. f er givet ved følgende

$$f(x)=\frac{1}{16}\cdot\sqrt{(16x-x^2)\cdot(x^2-24x+164)} \;\; | \;\; 0\leq x\leq 16$$

Ligningen løses

$$f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{16}\cdot\sqrt{(16x-x^2)\cdot(x^2-24x+164)}=0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x=0 \quad \vee \quad x=16$$

Eftersom 0 og 16 er indenfor grænserne kan det konkluderes at løsningen til $f(x)=0$ er
$x=0 \quad \vee \quad x=16$

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 8,0)
Spørgsmålet er er et typisk spørgsmål i anvendt integralregning, og mange besvarer spørgsmålet til fuldt point. Der går dog også nogle point tabt for en del elever, da de glemmer at redegøre for de indsatte grænser i integralet og ikke konkluderer i kontekst og med korrekt enhed.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Rumfanget af legetøjskeglen skal bestemmes. Rumfanget er givet udfra det omdrejningslegeme grafen for f danner sammen med første aksen. Begge asker har enheden cm og giver derfor et rumfang i cm^3

Rumfanget bestemmes vha. følgende formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Grænserne a og b er største og mindste værdien in grafen interval altså er $a = 0$ og $b = 16$

$$V = \pi \cdot \int_0^{16} \left(\frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164)} \right)^2 dx \approx 408{,}826$$

Dermed kan det konkluderes at rumfanget af legetøjskeglen er 408,826 cm^3

3.4.3 Opgave 11 - Differentialligninger

Opgave 11 I en model kan vægten af en bøffel af racen Murrah beskrives ved differentialligningen

$$y' = 0{,}0768 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 0{,}0102 \cdot y \quad , \quad 1 \le x \le 750 \, ,$$

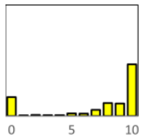
hvor $y = f(x)$ er bøflens vægt i kg x døgn efter fødslen.

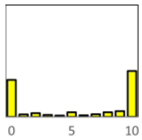
a) Med hvilken hastighed vokser bøflens vægt, når den vejer 100 kg?

Bøflens vægt efter 1 døgn er 59 kg.

b) Bestem en forskrift for f.

Kilde: Classical nonlinear models to describe the growth curve for Murrah buffalo breed.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 7,3)
Et typisk spørgsmål, der er lige til at gå til, hvis man ved, hvad der skal gøres. Det er der imidlertid en mindre del af eleverne, der ikke gør, hvilket resulterer i 0 points-besvarelser. Blandt de korrekte besvarelser opnår mange fuldt point, men der er også en del pointfradrag grundet manglende eller forkerte enheder i konklusionen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg ved at $y' = 0.0768 \cdot y^{\frac{}{3}} - 0.0102 \cdot y$

Jeg indsætter 100 på y ernes plads.

$y' = 0.0768 \cdot 100^{\frac{2}{3}} - 0.0102 \cdot 100$

$0.0768\ 100^{2\,/\,3} - 1.0200$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

0.6346

Altså vokser bøflen med hastigheden 0.6346 kg pr døgn når den vejer 100kg.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 5,6)
Differentialligningen i dette spørgsmål var for nogle værktøjsprogrammer ikke til at løse direkte. Her skulle man over den fuldstændige løsning først, før den partikulære kunne bestemmes. Dette gør, at spørgsmålet for elever med disse programmer ikke med rimelighed kan karakteriseres som et mindstekravsspørgsmål. Konsekvensen blev en centraludmelding fra fagkonsulenten om at være særligt opmærksom i forbindelse med karaktergivningen af besvarelser, hvor differentialligningen blev søgt løst i disse værktøjsprogrammer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)
Jeg bruger komandoen dsolve, hvor jeg indsætter y(1)=59, som vi har fået oplyst.

$$dsolve\left(\left\{y' = 0.0768 \cdot y^{\frac{2}{3}} - 0.0102 \cdot y, y(1) = 59\right\}, y(x)\right)$$

$$y(x) = \frac{\left(835584\ 59^{1/3} - 110976\ 59^{2/3} - 1807285\right) e^{-\frac{51x}{5000} + \frac{51}{5000}}}{4913} + \frac{\left(-1671168\ 59^{1/3} + 110976\ 59^{2/3} + 6291456\right) e^{-\frac{17x}{2500} + \frac{17}{2500}}}{4913} + \frac{2097152}{4913} + \frac{\left(835584\ 59^{1/3} - 6291456\right) e^{-\frac{17x}{5000} + \frac{17}{5000}}}{4913}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$y(x) = -48.097\ e^{-0.010200x + 0.010200} + 298.67\ e^{-0.0068000x + 0.0068000} + 426.86 - 618.48\ e^{-0.0034000x + 0.0034000}$$

Funktionen f er givet ved:

$$y(x) = -48.097\ e^{-0.010200x + 0.010200} + 298.67\ e^{-0.0068000x + 0.0068000} + 426.86 - 618.48\ e^{-0.0034000x + 0.0034000}$$

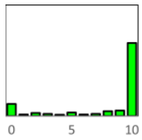
hvor $1 \leq x \leq 750$.

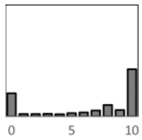
3.4.4 Opgave 12 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

Opgave 12 En parabel er givet ved ligningen $y^2 = -3x$.

a) Gør rede for, at punktet $P(-12, 6)$ ligger på parablen.

b) Bestem en ligning for tangenten til parablen i punktet P.





Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 7,9)
Rigtig mange elever får 10 point for deres besvarelse af dette spørgsmål, men flere censorkommentarer peger på, at en del elever tror, at man kan besvare spørgsmålet grafisk. Da punktet ligger på parablen, kan et grafisk argument naturligvis ikke stå alene.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

A. En parbel er givet ved ligningen $y^2 = -3\ x$.
At punktet $P(-12, 6)$ ligger på parablen fremgår, hvis man indsætter værdierne for x og y i ligningen:
$6^2 = -3 \cdot (-12)$

$$36 = 36 \tag{4.1}$$

Vi ser da, at ligningen er opfyldt.

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 6,5)
Elevbesvarelserne af sommerens eksamenssæt viser, at mange elever er blevet rutinerede i at besvare spørgsmål i det nuværende forberedelsesmateriale, men det er også klart, at der stadig er en (mindre) del af eleverne, som stort set ikke eller kun i ringe grad har orienteret sig i materialet. I et spørgsmål som dette resulterer det enten i, at spørgsmålet ikke besvares, eller for dygtigere elevers vedkommende i at ligningen omskrives og den traditionelle "tangentligningsformel" derefter anvendes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

B. En ligning for tangenten til parablen i punktet P (x_0, y_0) kan bestemmes ved formlen
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$:

Ligningen defineres som funktionen for parablen så $y = f(x)$:
$f(x) := \sqrt{-3 \cdot x}$

$$f := x \mapsto \sqrt{-3 \cdot x} \tag{4.2}$$

x-koordinatet til punktet defineres ligeledes:
$x_0 := -12$

$$x_0 := -12 \tag{4.3}$$

Disse værdier indsættes:
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$y = -\frac{\sqrt{36}\ (x + 12)}{24} + 6 \tag{4.4}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$y = -0.25000\, x + 3.0000 \tag{4.5}$$

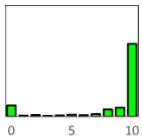
Ligningen til tangenten til parablen er $y = -0.25\, x + 3$.

3.4.5 Opgave 13 - Normalfordelingen

Opgave 13

Sølvmyre.
Billedkilde: Harald Wolf

Kilde: Pfeffer et al.:
"High-speed locomotion in the Saharan silver ant"



Tabellen viser en række målinger af sammenhørende værdier af fart og skridtlængde for sølvmyrer i Sahara-ørkenen.

Fart (mm/s)	59	63	782	857
Skridtlængde (mm)	5,3	6,5	19,3	18,2

Hele tabellen med alle 126 datapunkter findes i bilaget: Soelvmyrer.xlsx

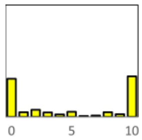
I en lineær model kan sammenhængen mellem fart og skridtlængde beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b\,,$$

hvor x betegner farten (målt i mm/s), og $f(x)$ betegner skridtlængden (målt i mm).

a) Benyt alle tabellens data til at bestemme en forskrift for f.

b) Gør rede for, at residualerne i modellen med god tilnærmelse er normalfordelte.



Spørgsmål 13a (pointgennemsnit: 8,2)
Denne slags spørgsmål i lineær regression går typisk godt, og mange elever har styr på dataimport og skift af decimalkomma/punktum. Enkelte censorer nævner, at opdateringer i nogle værktøjsprogrammer kan betyde, at proceduren for skift mellem komma og punktum ændres, hvilket naturligvis kan give anledning til problemer for eleverne, hvis dette sker kort før eksamen. Det anbefales derfor, at mere robuste procedurer anvendes i undervisningen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 13: Sølvmyrer i Sahara-ørkenen.

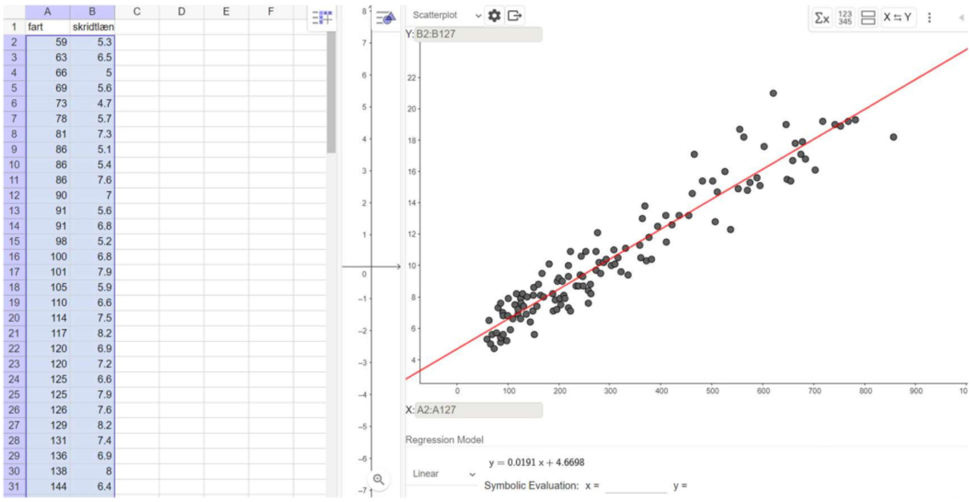
Der er en række data, der viser sammenhørende værdier for en sølvmyres fart og dens skridtlængde ved denne fart. Det påstås, at sammenhængen mellem sølvmyrens fart og skridtlængde kan beskrives ved en lineær model.

$$f(x) = a \cdot x + b$$

$f(x)$ er en lineær funktion, der beskriver denne lineære sammenhæng. $f(x)$ betegner skridtlængde målt i mm, og x betegner fart målt i mm/s.

13.a) Benyt dataet til at bestemme forskriften for f(x).

For at bestemme forskriften for $f(x)$ foretages der lineær regression på det givet data. Dataet kopieres fra excel ind i GeoGebra, og der foretages lineær regression:



Ud af førsteaksen er myrenes fart, og ud af andenaksen er deres skriftlængde. Fra GeoGebra fås følgende forskrift for $f(x)$:

$$f(x) = 0.0191 \cdot x + 4.6698$$

Spørgsmål 13b (pointgennemsnit: 4,9)
Dette er et klassisk enten-eller spørgsmål. Enten får eleverne 10 eller 0 point for deres besvarelse. Mange af dem, der får 0 eller meget få point, har en lavet et normalfordelingsplot over fart-datapunkterne eller benytter residualplottet til at argumentere for normalfordelt residualer. En del elever anvender tekstskabeloner til at besvare spørgsmålet, og de svageste af disse elever får ikke redigeret i konteksten fra skabelonen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

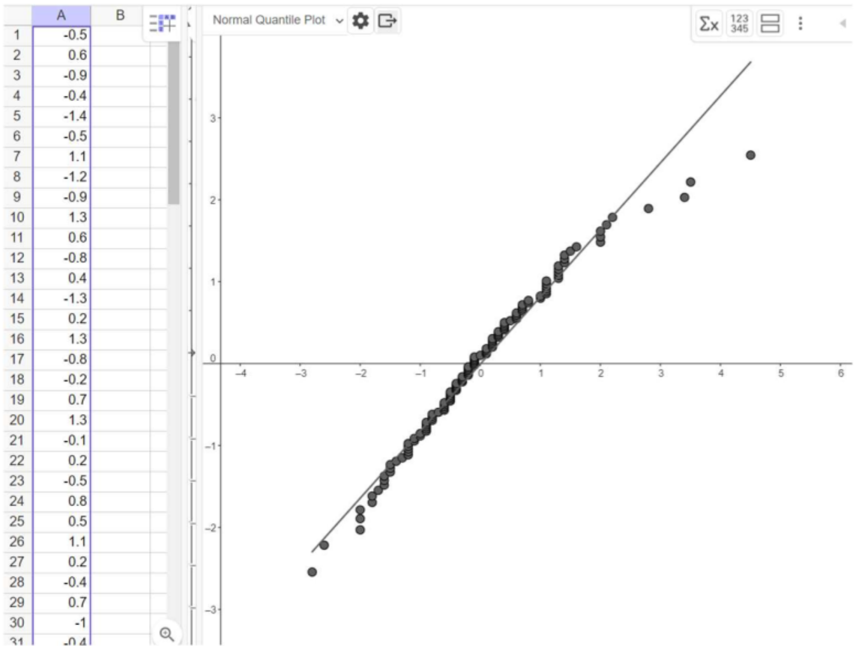
13.b) Redegør for, at residualerne i modellen er normalfordelte.

Da vi nu kender en forskrift for funktionen $f(x)$, der angiver modellens skriftlængden ved en fart, kan vi beregne disse funktionsværdier i excel ved hver fart. Der laves en ny kolonne ved siden af dataet, hvor funktionsværdien beregnes ud fra farten. Derefter beregnes residualen ud fra hvert datapunkt ved at trække funktionsværdien fra skridtlængden. Excel-filen ser nu således ud:

	A	B	C	D
1	**fart**	**skridtlængde**	**funktionsværdi**	**residual**
2	59	5.3	5.7967	-0.49670
3	63	6.5	5.8731	0.62690
4	66	5.0	5.9304	-0.93040
5	69	5.6	5.9877	-0.38770
6	73	4.7	6.0641	-1.36410
7	78	5.7	6.1596	-0.45960
8	81	7.3	6.2169	1.08310
9	86	5.1	6.3124	-1.21240
10	86	5.4	6.3124	-0.91240
11	86	7.6	6.3124	1.28760
12	90	7.0	6.3888	0.61120
13	91	5.6	6.4079	-0.80790

OBS: Der er flere datapunkter end dem, der er vist på dette billede.

Residualerne kopieres nu over i GeoGebra, hvor der nu laves et QQ-plot over residualerne. Hvis punkterne på QQ-plottet tilnærmelsesvist ligger på en ret linje, er der tale om normalfordelte residualer.



Da punkterne på QQ-plottet danner en ret linje, er residualerne normalfordelte.

3.4.6 Opgave 14 - Vektorfunktioner

Opgave 14 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

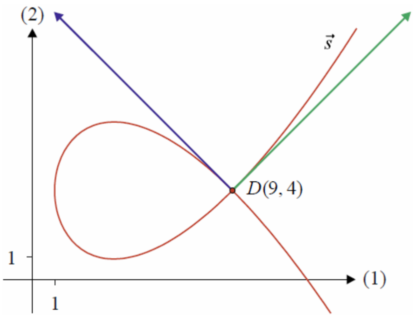
$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} 2t^2+1 \\ t^3-4t+4 \end{pmatrix}.$$

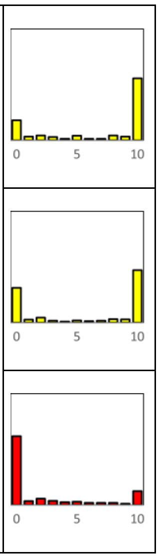
a) Gør rede for, at punktet $D(9,4)$ er et dobbeltpunkt på banekurven.

Figuren viser de to tangentvektorer til banekurven i punktet D.

b) Undersøg, om de to tangentvektorer står vinkelret på hinanden.

c) Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven, der har den korteste afstand til $O(0,0)$.





Spørgsmål 14a (pointgennemsnit: 6,9)

Generelt klarer de fleste elever dette spørgsmål fint, men figuren foranlediger mange til at tro, at det er nok at argumentere for et dobbeltpunkt ved at skrive "at det ses af figuren, at grafen skærer sig selv i punktet D". Det havde været bedre, hvis der var blevet spurgt til de to t-værdier hørende til punktet D.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 14

a

Jeg finder t værdierne til dobbeltpunktet:

$2t^2+1=9 \xrightarrow{\text{solutions for t}} 2, -2$

$t^3-4t+4=4 \xrightarrow{\text{isolate for t}} t=-2$

Derfor er t-værdierne t=2 og t=-2 i dobbeltpunktet. Jeg kan hermed finde dobbeltpunktet.

$\vec{s}(t) := \langle 2t^2+1, t^3-4t+4\rangle = t \to \langle 2t^2+1, t^3-4t+4\rangle$

$\vec{s}(-2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\vec{s}(2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

Man kan dermed se at dobbeltpunktet er (9,4), og der er gjort rede for opgaven.

Spørgsmål 14b (pointgennemsnit: 5,8)
En del elever mangler grundlæggende redskaber fra den basale vektorregning og kan derfor ikke løse opgaven ved beregning. Dette kan måske også være en forklaring på, at mange af de elever, der besvarer spørgsmålet, gør det grafisk. Her efterlyser flere censorer bedre konstruktionsbeskrivelser samt forklaringer på de anvendte redskaber til bestemmelse af vinklen mellem hastighedsvektorerne.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Da hastighedsvektoren er parallel med tangenten, så finder jeg den til t-værdierne t=2 og t=-2. Jeg bruger formlen $\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$$\vec{s}\,'(-2) = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{s}\,'(2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Jeg definere vektorene

$$\vec{a} := \langle -8, 8 \rangle = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 8, 8 \rangle = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

For at finde vinklen mellem de to, sætter jeg det ind i formlen $V = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$:

$$invCos\left(\frac{dotP(\vec{a}, \vec{b})}{len(\vec{a}) \cdot len(\vec{b})} \right) = 90.$$

Som man kan se er vinklen 90 grader, og dermed står de to tangentvektorer vinkelret på hinanden.

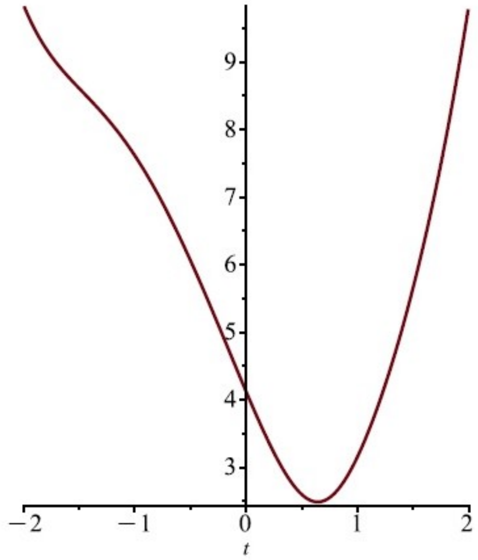
Spørgsmål 14c (pointgennemsnit: 2,3)
Dette er sættets absolut sværeste spørgsmål. Mange får 0 point, og kun meget få besvarer spørgsmålet fyldestgørende. En forklaring på dette er formentlig, at det ikke er et spørgsmål, der har været stillet ofte, og at spørgsmålet ikke kan besvares grafisk.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

$$len(\vec{s}(t)) = \sqrt{(2t^2+1)^2 + (t^3-4t+4)^2}$$

$$h(t) := \sqrt{(2t^2+1)^2 + (t^3-4t+4)^2} = t \to \sqrt{(2t^2+1)^2 + (t^3-4t+4)^2}$$

$$plot(h(t), t=-2..2, discont=true)$$



Der ses på grafen, at der er tale om et minimum. Jeg finder minimum, hvilket er der hvor afstanden er kortest:

$$h'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 0.6421325158$$

$$\vec{s}(0.6421325158) = \begin{bmatrix} 1.824668336 \\ 1.696243114 \end{bmatrix}$$

Derfor er koordinatsættet til det punkt på banekurven, der har den korteste afstand til O (1,8;1,7).

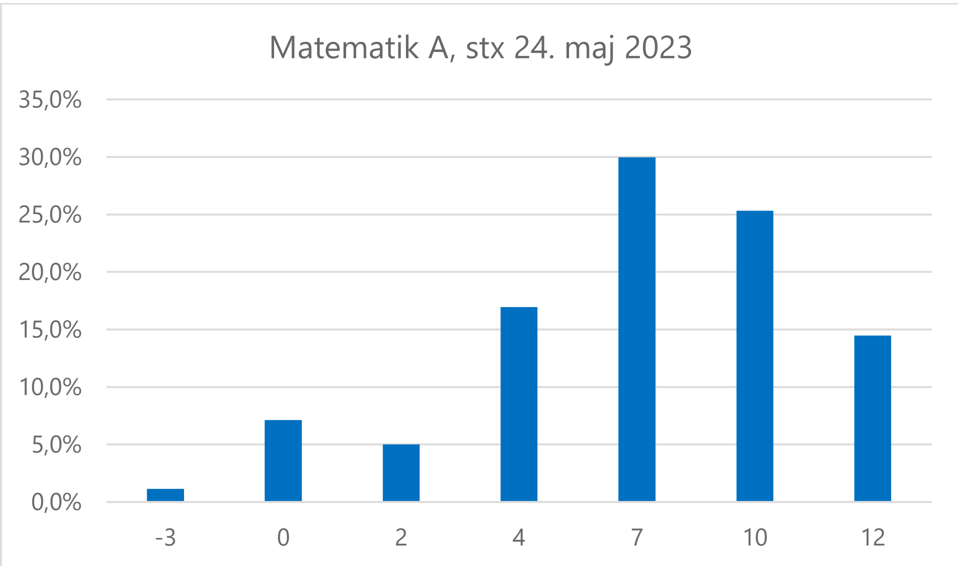
4 Stx A-niveau 24. maj 2023

Prøveresultat matematik A, stx 24. maj 2023

Antal eksaminander til prøve	**3475**
Karaktergennemsnit	**7,1**
Andel ikke-beståede	**8,3 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	1,2%	7,1%	5,0%	16,9%	30,0%	25,3%	14,5%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-21	15-89	82-106	100-146	140-196	190-231	225-250

4.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 1055 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 14 opgaver med i alt 25 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

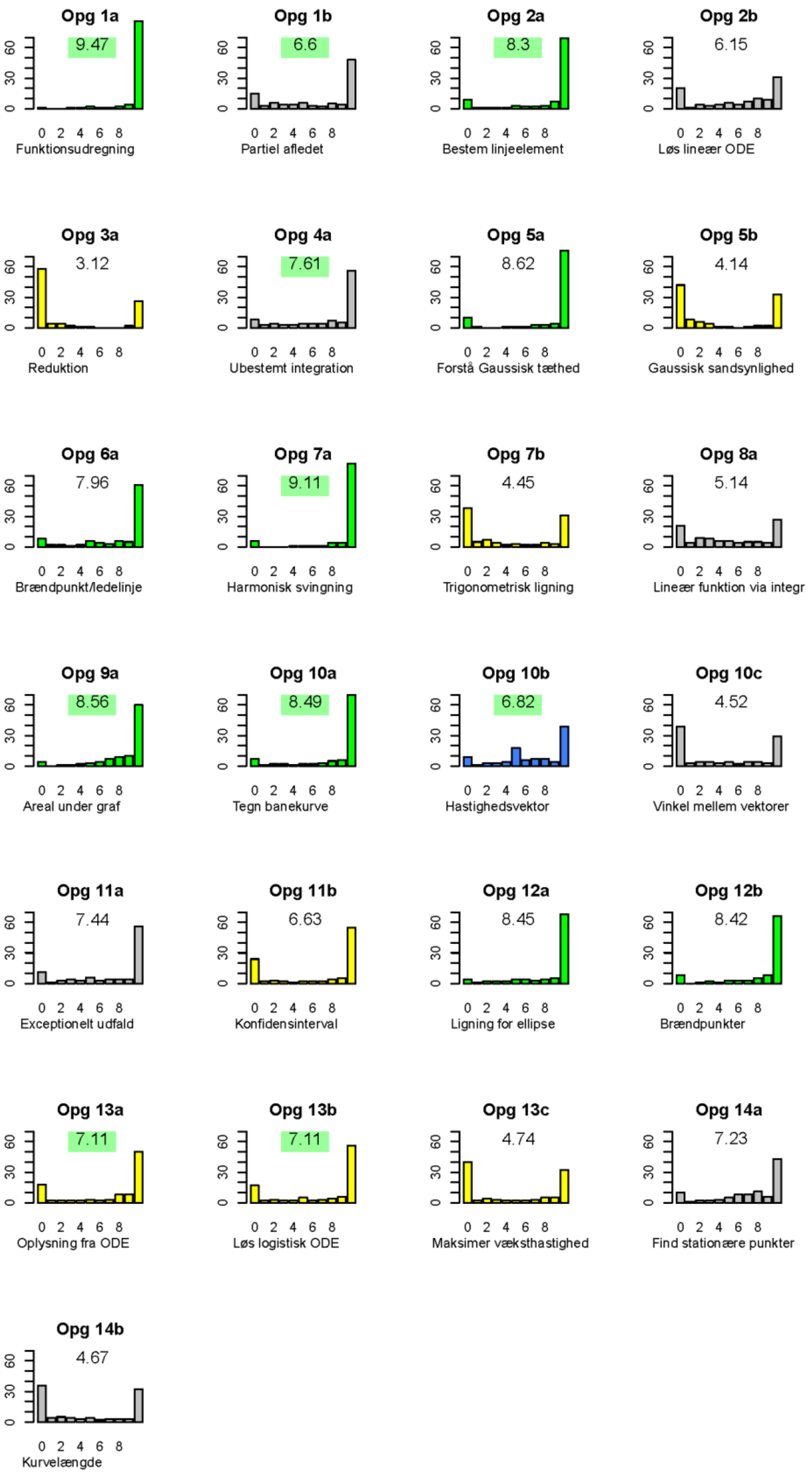
	Antal
Mindstekrav (grøn)	10
Ikke-mindstekrav (hvid)	15

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	12
Delprøve 2	13

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 12 nedenfor.

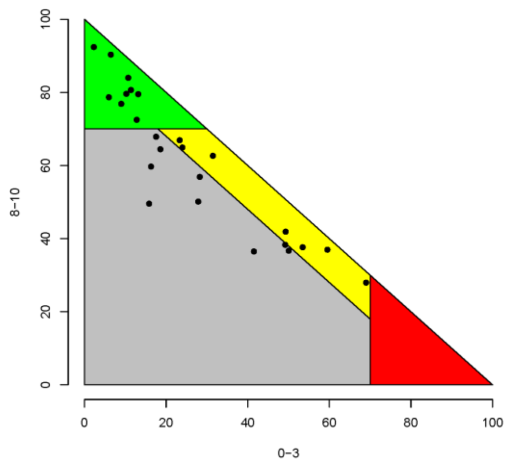


Figur 12: *Resultater for de 25 spørgsmål for STX-A 24. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
9	0	7	1	8

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

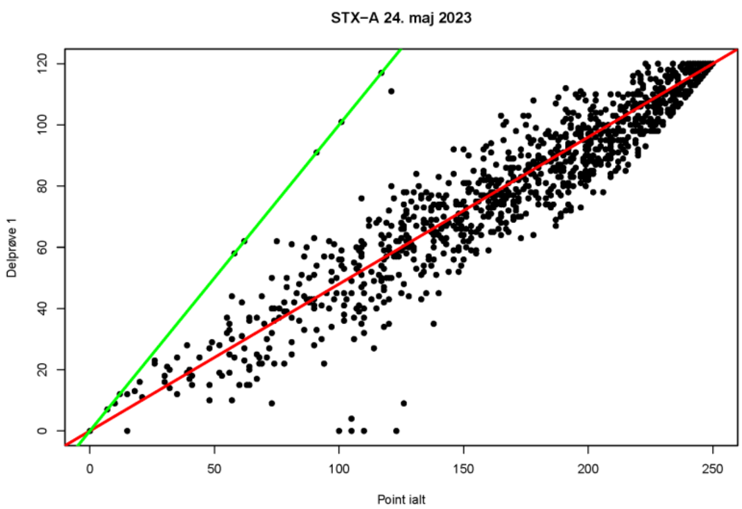


Figur 13: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-A 24. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	* Funktionsudregning	9.47
7a	* Harmonisk svingning	9.11
5a	Forstå Gaussisk tæthed	8.62
9a	* Areal under graf	8.56
10a	* Tegn banekurve	8.49
12a	Ligning for ellipse	8.45
12b	Brændpunkter	8.42
2a	* Bestem linjeelement	8.3
6a	Brændpunkt/ledelinje	7.96
4a	* Ubestemt integration	7.61
11a	Exceptionelt udfald	7.44
14a	Find stationære punkter	7.23
13a	* Oplysning fra ODE	7.11
13b	* Løs logistisk ODE	7.11
10b	* Hastighedsvektor	6.82
11b	Konfidensinterval	6.63
1b	* Partiel afledet	6.6
2b	Løs lineær ODE	6.15
8a	Lineær funktion via integral	5.14
13c	Maksimer væksthastighed	4.74
14b	Kurvelængde	4.67
10c	Vinkel mellem vektorer	4.52
7b	Trigonometrisk ligning	4.45
5b	Gaussisk sandsynlighed	4.14
3a	Reduktion	3.12

Tabel 5: *Spørgsmålene for STX-A 24. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* ***mindstekrav,*** *er farvet grønne og markeret med en stjerne.*

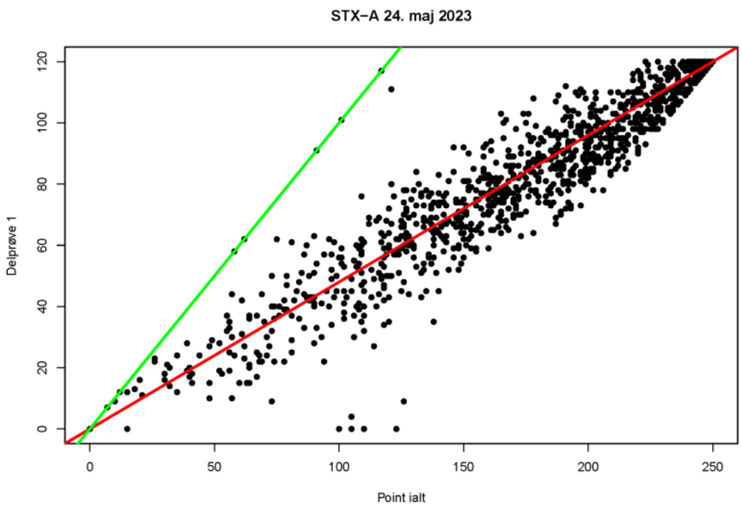


Figur 14: *STX-A 24. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	* Funktionsudregning	9.47
7a	* Harmonisk svingning	9.11
5a	* Forstå Gaussisk tæthed	8.62
9a	Areal under graf	8.56
10a	Tegn banekurve	8.49
12a	Ligning for ellipse	8.45
12b	Brændpunkter	8.42
2a	* Bestem linjeelement	8.3
6a	* Brændpunkt/ledelinje	7.96
4a	* Ubestemt integration	7.61
11a	Exceptionelt udfald	7.44
14a	Find stationære punkter	7.23
13a	Oplysning fra ODE	7.11
13b	Løs logistisk ODE	7.11
10b	Hastighedsvektor	6.82
11b	Konfidensinterval	6.63
1b	* Partiel afledet	6.6
2b	* Løs lineær ODE	6.15
8a	* Lineær funktion via integral	5.14
13c	Maksimer væksthastighed	4.74
14b	Kurvelængde	4.67
10c	Vinkel mellem vektorer	4.52
7b	* Trigonometrisk ligning	4.45
5b	* Gaussisk sandsynlighed	4.14
3a	* Reduktion	3.12

Tabel 6: *Spørgsmålene for STX-A 24. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* ***uden adgang til CAS*** *er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 15: *STX-A 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 48 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende i det store og hele får forholdsmæssigt lige mange point i de to del-prøver.

4.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx A-sættet fra den 24. maj 2023 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens delspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra afsnit 2.2.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. En del rettegrupper fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

4.3 Delprøve 1

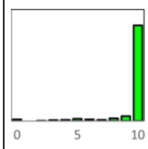
4.3.1 Opgave 1 - Funktioner af to variable

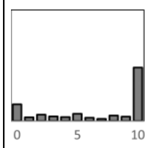
Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 \cdot y - 3y^2.$$

a) Bestem $f(3,1)$.

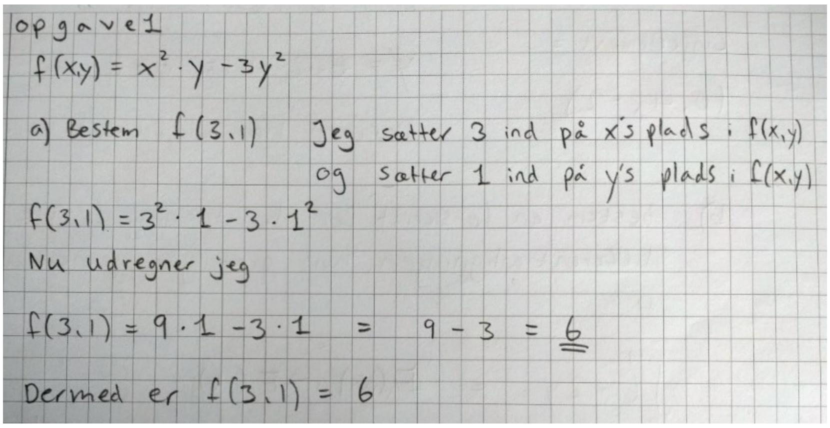
b) Bestem $f'_x(x,y)$.





Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 9,5)
Sættets første spørgsmål er tænkt som en blød opstart for eleverne, hvor de kan gå direkte i gang med et overkommeligt spørgsmål, og langt de fleste får da også 10 point. Nogle censorer efterlyser mellemregninger før fuldt point kan opnås.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



opgave 1

$f(x,y) = x^2 \cdot y - 3y^2$

a) Bestem $f(3,1)$ Jeg sætter 3 ind på x's plads i $f(x,y)$ og sætter 1 ind på y's plads i $f(x,y)$

$f(3,1) = 3^2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2$

Nu udregner jeg

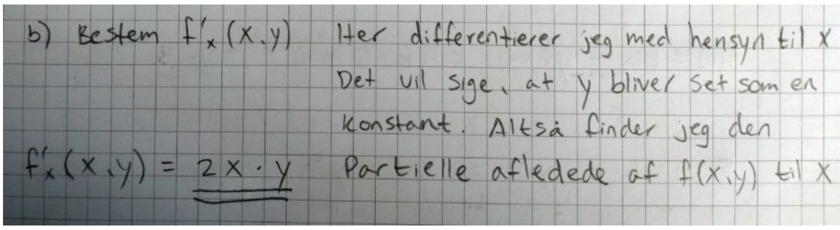
$f(3,1) = 9 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 9 - 3 = \underline{\underline{6}}$

Dermed er $f(3,1) = 6$

Spørgsmål 1b (pointgennemsnit: 6,6)

Det er tydeligt, at nogle hold har trænet en del i at differentiere partielt og på disse hold kommer de fleste fint igennem. Af typiske fejl kan nævnes, at mange elever har svært ved at få sig selv til at differentiere hele leddet $3y^2$ væk, og så efterlyser mange censorer mellemregninger før fuldt point kan opnås.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


b) Bestem $f'_x(x,y)$

Her differentierer jeg med hensyn til x
Det vil sige, at y bliver set som en
konstant. Altså finder jeg den
Partielle afledede af f(x,y) til x

$f'_x(x,y) = \underline{\underline{2x \cdot y}}$

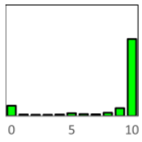
4.3.2 Opgave 2 - Differentialligninger

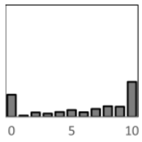
Opgave 2 Der er givet differentialligningen

$$y' = 6 - 2y .$$

a) Bestem linjeelementet i punktet $P(0, 4)$.

b) Bestem en forskrift for den løsning $f(x)$ til differentialligningen, hvis graf går gennem punktet P.





Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 8,3)
De fleste elever ved godt, hvad der forstås ved et linjeelement, og hældningsberegningen volder ikke de store problemer for de fleste.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg 2

a) Bestem linjeelementet i punktet $P(0,4)$ udfra differentialligningen $y' = 6-2y$

Linjeelement defineres ved

(x_0, y_0, y_0') , hvor $P(x_0, y_0)$ ligger på $f(x)$ og $y_0' = f'(x_0)$

Indsættelse af $P(0,4)$ i $y' = 6-2y$ for at finde y_0' da $y' = f'(x)$

$y_0' = 6 - 2 \cdot 4 = -2$

Indsættelse $P(0,4)$ og $y_0' = -2$

$(0, 4, -2)$

Linjeelementet i $P(0,4)$ er $(0,4,-2)$

Spørgsmål 2b (pointgennemsnit: 6,1)
Dette spørgsmål skal både teste elevernes evne til at anvende en løsningsformel, sætte korrekt ind i formlen og reducere. Hver for sig forholdsvis enkle delelementer, og en del får også fuldt point, men mange taber forståeligvis også point undervejs. Typiske fejl er elever der forsøger at løse differentialligning ved simpel integration, fortegnsfejl ved indsættelse og manglende afsluttende reduktion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem en forskrift for den løsning $f(x)$ til differentialligningen, hvis graf går gennem $P(0,4)$

Den generelle løsning til differentialligninger på formen $y' = b - ay$ defineres ved

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Herudfra er den generelle løsningen til $y' = 6 - 2y$

$$y = \frac{6}{2} + c \cdot e^{-2x} = 3 + c \cdot e^{-2x}$$

Den specifikke løsning finde ved indsættelse af $P(0,4)$ i den gennerelle løsning

$$4 = 3 + c \cdot e^{-2 \cdot 0} = 3 + c$$

$$\Leftrightarrow$$

$c = 1$ løsning af c

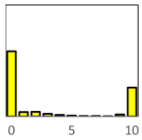
$f(x) = 3 + 1 \cdot e^{-2x} = 3 + e^{-2x}$ Indsættelse af $c = 1$

Forskriften for den specifikke løsning i $P(0,4)$ er $f(x) = 3 + e^{-2x}$

4.3.3 Opgave 3 - Reduktion

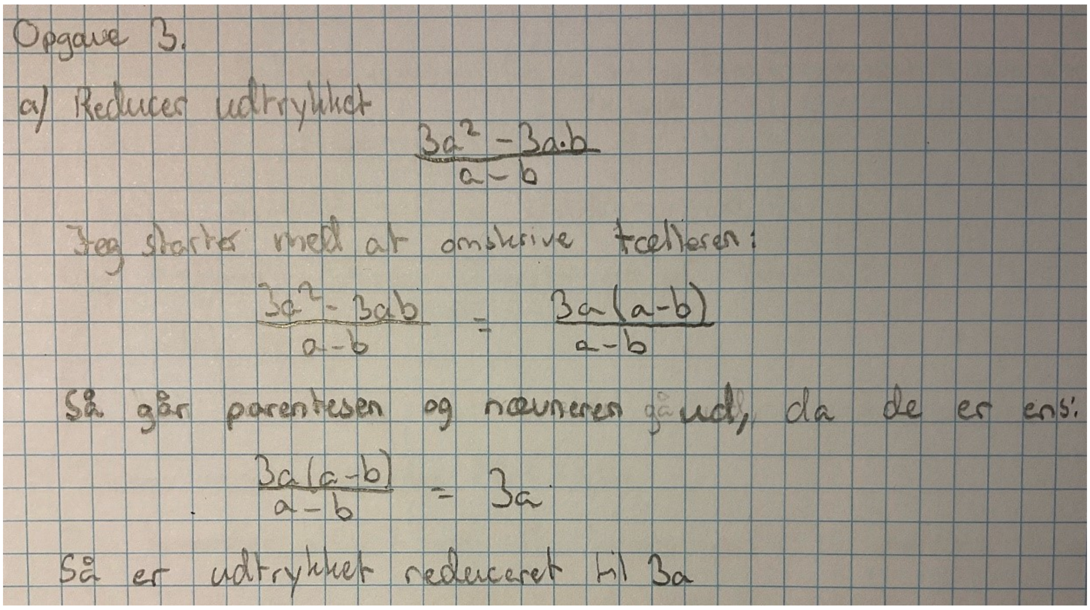
Opgave 3 a) Reducér udtrykket

$$\frac{3a^2 - 3a \cdot b}{a - b}\ .$$



Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 3,1)
Dette er sættes absolut sværeste spørgsmål at besvare for eleverne. Mellem en tredjedel og en fjerdedel af eleverne kan uden de store problemer besvare spørgsmålet, mens de fleste andre slet ikke kan. Censorkommentarerne peger på, at det på nogle hold går væsentligt bedre end på andre, og at det mere generelt kun er i 10- og 12-talsbesvarelserne, at spørgsmålet besvares korrekt. En del censorer påpeger endvidere, at det er et problem, at det er meget svært at få andet end enten 0 eller 10 point, fordi eleverne først kan komme rigtigt i gang med at reducere, hvis de kan sætte korrekt uden for parentes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 3.

a) Reducer udtrykket $\frac{3a^2-3a\cdot b}{a-b}$

Jeg starter med at omskrive tælleren:

$$\frac{3a^2-3ab}{a-b} = \frac{3a(a-b)}{a-b}$$

Så går parentesen og nævneren ud, da de er ens:

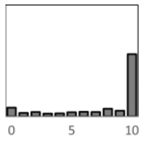
$$\frac{3a(a-b)}{a-b} = 3a$$

Så er udtrykket reduceret til 3a

4.3.4 Opgave 4 - Bestemt integral

Opgave 4 a) Bestem integralet

$$\int_0^2 \left(3x^2+4x\right)dx\,.$$



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 7,6)
Dette spørgsmål går godt for rigtig mange. Der integreres og sættes fint ind. Selv udregninger går fornuftigt for mange. Det er tydeligt, at denne spørgsmålstype er en central del af elevernes undervisning på de fleste hold.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 4

a) Jeg bestemmer det bestemte integral ved hjælp af formel 163: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(A)$:

$$\int_0^2 (3x^2+4x)\,dx = \left[3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left[x^3+2x^2\right]_0^2$$

$$= 2^3+2\cdot 2^2-(0^3+2\cdot 0^2) = 8+8 = 16$$

$$\int_0^2 (3x^2+4x)\,dx = 16$$

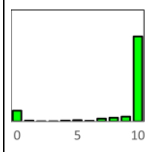
4.3.5 Opgave 5 - Normalfordelingen

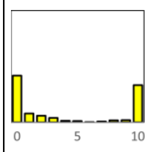
Opgave 5 Tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-10}{3}\right)^2}\ .$$

a) Bestem middelværdien og spredningen for X.

b) Bestem sandsynligheden $P(7 \leq X \leq 13)$.





Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 8,6)

På trods af at forskriften for tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel ikke er helt simpel, viser elevbesvarelserne, at de fleste elever enten har et fint kendskab til funktionsforskriften, eller er robuste nok til selv i eksamenssituationen at slå op i formelsamlingen og aflæse korrekt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5 Tæthedsfunktionen for en normal-fordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{3}\right)^2}$$

a) Bestem middelværdi og spredning for X

Tæthedsfunktioner for normal fordelte stokastiske variable er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

hvor σ er spredning og μ er middelværdi.

Middelværdien og spredningen i X's tæthedsfunktions forskrift aflæses til hhv. 10 og 3.

Dvs. middelværdien er 10 og spredningen 3.

Spørgsmål 5b (pointgennemsnit: 4,1)
Censorkommentarerne tyder på, at besvarelserne af dette spørgsmål er meget holdafhængigt. Rigtig mange elever forsøger at anvende formler fra formelsamlingen, der knytter sig til normalfordelingens fordelingsfunktion. Det er i lyset af dette nok en god idé at påpege overfor sine elever, at disse formler fra formelsamlingen højst kan anvendes som dokumentation i forbindelse med mellemregninger.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

5b Bestem $P(7 \leq X \leq 13)$.

Det ses, at dette kan omskrives til $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)$, da $\mu-\sigma=7$ og $\mu+\sigma=13$.

Det vides også, at $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ svarer til 68,27 % af udfaldene.

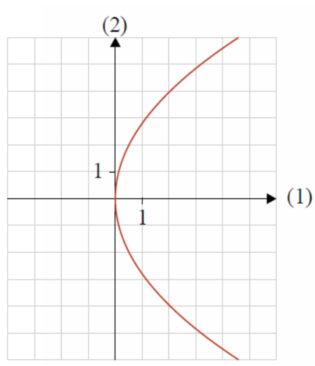
Hvorfor $P(7 \leq 10 \leq 13) = 0.6827 = 68,27\%$

Dvs. $P(7 \leq X \leq 13) = 68,27\%$

4.3.6 Opgave 6 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

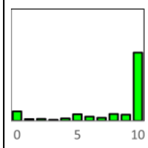
Opgave 6

Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for parablen med ligningen $y^2 = 8x$.

a) Afsæt brændpunktet, og tegn ledelinjen. Brug bilaget.



Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 8,0)

Mange elever har fået styr på det nuværende forberedelsesmateriale, og eleverne klarer dette spørgsmål mindst lige så godt som de fleste mindstekravsopgaver. Som spørgsmålet er formuleret, er der ikke de store krav til begrundelser, men flere censorer forventer dog, at de anvendte ligninger for brændpunkt og ledelinje inddrages, før fuldt point kan opnås. Bemærk at formuleringer som "Benyt bilaget" eller "Brug bilaget" i spørgsmålsformuleringer ikke er en skærpelse af de generelle krav, der står oplistet på opgavesættenes første side. I princippet kan der gives fuld point for en meget nøje beskrivelse af den fremgangsmåde, hvormed bilaget anvendes - uden at dette vedlægges, men sandsynligheden for, at en sådan beskrivelse er fyldestgørende, er ikke stor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg. 6

a) Jeg bestemmer koordinatsættet for brændpunktet F med formel F(10):

$F(\frac{1}{4}a, 0)$

$F(\frac{1}{4}\cdot 8, 0) = F(2,0)$

Jeg indtegner punktet:

Se bilag 'Opgave 6'

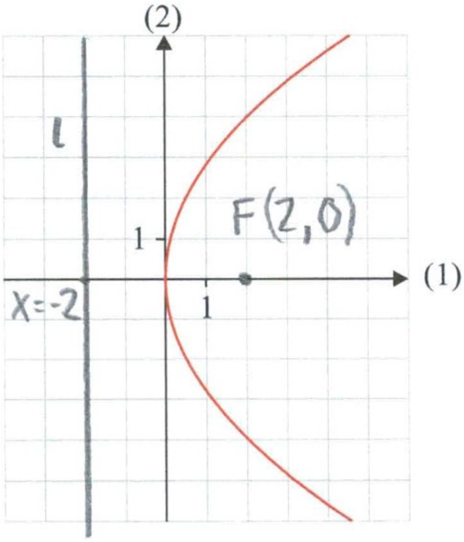
Jeg beregner x for ledelinjen med formel F(9):

$l: x = -\frac{1}{4}\cdot a = -\frac{1}{4}\cdot 8 = -2$

$x = -2$

Jeg indtegner ledelinjen:

Se bilag 'Opgave 6'



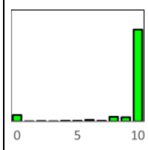
4.3.7 Opgave 7 - Harmoniske svingninger

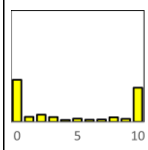
Opgave 7 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(t) = 2 \cdot \sin(3t) + 4 .$$

a) Bestem amplituden.

b) Har ligningen $f(t) = 1$ en løsning? Begrund svaret.





Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 9,1)

Dette spørgsmål går næsten for godt, idet stort set alle får 10 point. Spørgsmålet bidrager således stort set ikke i den samlede differentiering af elevernes besvarelser.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 7

a) Af formel 127 kan funktionens amplitude aflæses direkte af funktionen til at være 2.

Så amplituden for $f(t)$ er $A=2$

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 4,5)

Dette spørgsmål udfordrer en del elever - formentlig fordi det ikke er et typisk spørgsmål inden for emnet, og fordi der spørges til en *begrundelse*. Spørgsmålet viser, at det forventes af eleverne, at de kan mere end blot *aflæse* parametre i emnet harmoniske svingninger.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Idet man husker på enhedscirklen, så ved man at $\sin(x)$ altid vil ligge i intervallet $[-1;1]$. Derfor vil det første led altid ligge i intervallet $2 \cdot \sin(3t) = [-2;2]$. Idet det første led lavest vil kunne give -2 og $-2+4=2$, så vil $f(t)=1$ IKKE have nogen løsning.

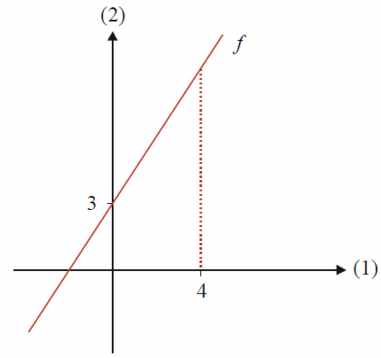
4.3.8 Opgave 8 - Integralregning

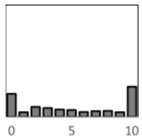
Opgave 8 Om en lineær funktion f oplyses det, at

$$f(0)=3 \text{ og } \int_0^4 f(x)dx = 24 .$$

Figuren viser grafen for f.

a) Bestem en forskrift for f.





Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 5,1)
Pointgennemsnittet for denne opgave ender med at være forholdsvist højt, fordi mange elever kan bestemme konstantleddet for den lineære udvikling. Af de elever der kommer videre i besvarelsen, vælger de fleste at løse opgaven geometrisk ved at opdele figuren i en retvinklet trekant og et rektangel.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

$f(0)=3$ og $\int_0^4 f(x)\,dx = 24$

a)

Da $f(x)$ er en lineær funktion kan den skrives på formen

$$f(x) = ax + b$$

Da $f(0)=3$, betyder det, at b, skæring med y-aksen er 3. Dette giver ligningen

$$f(x) = ax + 3$$

Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$

Jeg bestemmer $F(x)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int ax + 3 \,dx$$

$$F(x) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 3x + c$$

$\int_0^4 f(x)\,dx = 24$ kan skrives som $F(4) - F(0) = 24$

Dette betyder, at

$$\frac{a}{2} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + c - \left(\frac{a}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + c\right) = 24$$

$$\frac{16a}{2} + 12 = 24$$

$$8a = 12$$

$$a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Forskriften for f er hermed $f(x) = 1{,}5x + 3$

4.4 Delprøve 2

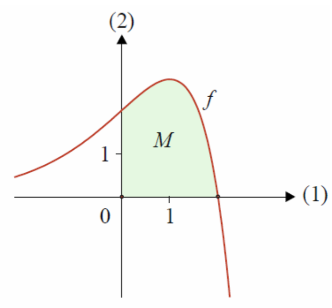
4.4.1 Opgave 9 - Integralregning

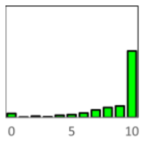
Opgave 9 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = (2-x)\cdot \mathrm{e}^x .$$

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med første- og andenaksen et område M.

a) Bestem arealet af M.





Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 8,6)
Mange elever besvarer dette spørgsmål korrekt. Figuren er naturligvis med for at gøre opgaven mere tilgængelig som opstarts- og mindstekravsopgave, men det har den ulempe, at en del elever ikke bestemmer den øvre grænse enten ved beregning eller grafisk ved konstruktion, men i stedet aflæser af figuren.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Funktionen f er givet ved forskriften $f(x)=(2-x)\cdot e^{x}$. Jeg definerer funktionen:

$f(x):=(2-x)\cdot e^{x}$ ▸ Udført

Det oplyses, at f sammen med første- og andenaksen i første kvadrant afgrænser et område M.

Jeg undersøger nu, hvor f skærer første aksen ved at løse ligningen f(x)=0:

solve$(f(x)=0,x)$ ▸ $x=2$

Eftersom det er i første kvardrant og med første og anden aksen er den nedre grænseværdi 0, mens den øvre grænseværdi er 2. Det er nu muligt at bestemme arealet af M med følgende formel:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

hvor:

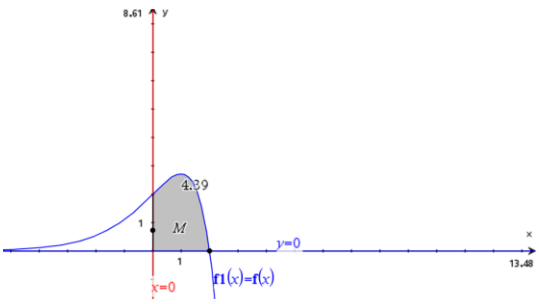
- a er den nedre grænseværdi, som er 0

- b er den øvre grænseværdi, som er 2

Jeg indsætter værdierne og bestemmer det bestemte integrale med grænseværdien 0 og 2, således jeg finder arealet af M:

$\int_0^2 f(x)\, dx$ ▸ 4.38906

Derved er arealet af M bestemt til at være 4,39.



4.4.2 Opgave 10 - Vektorfunktioner

Opgave 10 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

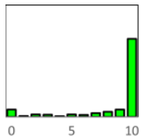
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(2t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

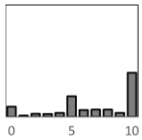
a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

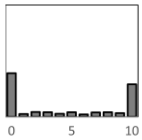
b) Bestem hastighedsvektoren

$$\vec{v} = \vec{s}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) .$$

c) Bestem den spidse vinkel mellem $\vec{v}$ og vandret.







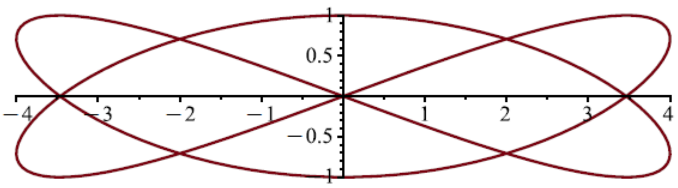
Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 8,5)
Spørgsmålet går godt for de fleste. En del Nspire-brugere ved ikke, hvordan man ændrer *tstep*-værdien, hvilket gør, at banekurven ikke "lukkes".

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10

a) Banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sin(2\,t) \\ \cos(3\,t) \end{pmatrix}$ tegnes

Denne tegnes for parameterværdier i det oplyste interval $[0;2\,\pi]$ med kommandoen *vektorPlot*:
$vektorPlot(\langle 4 \cdot \sin(2\,t), \cos(3\,t) \rangle, t = 0..2\,\pi)$



Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 6,8)
Rigtig mange elever overser, at det ikke kun er forskriften for hastighedsvektorfunktionen, der skal bestemmes, men $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, og en del elever får ikke indstillet deres CAS-værktøj til at regne i radianer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Hastighedsvektoren $\vec{v} = \vec{s}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bestemmes:

Først bestemmes hastighedsvektoren for alle parameterværdier *t* ved at differentiere udtrykket for de to vektorkoordinater via kommandoen *diff*:

$$\vec{s}\,'(t) = \langle diff(4\cdot\sin(2\,t), t), diff(\cos(3\,t), t)\rangle = \begin{bmatrix} 8\cos(2\,t) \\ -3\sin(3\,t) \end{bmatrix}$$

Herefter bestemmes hastighedsvektoren for parameterværdien $\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{v} = \vec{s}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle 8\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right), -3\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hastighedsvektoren bestemmes altså til $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Spørgsmål 10c (pointgennemsnit: 4,5)
Der er flere ting, der har forvirret eleverne i dette spørgsmål. En del elever ved ikke, hvad der menes med "vinkel mellem $\vec{v}$ og vandret" og begynder i stedet at bestemme, hvor banekurven har vandret tangent. Andre finder vinklen mellem hastighedsvektorerne i et selvvalgt dobbeltpunkt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Den spidse vinkel mellem $\vec{v}$ og vandret bestemmes:

Denne kan bestemmes som vinklen mellem $\vec{v}$ og den vandrette vektor $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vinklen mellem vektorerne er givet ved følgende sammenhæng:

$$Cos(v) = \frac{\vec{i}\,.\vec{v}}{|\vec{i}|\cdot|\vec{v}|}$$

Vinklen *v* mellem de to vektorer kan nu bestemmes ved at løse ligningen via kommandoen *solve*, idet længden af vektorerne findes med kommandoen *len*:

$$solve\left(Cos(v) = \frac{\langle 1, 0\rangle.\langle -8, 3\rangle}{len(\langle 1, 0\rangle)\cdot len(\langle -8, 3\rangle)}, v\right) = 159.4439548$$

Den spidse vinkel kan nu bestemmes:
$180 - 159.4439548 = 20.5560452$

Den spidse vinkel mellem $\vec{v}$ og vandret bestemmes altså til 20,56°

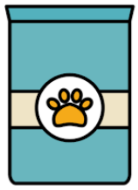
4.4.3 Opgave 11 - Normalfordelingen

Opgave 11 Et firma producerer hundefoder, der pakkes i sække.
Vægten af en sæk hundefoder kan antages at være normalfordelt med middelværdi 8 kg og spredning 0,07 kg.
En bestemt sæk med hundefoder fra firmaet vejer 7,75 kg.

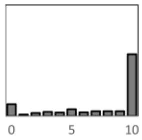
a) Afgør, om vægten af denne sæk er et exceptionelt udfald.

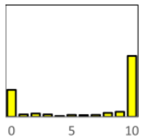
Firmaet har vedtaget en standard om, at mindst 90 % af sækkene skal have en vægt på 7,90 kg eller derover.

b) Afgør, om firmaet lever op til denne standard.



Billedkilde: VectorStock





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 7,4)
Dette spørgsmål går godt for de fleste. En typisk fejl er, at en del elever tror, at grænserne for exceptionelle udfald er 2 gange spredningen fra middelværdien.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Mangler

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 6,6)
Over halvdelen af eleverne får fuldt point for dette spørgsmål, hvilket må betyde, at disse elever både kan anvende normalfordelingen i en lidt kompliceret kontekst samt anvende deres CAS-program korrekt. En del censorer efterlyser, at eleverne bliver bedre til at knytte kommentarer til, hvad det er de udregner i deres CAS-værktøj.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Mangler

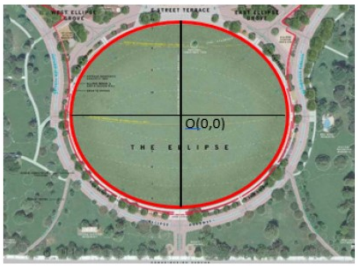
4.4.4 Opgave 12 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

Opgave 12 Figuren viser parken The Ellipse nær Det Hvide Hus i Washington DC.
Parken har i en model form som en ellipse med centrum i $O(0,0)$, storakse 322 meter og lilleakse 275 meter.

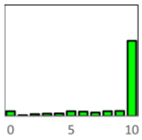
a) Bestem en ligning for denne ellipse.

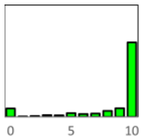
Ifølge Wikipedia er afstanden mellem brændpunkterne for ellipsen 168 meter.

b) Undersøg ved beregning, om afstanden mellem brændpunkterne i modellen svarer til denne oplysning.



Billedkilde: Rogersarchitects.com





Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 8,4)
Mange elever har fået fint styr på forberedelsesmaterialet. Det eneste, der driller nogle elever lidt, er, at det er de halve akselængder, der skal indsættes i ellipsens ligning.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg bestemmer en ligning for elipsen ved at benytte mig af ligningen for en elipse på normalform med centrum i (0,0).

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hvor a er den halve storakse og b er den halve lilleakse.

Storaksen og lilleaksen deles begge med 2 og indsættes på henholdsvis a og bs plads

$$\frac{x^2}{\left(\frac{322}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{275}{2}\right)^2}=1$$

$$=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{161^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{137,5^2}}=\mathbf{1}$$

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 8,4)
Også dette spørgsmål i forberedelsesmaterialet går godt for de fleste. Eleverne konkluderer lidt forskelligt i forhold til, hvorvidt Wikipedias oplysninger stemmer overens med modellen - meget få udregner den relative afvigelse - hvilket de fleste censorer heller ikke forventer for at fuldt point kan opnås.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg skal bestemme afstanden mellem de to brændepunkter på elipsen. Dette gøres ved at trække de 2 x-koordinater fra brændpunkterne fra hinanden, da de begge ligger placeret på førsteaksen. X-koordinaten for de to brændepunkter er $\sqrt{a^2 - b^2}$ og $-\sqrt{a^2 - b^2}$, hvor a er den halve storakse og b er den halve lilleakse. Halvakserne indsættes i formlerne for x-koordinaterne, og herefter beregnes udtrykkene.

Disse beregnes vha. wordmat

$$\sqrt{161^2 - 137{,}5^2} = 83{,}7541$$

$$-\sqrt{161^2 - 137{,}5^2} \approx -83{,}7541$$

Så trækkes de to koordinater fra hinanden

$$83{,}7541 - (-83{,}7541) = 167{,}582 \approx 168$$

Hvis afstanden er rundet op til et heltal, passer oplysningen på wikipedia, om at afstanden mellem de to brændepunkter er 168m

4.4.5 Opgave 13 - Differentialligninger

Opgave 13 En bestemt kyllings vægt kan i de første fire uger af dens levetid beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = m \cdot (0{,}156 - 8{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot m) \,,$$

hvor $m(t)$ er kyllingens vægt i gram, når den er t døgn gammel.

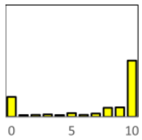
Efter 10 døgn vejer kyllingen 254 gram.

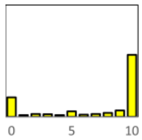
a) Med hvilken hastighed vokser kyllingens vægt efter 10 døgn?

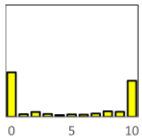
b) Bestem en forskrift for m.

c) Hvor gammel er kyllingen, når væksthastigheden af vægten er størst?

Billedkilde: Garden-da







Spørgsmål 13a (pointgennemsnit: 7,1)

Som altid synes en (mindre) del af eleverne, at emnet differentialligninger er uoverkommeligt svært, og de kommer aldrig i gang med at besvare dette ellers meget typiske spørgsmål i emnet. De fleste andre elever kommer enten helt i mål, eller taber et par point undervejs f.eks. pga. manglende konklusion i kontekst eller manglende enhed.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Bestemmelse af, med hvilken hastighed kyllingens vægt vokser efter 10 døgn.

$\frac{dm}{dt}$ beskriver hastigheden hvormed kyllingens vægt vokser. m(t) betegner kyllingens vægt til tidspunktet t. Dermed indsættes 254 gram på pladsen for $m(t)$ i den givne differentialligning:

$$\frac{dm}{dt} = 254 \cdot (0.156 - 8.6 \cdot 10^{-5} \cdot 254) = 34.07562400$$

Således bestemmes hastigheden, hvormed kyllingens vægt vokser efter 10 døgn til 34.077 gram pr. døgn.

Spørgsmål 13b (pointgennemsnit: 7,1)
Som nævnt i forbindelse med foregående spørgsmål, er der altid en ikke ubetydelig del af eleverne, der har svært ved emnet differentialligninger, og derfor heller ikke kan besvare dette typiske spørgsmål i emnet. Nogle censorer efterlyser, at eleverne bliver bedre til at knytte kommentarer til, hvad det er de udregner i deres CAS-værktøj.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestemmelse af en forskrift for m.

Til bestemmelse af en forskrift for $m(t)$ bestemmes en partikulær løsning, idet bibetingelsen $m(10) = 254$ er oplyst:

$dsolve([m'(t) = m(t) \cdot (0.156 - 8.6 \cdot 10^{-5} \cdot m(t)), m(10) = 254]) =$

$$m(t) = \frac{9906000}{5461 + 33539\, e^{-\frac{39\,t}{250}}\, e^{\frac{39}{25}}}$$

Matematisk set er defintionsmængden givet ved følgende:
$Dm(m) \in \mathbb{R}$
Dette betyder dog ikke, at modellen er god til at beskrive data for alle disse t-værdier. Ud fra opgavens oplysninger kunne det tyde på, at modellen ikke er god til at beskrive data for alle disse t-værdier, idet det oplyses, at modellen beskriver en bestemt kyllings vægt i de første fire uger af dens leve tid. Dermed kan definitionsmængden indskrænkes til at være givet ved følgende, idet der er $4 \cdot 7 = 28$ døgn på 4 uger:
$Dm(m) = \{0 \leq x \leq 28\}$

Således bestemmes en forskrift for m til $\boldsymbol{m(t) = \frac{9906000}{5461 + 33539\, e^{-\frac{39\,t}{250}}\, e^{\frac{39}{25}}}, 0 \leq x \leq 28}$

Spørgsmål 13c (pointgennemsnit: 4,7)
En del elever har enten glemt, hvordan dette ellers typiske spørgsmål i logistisk vækst skal besvares eller vælger bevidst at løse ligningen $m''(t) = 0$. Blandt disse glemmer en del at argumentere for, at den fundne t-værdi giver anledning til et maksimum. En typisk fejl, blandt dem der løser ligningen $m(t) = \frac{M}{2}$, er, at M ikke identificeres korrekt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Bestemmelse af hvor gammel kyllingen er, når væksthastigheden af vægten er størst.

Den givne differentialligning er på formen som den logistiske ligning $y' = y \cdot (b - a \cdot y)$. Væksthastigheden y' er dermed maksimal når $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}$, så løsninger $y = m(t)$ vokser mest når $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}$, som er halvdelen af den øvre grænse for m(t). I denne model er $\frac{b}{a} = \frac{0.156}{8.6 \cdot 10^{-5}} = 1813.953488$ den øvre grænse.

Funktionsværdien m(t), hvor væksthastigheden af vægten er størst bestemmes således:
$m = \frac{1}{2} \cdot 1813.953488 = 906.9767440$

Denne værdi for vægten af kyllingen indsættes således i den fundne forskrift for m i opgave b, hvorefter der isoleres mht. tiden t:

$$906.9767440 = \frac{9906000}{5461 + 33539\, e^{-\frac{39\,t}{250}}\, e^{\frac{39}{25}}} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 21.63510908]]$$

Således er kyllingen 21.635 døgn gammel, når væksthastigheden er størst.

4.4.6 Opgave 14 - Funktioner af to variable

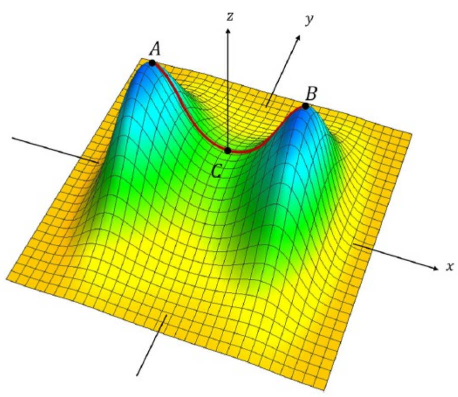
Opgave 14 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

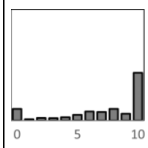
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{1-(x^2-1)^2-y^2}.$$

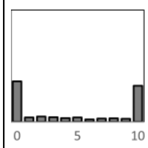
Funktionen f har tre stationære punkter A, B og C.

a) Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A, B og C.

b) Bestem længden af snitkurven fra punktet A til punktet B.







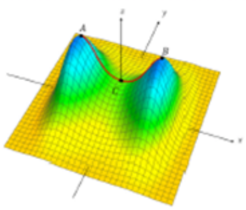
Spørgsmål 14a (pointgennemsnit: 7,2)

Endnu et spørgsmål som går godt for mange elever. På en del hold følger eleverne en fast skabelon i deres besvarelser, og de fleste kommer frem til de korrekte x- og y-værdier, men en del får ikke udregnet de tilhørende z-koordinater - jf. Vejledning til læreplan i Matematik A, stx. En mindre gennemgående fejl er, at der byttes rundt på navnene på de tre punkter.

Et eksempel på en elvbesvarelse:

Opgave 14

restart : *with*(*Gym*) :



Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$f(x,y) := \mathrm{e}^{1-(x^2-1)^2-y^2}$:

Funktionen f har tre stationærepunkter A, B og C.

a. Her bestemmes koordinatsættet til hvert af punkterne A, B og C.

En funktion af to variable har stationært punkt når

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jeg løser overstående udtryk med maple, for at finde koordinatsættende,

$solve\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 0\right], [x,y]\right) =$

$[[x=0, y=0], [x=1, y=0], [x=-1, y=0]]$

Jeg har nu bestemt koordinatsættende til de tre punkter, nu vil jeg vurderer hvilket der tilhører hvilket.

På figuren ses det at punkt C ligger mellem A og B, og må dermed have koordinaterne $x = y = 0$.
Punkt B ligger positivt forskudt af x-aksen og må have koordinaterne, $x = 1$ og $y = 0$.
Punkt A ligger negativt forskudt af x-aksen og må have koordinaterne, $x = -1$ og $y = 0$.

Jeg opskriver nu koordinaterne,
$A(-1, 0, f(-1, 0)) = A(-1, 0, \mathrm{e})$
$B(1, 0, f(1, 0)) = B(1, 0, \mathrm{e})$
$C(0, 0, f(0, 0)) = C(0, 0, 1)$

Spørgsmål 14b (pointgennemsnit: 4,7)

Et svært spørgsmål for mange. Nogle hold har øvet sig i denne type spørgsmål, og de klarer sig godt, mens andre slet ikke kan komme i gang. Dem, der prøver at besvare spørgsmålet grafisk, får alle forkerte svar, idet det f.eks. er den korteste vej mellem de to punkter, der så bestemmes og ikke længden af snitkurven.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b. Her bestemmes længden af snitkurven fra punktet A til punktet B.

Snitkurven fra A til B går i x-retningen, og er dermed skal y holdes konstant. Ud fra punkternes koordinater kan det ses at snitkurven går i y = 0.

Jeg opstiller en ny funktion for snitkurven,

$$f(x, y=0) = g(x) := e^{1-(x^2-1)^2-0^2}:$$

Det vides at da snitkurven går i x-retning, vil længden går fra de to punktes x-koordinater. Så fra -1 til 1.
Jeg benytter nedstående formel, formel 171, til at beregne længden af snitkurven fra A til B,

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Hvor a = -1 og b = 1

Jeg indsætter og beregner,

$$L := \int_{-1}^{1.} \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx = 4.14$$

Længden af snitkurven fra punktet A til punktet B er beregnet til $L = 4.14$.

5 Opsamling på elevbesvarelserne af stx A-sættene

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i stx A-sættene fremhæves følgende:

Nogle bestemte spørgsmålstyper i A-sættene falder generelt lette ud. De dækker i alt 7 delspørgsmål i 22. maj-sættet og 9 delspørgsmål i 24. maj-sættet.

I 1. delprøve er det især følgende tre spørgsmålstyper, hvor de fleste elever henter mange point:

- Indsættelsesspørgsmål med efterfølgende simpel udregning,
- spørgsmål, der kan løses direkte ved opslag i formelsamlingen, og til en vis grad
- spørgsmål i forberedelsesmaterialet.

I delprøve 2 er det

- tegn graf-spørgsmål,
- typespørgsmål i bestemte integraler og
- spørgsmål i forberedelsesmaterialet.

Det er glædeligt, at langt hovedparten af stx A-eleverne høster disse "lavthængende frugter", og herunder også, at mange elever og hold henter points i forberedelsesmaterialet.

Det noteres også, at opgaver i emnet differentialligninger går bedre i år end ved sommerterminen 2022. Det laveste pointtal i et spørgsmål i dette emne er 4,7 (stx A 24. maj spg. 13c), og ellers ligger de fleste gennemsnitspoint på 5-6 point, hvilket er en klar forbedring i forhold til 2022.

De fleste elevers færdigheder inden for simpel algebra fortsat er mangelfulde. Elevernes besvarelse af spørgsmål 3a) i 24. maj-sættet viser, hvad de fleste undervisere er fuldt ud klar over – nemlig at man end ikke på stx A-niveau kan tage for givet, at eleverne kan udføre grundlæggende algebraiske manipulationer. Lignende spørgsmål i reduktion har været stillet gentagne gange i de seneste eksamenssæt.

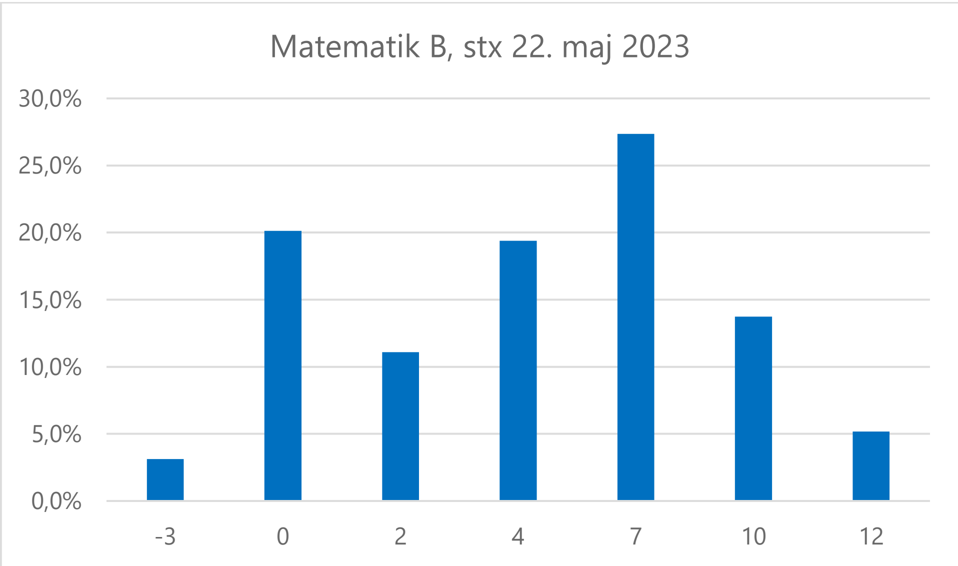
6 Stx B-niveau 22. maj 2023

Prøveresultat matematik B, stx 22. maj 2023

Antal eksaminander til prøve	**830**
Karaktergennemsnit	**4,8**
Andel ikke-beståede	**23,3 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	3,1%	20,1%	11,1%	19,4%	27,3%	13,7%	5,2%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger, jf omtale i afsnit 1.5.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-61	56-75	70-107	102-147	142-175	170-200

6.1 Klassificering af underspørgsmål

De er 749 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 11 opgaver med i alt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

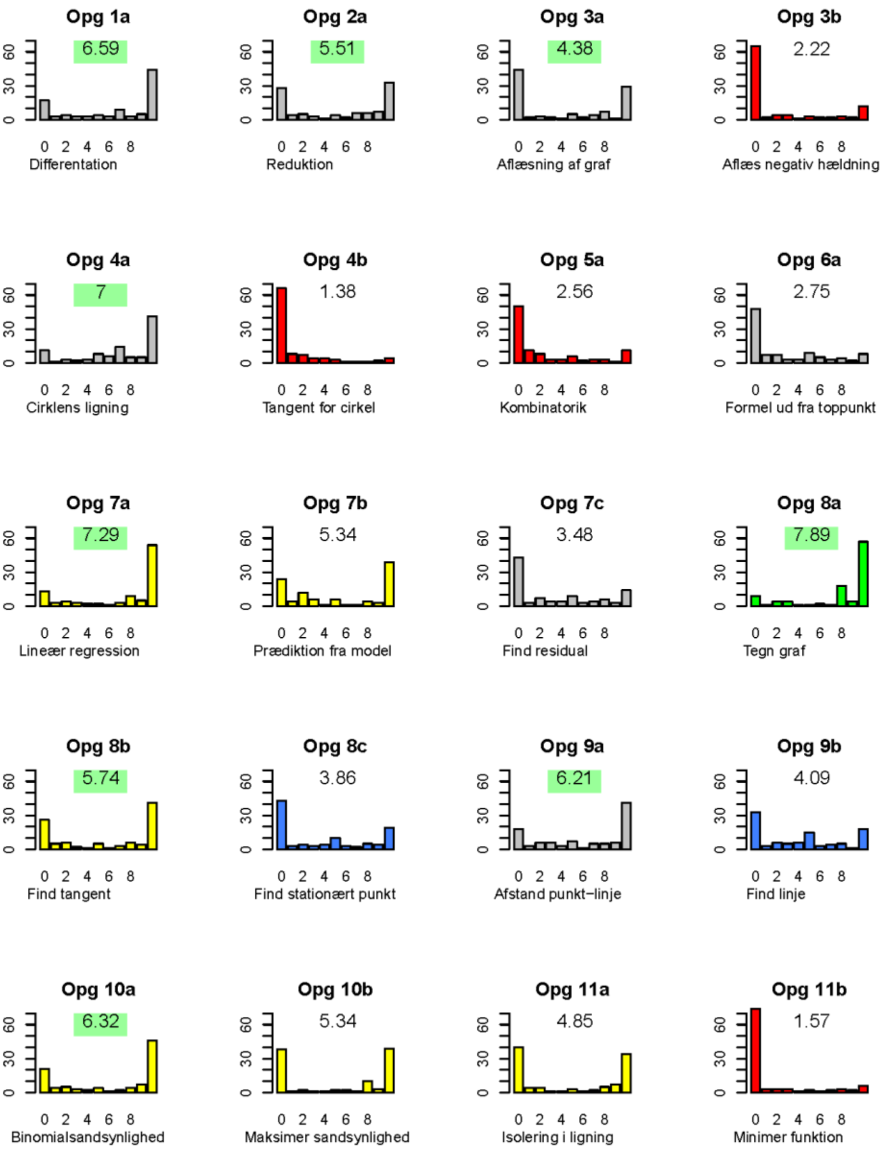
	Antal
Mindstekrav (grøn)	9
Ikke-mindstekrav (hvid)	11

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 16 nedenfor.

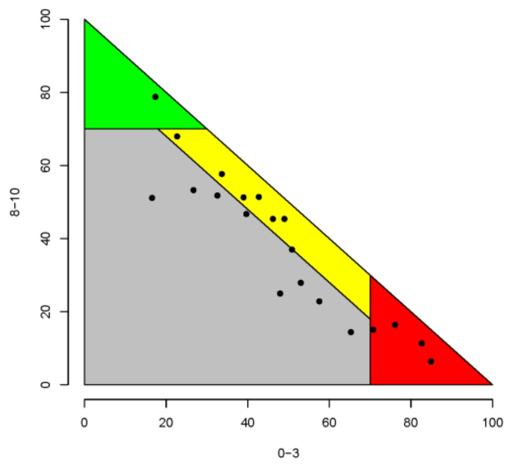


Figur 16: *Resultater for de 20 spørgsmål for STX-B 22. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
1	4	2	6	7

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

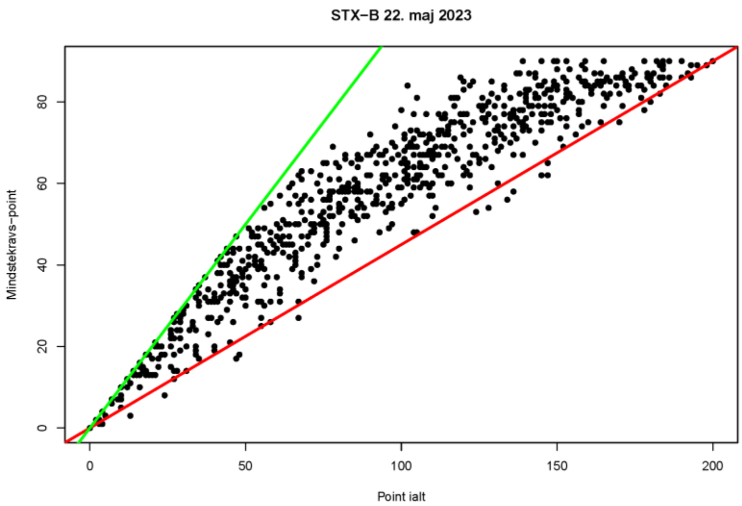


Figur 17: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-B 22. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
8a	* Tegn graf	7.89
7a	* Lineær regression	7.29
4a	* Cirklens ligning	7
1a	* Differentation	6.59
10a	* Binomialsandsynlighed	6.32
9a	* Afstand punkt-linje	6.21
8b	* Find tangent	5.74
2a	* Reduktion	5.51
7b	Prædiktion fra model	5.34
10b	Maksimer sandsynlighed	5.34
11a	Isolering i ligning	4.85
3a	* Aflæsning af graf	4.38
9b	Find linje	4.09
8c	Find stationært punkt	3.86
7c	Find residual	3.48
6a	Formel ud fra toppunkt	2.75
5a	Kombinatorik	2.56
3b	Aflæs negativ hældning	2.22
11b	Minimer funktion	1.57
4b	Tangent for cirkel	1.38

Tabel 7: *Spørgsmålene for STX-B 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* ***mindstekrav,*** *er farvet grønne og markeret med en stjerne.*



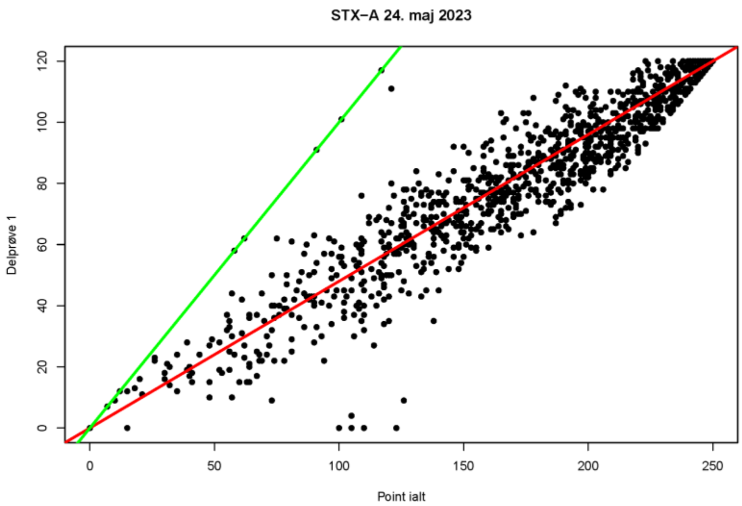
Figur 18: *STX-B 22. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 45 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får markant mere ud af mindstekravsopgaverne end af de øvrige. De svage studerende får næsten udelukkende point her. Men de bedre studerende får dog en del point i de øvrige opgaver før de sidste mindstekravspoint udløses.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
8a	Tegn graf	7.89
7a	Lineær regression	7.29
4a	* Cirklens ligning	7
1a	* Differentation	6.59
10a	Binomialsandsynlighed	6.32
9a	Afstand punkt-linje	6.21
8b	Find tangent	5.74
2a	* Reduktion	5.51
7b	Prædiktion fra model	5.34
10b	Maksimer sandsynlighed	5.34
11a	Isolering i ligning	4.85
3a	* Aflæsning af graf	4.38
9b	Find linje	4.09
8c	Find stationært punkt	3.86
7c	Find residual	3.48
6a	* Formel ud fra toppunkt	2.75
5a	* Kombinatorik	2.56
3b	* Aflæs negativ hældning	2.22
11b	Minimer funktion	1.57
4b	* Tangent for cirkel	1.38

Tabel 8: *Spørgsmålene for STX-B 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* ***uden adgang til CAS*** *er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 19: *STX-B 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får en del mere ud af delprøve 2 end af delprøve 1, uden at forskellen dog er voldsom.

6.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

Da antallet af eksaminander, der gik op til denne prøve, er relativt lavt, er grundlaget for at kommentere på elevernes besvarelser af de enkelte spørgsmål for spinkelt. I det følgende kapitel ses den gennemsnitlige pointscore for hvert delspørgsmål i forcensuren.

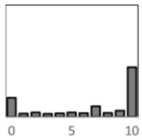
6.3 Delprøve 1

6.3.1 Opgave 1 - Differentialregning

Opgave 1 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 4 .$$

a) Bestem $f'(x)$.

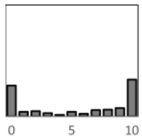


Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 6,6)

6.3.2 Opgave 2 - Reduktion

Opgave 2 a) Reducér udtrykket

$$2b^2 + (a+b)\cdot(a-b) - a^2 \, .$$



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 5,5)

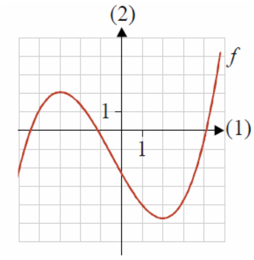
6.3.3 Opgave 3 - Funktioner

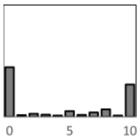
Opgave 3 Figuren viser grafen for en funktion f.

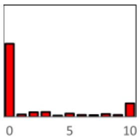
Bilag vedlagt

a) Bestem $f(1)$ ved hjælp af grafen. Benyt bilaget.

b) For hvilke værdier af x er $f'(x) \leq 0$? Begrund svaret. Benyt bilaget.







Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 4,4)

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 2,2)

6.3.4 Opgave 4 - Analytisk geometri og vektorer

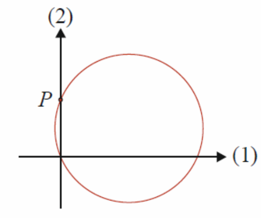
Opgave 4 En cirkel er givet ved ligningen

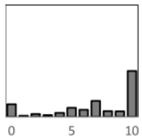
$$(x-12)^2+(y-5)^2=13^2.$$

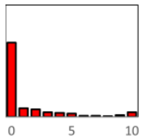
a) Bestem centrum og radius for denne cirkel.

Cirklen skærer andenaksen i punktet $P(0,10)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P.







Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 7,0)

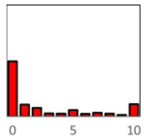
Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 1,4)

6.3.5 Opgave 5 - Kombinatorik

Opgave 5 Et byggefirma har 5 murere og 7 tømrere ansat. Til en arbejdsopgave skal firmaet bruge et hold på 3 murere og 4 tømrere.

a) På hvor mange måder kan firmaet udvælge holdet?

Billedkilde: Clipart



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 2,6)

6.3.6 Opgave 6 - Andengradspolynomier

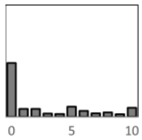
Opgave 6 Et andengradspolynomium f er givet ved

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor b og c er tal.

Grafen for f har toppunkt i $T(1,5)$.

a) Bestem tallene b og c.



Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 2,8)

6.4 Delprøve 2

6.4.1 Opgave 7 - Regression

Opgave 7 Tabellen viser den samlede længde af de danske motorveje i perioden 1972-2022.

Antal år efter 1972	0	1	49	50
Antal km danske motorveje	236	273	1305	1306

Alle tabellens 51 datapunkter findes i den vedhæftede fil: motorveje.xlsx

I en model kan udviklingen beskrives ved funktionen

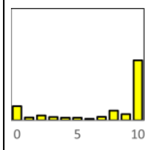
$$f(x) = a \cdot x + b \ ,$$

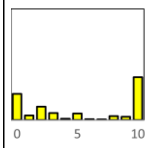
hvor $f(x)$ er den samlede længde af de danske motorveje (målt i km), og x er antal år efter 1972.

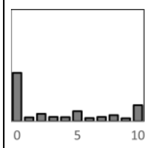
a) Bestem tallene a og b.

b) Bestem den samlede længde af de danske motorveje i 1990 ifølge modellen.

c) Bestem residualet for 1990, og forklar betydningen af dette tal.







Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 7,3)

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 5,3)

Spørgsmål 7c (pointgennemsnit: 3,5)

6.4.2 Opgave 8 - Differentialregning

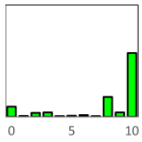
Opgave 8 En funktion f er givet ved

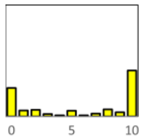
$$f(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2 + 2x + 1 \,.$$

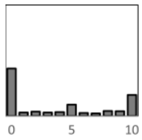
a) Tegn grafen for f.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(0, f(0))$.

c) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og forklar betydningen af de to løsninger.







Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 7,9)

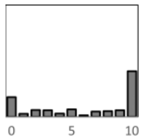
Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 5,7)

Spørgsmål 8c (pointgennemsnit: 3,5)

6.4.3 Opgave 9 - Analytisk geometri og vektorer

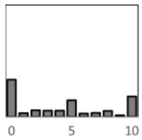
Opgave 9 I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(6, 4)$ og en linje l med ligningen $4x+3y-11=0$.

a) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra P til l.



En linje m går gennem punktet P og står vinkelret på linjen l.

b) Bestem en parameterfremstilling for linjen m.



Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 6,2)

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 4,1)

6.4.4 Opgave 10 - Sandsynlighedsregning

Opgave 10 I 2021 udgjorde andelen af elbiler 2,4 % af den samlede bestand af personbiler i Danmark.

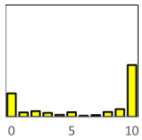
I en model angiver den stokastiske variabel X antallet af elbiler blandt 250 tilfældigt udvalgte biler.
Det antages, at X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 250$ og sandsynlighedsparameter $p = 0{,}024$.

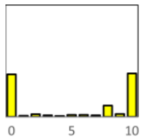
Kilde: Colourbox

a) Bestem sandsynligheden $P(X = 2)$ for, at 2 af de 250 udvalgte biler er elbiler.

b) Bestem det mest sandsynlige antal elbiler blandt de 250 udvalgte biler.

Kilde: Danmarks Statistik



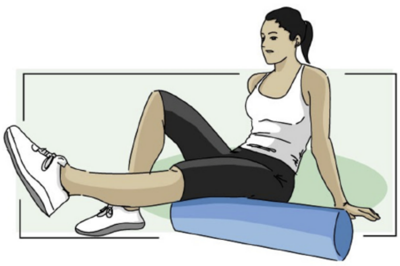


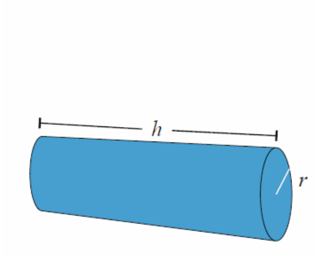
Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 6,3)

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 5,3)

6.4.5 Opgave 11 - Optimering

Opgave 11

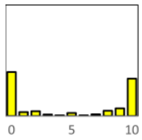




Billedkilde: physiqonomics

Figuren viser en person på en foam-rulle.
Til højre ses en geometrisk model af en foam-rulle.
Modellen er en cylinder med længde h, radius r og rumfang 7950 cm^3.

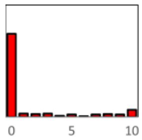
a) Bestem længden h af foam-rullen, når radius er 7,5 cm.



Det oplyses, at overfladearealet af foam-ruller med rumfang 7950 cm^3 og radius r kan beskrives ved

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{15900}{r}\,.$$

b) For hvilken værdi af radius r bliver overfladearealet af foam-rullen mindst muligt?



Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 4,9)

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 1,6)

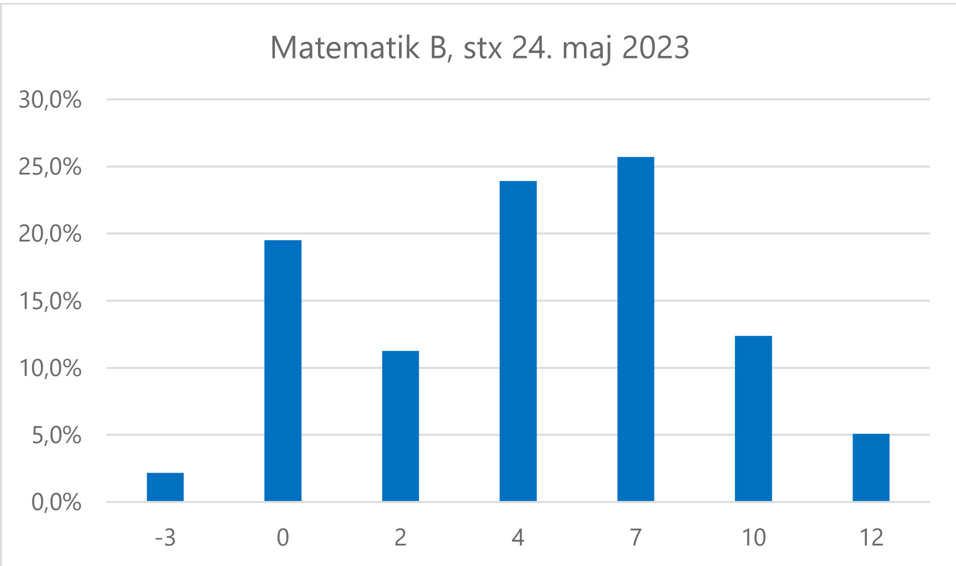
7 Stx B-niveau 24. maj 2023

Prøveresultat matematik B, stx 24. maj 2023

Antal eksaminander til prøve	**8195**
Karaktergennemsnit	**4,8**
Andel ikke-beståede	**21,7 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	2,2%	19,5%	11,3%	23,9%	25,7%	12,4%	5,1%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger, jf omtale i afsnit 1.5.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-61	56-75	70-107	102-147	142-175	170-200

7.1 Klassificering af underspørgsmål

De er 2284 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 12 opgaver med ialt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

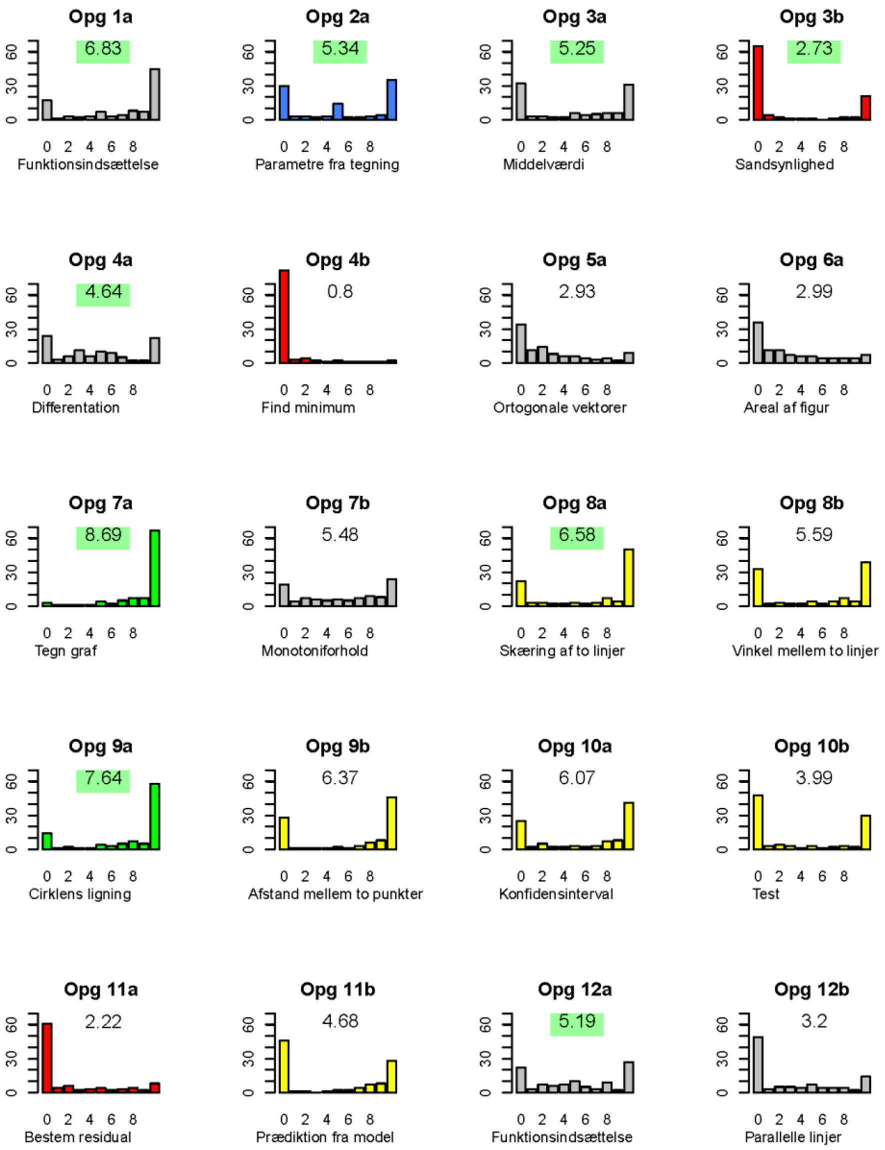
	Antal
Mindstekrav (grøn)	9
Ikke-mindstekrav (hvid)	11

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 20 nedenfor.

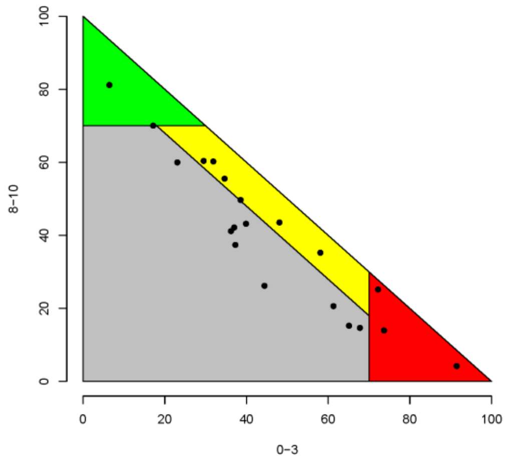


Figur 20: *Resultater for de 20 spørgsmål for STX-B 24. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
2	3	6	1	8

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

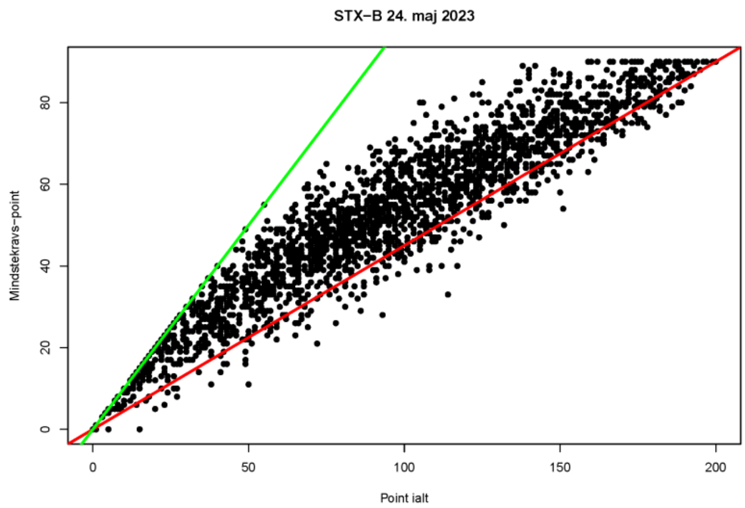


Figur 21: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-B 24. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
7a	* Tegn graf	8.69
9a	* Cirklens ligning	7.64
1a	* Funktionsindsættelse	6.83
8a	* Skæring af to linjer	6.58
9b	Afstand mellem to punkter	6.37
10a	Konfidensinterval	6.07
8b	Vinkel mellem to linjer	5.59
7b	Monotoniforhold	5.48
2a	* Parametre fra tegning	5.34
3a	* Middelværdi	5.25
12a	* Funktionsindsættelse	5.19
11b	Prædiktion fra model	4.68
4a	* Differentation	4.64
10b	Test	3.99
12b	Parallelle linjer	3.2
6a	Areal af figur	2.99
5a	Ortogonale vektorer	2.93
3b	* Sandsynlighed	2.73
11a	Bestem residual	2.22
4b	Find minimum	0.8

Tabel 9: *Spørgsmålene for STX-B 24. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til **mindstekrav,** er farvet grønne og markeret med en stjerne.*



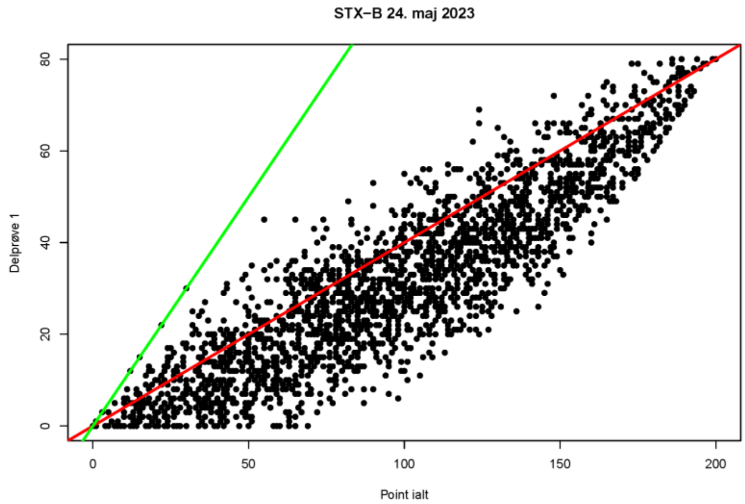
Figur 22: *STX-B 24. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 45 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får mere ud af mindstekravsopgaverne end af de øvrige, men ikke så meget som man kunne forvente. Kun de allerdygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
7a	Tegn graf	8.69
9a	Cirklens ligning	7.64
1a	∗ Funktionsindsættelse	6.83
8a	Skæring af to linjer	6.58
9b	Afstand mellem to punkter	6.37
10a	Konfidensinterval	6.07
8b	Vinkel mellem to linjer	5.59
7b	Monotoniforhold	5.48
2a	∗ Parametre fra tegning	5.34
3a	∗ Middelværdi	5.25
12a	Funktionsindsættelse	5.19
11b	Prædiktion fra model	4.68
4a	∗ Differentation	4.64
10b	Test	3.99
12b	Parallelle linjer	3.2
6a	∗ Areal af figur	2.99
5a	∗ Ortogonale vektorer	2.93
3b	∗ Sandsynlighed	2.73
11a	Bestem residual	2.22
4b	∗ Find minimum	0.8

Tabel 10: *Spørgsmålene for STX-B 24. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares **uden adgang til CAS** er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 23: *STX-B 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får markant mere ud af delprøve 2 end af delprøve 1.

7.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx B - sættet fra den 24. maj 2023 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

7.3 Delprøve 1

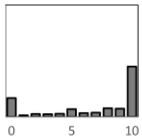
7.3.1 Opgave 1 - Funktioner

Opgave 1 En funktion er givet ved $f(x) = 2x + 3$.

Bilag vedlagt

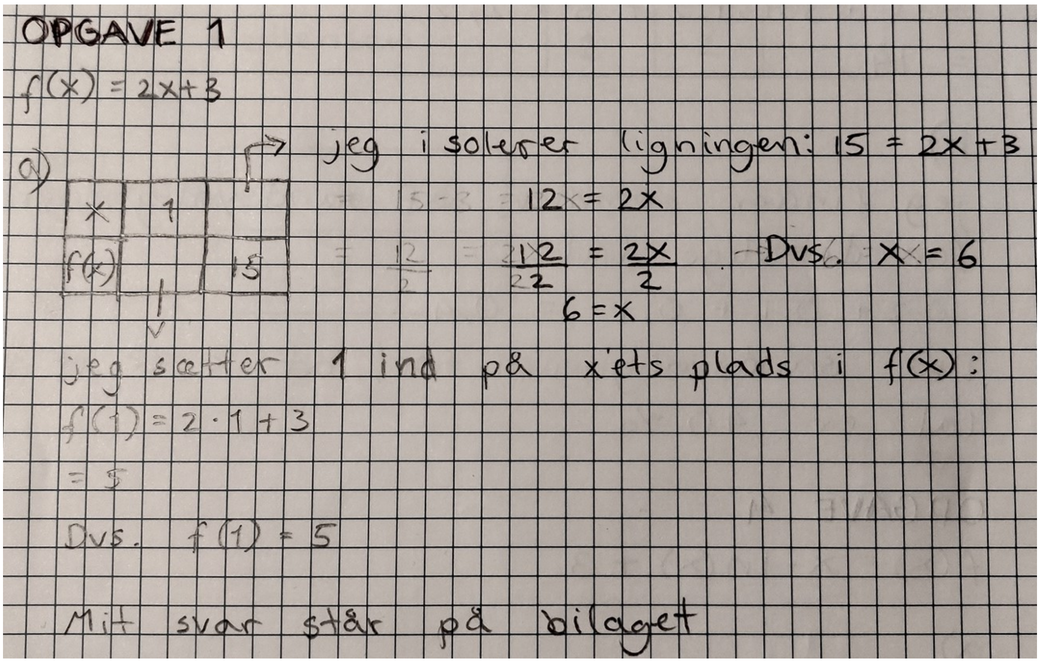
a) Bestem de manglende tal i tabellen. Begrund svarene. Brug bilaget.

x	1	
$f(x)$		15



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 6,8)
Rigtig mange elever får fint udregnet $f(1)$. En del gætter sig frem til løsningen til $f(x) = 5$ og viser, at $x = 6$ er en løsning ved udregning. Bilaget er taget med som en hjælp for at undgå for meget "kompliceret" notation i det første spørgsmål, men det har haft den uheldige konsekvens, at mange elever blot afleverer det udfyldte skema – uden mellemregninger.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

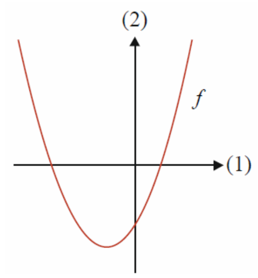


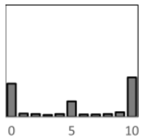
7.3.2 Opgave 2 - Andengradspolynomier

Opgave 2 Figuren viser grafen for en funktion f af typen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,.$$

a) Bestem fortegnet for tallet a og fortegnet for diskriminanten d.
Begrund svarene.





Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 5,3)
Der er rigtig mange elever, der slet ikke ved noget om konstanternes betydning for parablens udseende, og en del der kun kender betydningen af a. Flere skriver, at $d > 1$, fordi parablen skærer x-aksen to gange, og at $a > 0$, fordi grafen er positiv. En mindre del af eleverne tror, at de må vælge værdierne for a, b og c, og herefter udregne værdien af d på baggrund af disse valg.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 2
Fortegnet for a er +. a er Positiv da grenene i grafen vender opad.
Fortegnet for diskriminanten er +. Diskriminanten er Positiv fordi grafen skærer x-aksen 2 steder, altså der er 2 nulpunkter

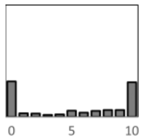
7.3.3 Opgave 3 - Sandsynlighedsregning

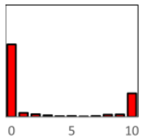
Opgave 3 Tabellen viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X.

t	5	10	15	20	25
$P(X=t)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

a) Bestem middelværdien af X.

b) Bestem sandsynligheden for, at X er et ulige tal.





Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 5,3)
Spørgsmålet falder næsten ud som et knald eller fald spørgsmål. Dem der kan afkode tabellen besvarer spørgsmålet korrekt eller stort set korrekt, men en rigtig stor del af eleverne forstår slet ikke, at $P(X = t)$ angiver, at rækken indeholder sandsynligheder. Mange finder frem til den rigtige formel i formelsamling, og selv om den er svær at "sætte ind i", så lykkes det faktisk for forholdsvis mange af de elever, der når så langt, at få regnet rigtigt. Endelig udfordrer det også en del elever, at der skal regnes med decimaltal.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 3

a) Jeg bestemmer middelværdien af X, med

formel 182: $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$

$5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}3 + 25 \cdot 0{,}1$

$\Downarrow$ $1 + 3 + 1{,}5 + 6 + 2{,}5 = 14$

dvs. at middelværdien af X = 14

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 2,7)

Denne opgave falder meget sværere ud end forventet. Selv nogle af de elever, der har besvaret spørgsmål a) korrekt, besvarer dette spørgsmål helt forkert. Typiske forkerte svar er 1) $\frac{3}{5}$ fordi 3 ud af de 5 tal i øverste række er ulige, 2) $\frac{4}{5}$ fordi 4 ud af de 5 tal i nederste række er "ulige" og 3) 50% fordi hvert andet tal generelt er ulige.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Der er 3 ulige udfald, der sammenlagt har en
sansynlighed på $0{,}2+0{,}1+0{,}1 = 0{,}4$.
Det betyder at der er 40% chance for at
udfaldet er ulige

7.3.4 Opgave 4 - Differentialregning

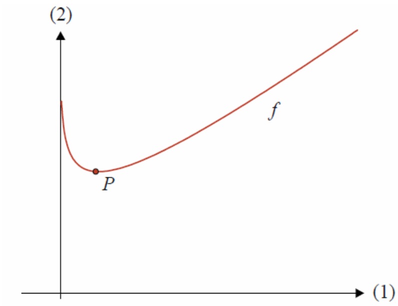
Opgave 4 En funktion f er givet ved

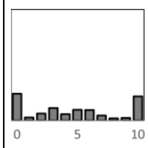
$$f(x) = x - \ln(x) + 3 .$$

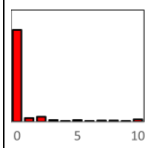
a) Bestem $f'(x)$.

Funktionen f har ét minimumspunkt P.

b) Bestem koordinatsættet til P.







Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 4,6)
Dette spørgsmål tester elevernes evner til at bestemme differentialkvotienter til simple funktioner, men der er en del benspænd undervejs. Censorkommentarerne og pointstatistikken tyder på, at over halvdelen af eleverne ikke kan differentiere x korrekt! Mange lader konstanten "overleve" i den afledte funktion, og en del skriver $x^{-1} = \frac{1}{x}$ midt inde i forskriften for f'.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Mangler

Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 0,8)
Dette spørgsmål er det, der uden sammenligning går dårligst i sættet. Det er klart, at man kan være særdeles uheldigt stillet, hvis man ikke er kommet frem til noget brugbart i spørgsmål a). Men der er stadig en del point at hente ved at gå i gang med at besvare spørgsmålet og forklare, hvordan et minimumspunkts x-koordinat kan bestemmes ved at løse ligningen $f'(x) = 0$. Alligevel er det ca. 9 ud af 10, der ikke får et eneste point for deres besvarelse af dette spørgsmål! Pointgennemsnittet *er* ekstraordinært lavt, men det er desværre ikke sjældent, at et spørgsmål som dette går skidt for eleverne. Koblingen mellem differentialregning og bestemmelse af ekstremumssteder er desværre ikke noget, der sidder på rygraden af de fleste elever.
Pointfordelingen tyder ikke på, at mange kommer frem til $x = 1$, men af dem der gør, nævner flere censorer endvidere, at $\ln(1)$ volder store problemer i den efterfølgende bestemmelse af punktet y-koordinat.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Mangler

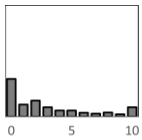
7.3.5 Opgave 5 - Vektorregning

Opgave 5 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5+t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

a) Bestem t, så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 2,9)

Dette spørgsmål går også skidt for de fleste - ca. 40% får nul point, hvilket måske ikke er overraskende, da det er svært at komme i gang med at besvare spørgsmålet, hvis man ikke ved, at man skal sætte skalarproduktet af de to vektorer lig 0. Pointfordelingen og censorkommentarerne tyder på, at dem der får skrabet et par point sammen, får det ved at opstille ligningen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, lidt flere point opnås ved at indsætte koordinaterne ind i ligningen, men herfra er det kun de færreste, som er i stand til at gange særligt parentesen korrekt ud, for slet ikke at tale om at løse den efterfølgende ligning, hvor løsningen er en brøk!

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5

vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved

$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5+t \end{pmatrix}$

hvor t er et tal

a) Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale

for at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale skal skalarproduktet være lig 0, derfor 'sole'r jeg t i skalarprod

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$0 = t \cdot 2 + 4 \cdot (-5+t)$

$0 = 2t - 20 + 4t$

$0 = 6t - 20$

$20 = 6t - 20 + 20$

$\frac{20}{6} = \frac{6t}{6}$

$\frac{20}{6} = t$

dvs. at når $t = \frac{20}{6}$ så er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale

$= \frac{20}{6} \cdot 2 + 4\left(-5 + \frac{20}{6}\right)$

$= \frac{40}{6} + 4 \cdot \frac{-10}{6}$

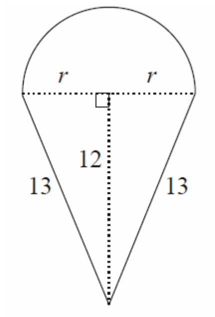
$= \frac{40}{6} + \frac{-40}{6}$

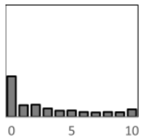
$= 0$

$\underline{\vec{a} \perp \vec{b}}$

7.3.6 Opgave 6 - Tal og formler

Opgave 6





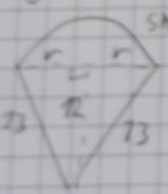
Billedet til venstre viser en reklame for en is.
Figuren til højre består af en halvcirkel med radius r og en ligebenet trekant.
Nogle af målene fremgår af figuren. Målene er angivet i cm.

a) Bestem det samlede areal af figuren.

Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 3,0)
Besvarelsen af dette spørgsmål bygger på formler, der for mange elever er kendt fra folkeskolen. Dette gør, at en del elever, der ikke får mange point i resten af sættet, faktisk får samlet nogle point op i dette spørgsmål, f.eks. ved at opstille formlerne for cirklens og trekanternes areal. Af typiske fejl kan nævnes, at mange elever har svært ved at anvende Pythagoras sætning til at bestemme r, og så er der rigtig mange, der omskriver π til 3,14 for at få svaret i decimaltal.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 6



Skitse for figur af is, enheder i cm

a) Bestem det samlede areal af figuren

Pythagoras for at finde r, da r svarer til den ene katete

$c^2 - b^2 = a^2 = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

Dermed er $r = 5$

$A_{trekant} = \frac{1}{2} h \cdot g = \frac{12 \cdot (5 \cdot 2)}{2} = \frac{120}{2} = 60$

$A_{halvcirkel} = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} = \frac{\pi 25}{2}$

$A_{figur} = A_{trekant} + A_{halvcirkel} = 60 + \frac{\pi 25}{2}$

7.4 Delprøve 2

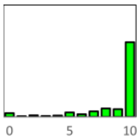
7.4.1 Opgave 7 - Differentialregning

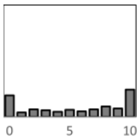
Opgave 7 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x .$$

a) Tegn grafen for f.

b) Bestem monotoniforholdene for f ved hjælp af $f'(x)$.





Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 8,7)
Dette spørgsmål går godt for de fleste. Nogle elever får ikke skrevet funktionsforskriften korrekt ind i deres CAS-værktøj (det er ofte det foranstående minus, der overses), og nogle elever får ikke tilpasset zoomet. Enkelte censorer nævner at graftilpasning foregår nemmere i nogle værktøjer end andre. Dette er et vilkår, som man som lærer må være bevidst om på de enkelte hold.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 7

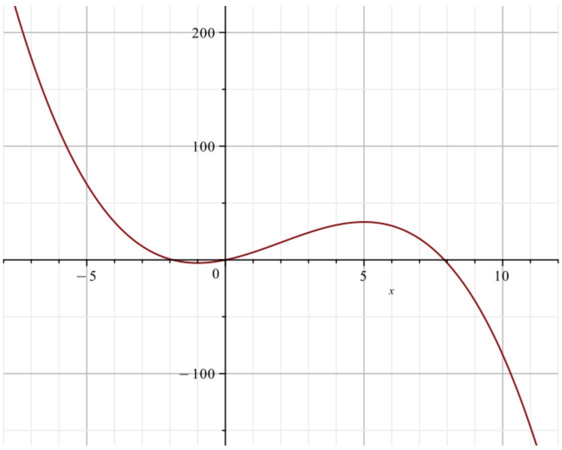
a) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) := -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x$$

$$f := x \mapsto -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Jeg plotter grafen:

$plot(f(x), gridlines)$



Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 5,5)
Dette spørgsmål er et klassisk spørgsmål i emnet differentialregning, og funktionen indeholder ikke de store benspænd (på nær det foranstående minustegn). Mange elever får også samlet en del point sammen, men det er ikke mange, der får fuldt point for deres besvarelse. Spørgsmålet er formuleret, så det er et krav, at $f'(x)$ inddrages i besvarelsen. Det betyder, at ligningen $f'(x) = 0$ skal løses, hvorefter spørgsmålet kan besvares ved grafinspektion. Bemærk endvidere, at der naturligvis skal konkluderes på besvarelsen, hvor monotoniintervallerne skal opskrives.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b

Jeg bestemmer monotoniforholdene, ved at finde de kritiske punkter, som er de steder hvor grafen vender, og hvor tangenthældningen er ligmed 0.
Det gør jeg ved at løse $f(x)$ ved hjælp af komandoen solve.
$solve(f'(x) = 0, [x])$

$$[[x = -1], [x = 5]] \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

De kritiske punkter er altså -1 og 5, så derfor bruger jeg komandoen $f(x)$ til at undersøge monotomiforholdet for værdier under -1 mellem -1 og 5, og over 5.

$f'(-2)$

$$-7 \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

$f'(1)$

$$8 \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

$f'(6)$

$$-7 \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

Dette betyder altså at f(x) er aftagende i intervallet $]-\infty; -1]$ og voksende i intervallet $[-1; 5]$ og aftagende i intervallet $[5; \infty[$

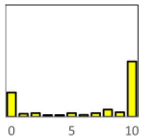
7.4.2 Opgave 8 - Analytisk geometri

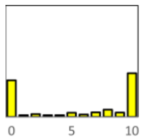
Opgave 8 To linjer l og m er givet ved

$$l: \quad 5x - 2y + 1 = 0$$
$$m: \quad 4x + 3y - 13 = 0 .$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

b) Bestem den spidse vinkel v mellem l og m.





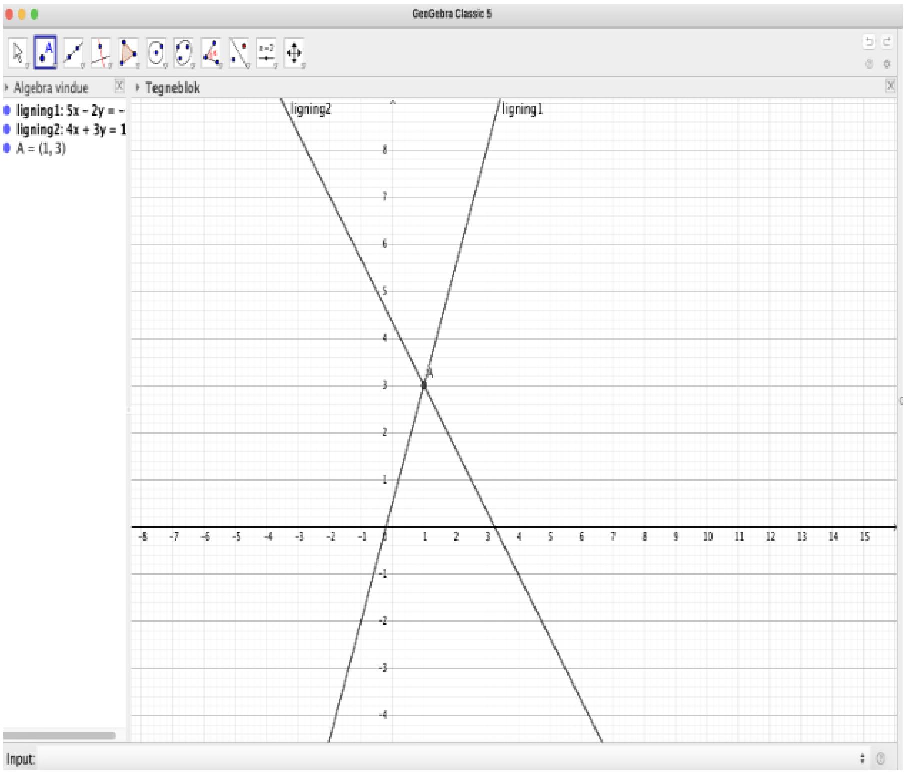
Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 6,6)

Dette spørgsmål går godt for mange – særligt er der mange, der besvarer spørgsmålet fint grafisk. En del censorer bemærker, at de savner et metodekrav, der forhindrer en grafisk løsning, men i den udformning spørgsmålet har, er en grafisk løsning tilstrækkelig. Det er imidlertid vigtigt, for at fuldt point kan opnås, at et eventuelt screenshot suppleres med forklarende tekst og en konklusion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

To linjer l og m er givet ved
$l: 5x - 2y + 1 = 0$
$m: 4x + 3y - 13 = 0$

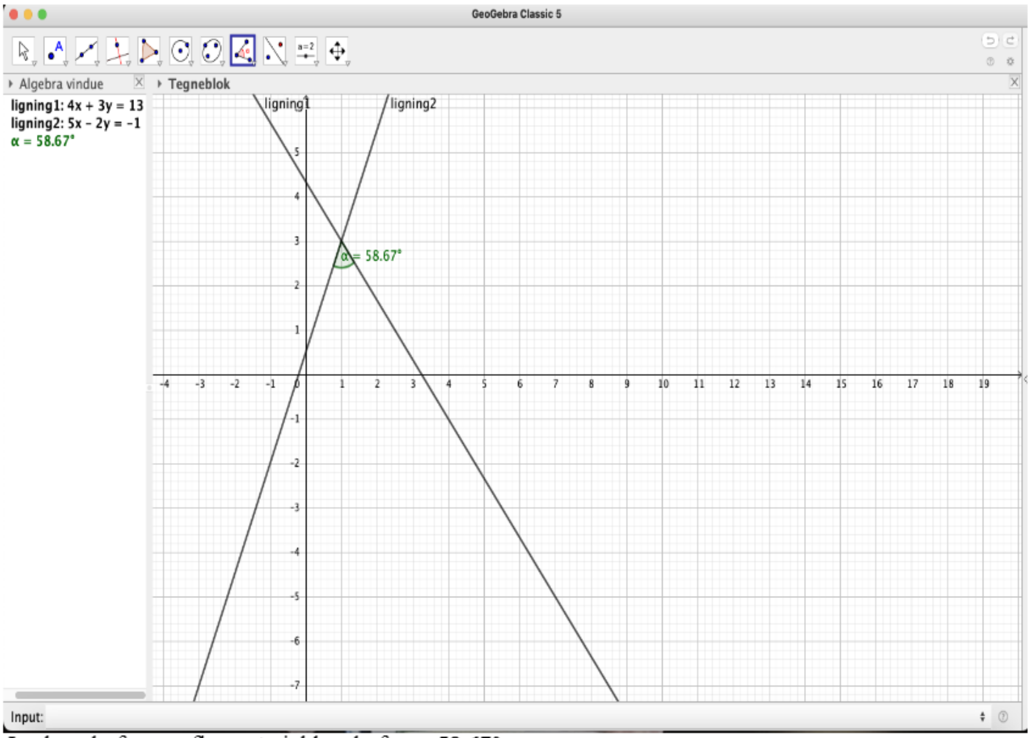
a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.
Ved hjælp af geogebra kan jeg nu bestemme koordinatsættet jeg skriver derfor de to linjer ind i geogebras input feltet og der har jeg fundet punktet hvor de to linjer skærer hinanden der har jeg fundet punktet a som har koordinatsættet (1,3)
Derfor har de to grafer et skæringspunkt på **(1,3)**



Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 5,6)
Dette spørgsmål går godt for mange – særligt er der mange, der besvarer spørgsmålet fint grafisk. En del censorer bemærker, at de savner et metodekrav, der forhindrer en grafisk løsning, men i den udformning spørgsmålet har, er en grafisk løsning tilstrækkelig. Det er imidlertid vigtigt, for at fuldt point kan opnås, at et eventuelt screenshot suppleres med forklarende tekst og en konklusion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem den spidse vinkel v mellem l og m
For at finde den spidse vinkel kan jeg nu fortsætte i geogebra og ved hjælp af vinkelværktøjet kan jeg klikke på de to linjer og finde ud af hvad vinklen er



Jeg kan derfor nu aflæse at vinklen derfor er **58,67°**

7.4.3 Opgave 9 - Analytisk geometri

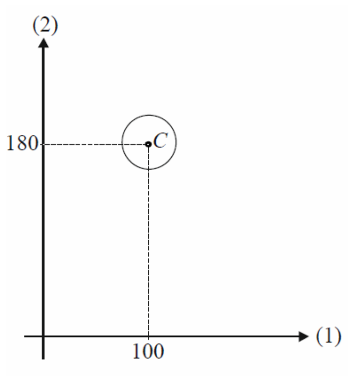
Opgave 9 En cirkelformet dartskive med radius 22,75 cm hænger på en væg.

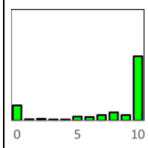
Figuren viser dartskiven som en cirkel i et koordinatsystem med cm som enhed på begge akser.
Cirklen har centrum i punktet $C(100,180)$.

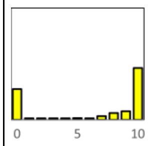
a) Bestem en ligning for denne cirkel.

En spiller kaster en pil mod dartskiven. Pilespidsen sætter sig fast på skiven i punktet $P(104,191)$.

b) Bestem afstanden fra centrum af dartskiven til pilespidsen.







Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 7,6)
Spørgsmålet går godt for de fleste, men mange censorer efterlyser forklarende tekst, hvor den generelle cirkelligning præsenteres, hvorefter værdierne indsættes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Bestem en ligning for denne cirkel

Vi ved at cirklens ligning er givet ved formel (75):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Hvor det er cirkel med centrum i $C(a,b)$ og radius r

Derfor ved vi at

$$a=100$$

$$b=180$$

$$r=22{,}75$$

Og denne cirkels ligning kommer derfor til at hedde:

$$(x-100)^2+(y-180)^2=22{,}75^2$$

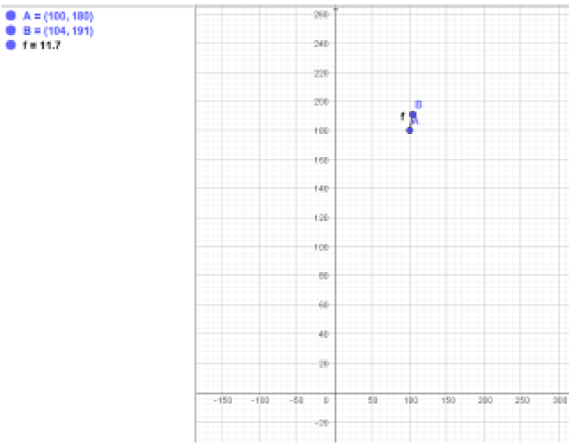
Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 6,4)
Endnu et spørgsmål hvor eleverne kan "tegne" sig frem til svaret, og mange gør det uden de helt store problemer. På den anden side er spørgsmålet så atypisk, at der er en relativt større andel af eleverne end normalt i disse spørgsmål i analytisk geometri, der får nul point.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Dernæst skal vi bestemme afstanden fra dartskivens centrum til pilespidsen.

Hvor vi ved at en spiller har kastet pilespidsen i punktet $P(104,191)$

For at bestemme afstanden bruges GeoGebra, hvor der først sættets punktet P og C ind, hvor der derefter bruges linjestykke værktøjet til at bestemme afstanden mellem dem:



Afstanden fra pilespidsen P og til dartskivens centrum C er dermed 11,7cm

7.4.4 Opgave 10 - Statistik

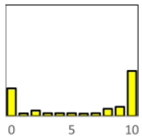
Opgave 10 I en undersøgelse i 2020 opfyldte 88 % af 1200 tilfældigt udvalgte elever i 9. klasse karakterkravet til erhvervsuddannelserne.

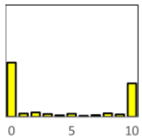
a) Bestem et 95 %-konfidensinterval for andelen af elever, der opfyldte karakterkravet i 2020.

I 2019 opfyldte 85 % af eleverne i 9. klasse karakterkravet til erhvervsuddannelserne.

b) Afgør ved at bruge konfidensintervallet, om der er sket en signifikant fremgang fra 2019 til 2020 i andelen af elever i 9. klasse, der opfylder karakterkravet.

Kilde: Benchmark.dk





Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 6,1)

Dette er jo et typisk spørgsmål i emnet, og en del elever har helt styr på, hvordan man besvarer spørgsmålet ved hjælp af deres CAS-værktøj. Nogle bruger formlen fra formelsamlingen, men her er der en del, der ikke får regnet intervalgrænserne korrekt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10 I en undersøgelse i 2020 opfyldte 88 % af 1200 tilfældigt udvalgte elever i 9. klasse karakterkravet til erhvervsuddannelserne.

a) Bestem et 95 %-konfidensinterval for andelen af elever, der opfyldte karakterkravet i 2020.

Vi bestemmer et konfidensinterval ud fra sandsynligheden 88% = $phat := 0.88 = 0.88$

Stikprøveandelen angives som: $n := 1200 = 1200$

Nu kan tallene indsættes i formlen

$$Konfidensinterval := \left[phat - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{phat \cdot (1 - phat)}{n}}, phat + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{phat \cdot (1 - phat)}{n}}\right] = [0.8616135702, 0.8983864298]$$

(Konfidensintervallet udregnet ved at definere sandsynligheden phat og n, og dernæst indsætte dem i formlen, som dernæst er udregnet med Maples lommeregner)

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 4,0)

Hvis man har givet op på spørgsmål a), er det klart, at det er meget svært at hente point i besvarelsen af dette spørgsmål. Men et forkert udregnet konfidensinterval i spørgsmål a) kan ofte godt bruges i en "korrekt" besvarelse af spørgsmål b). Det viser sig imidlertid, at mange elever ikke har en grundlæggende forståelse af begrebet konfidensinterval, idet de slet ikke ved, hvordan de oplyste 85% skal sættes i relation til konfidensintervallet, men i stedet udregner et nyt konfidensinterval på baggrund af denne andel.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

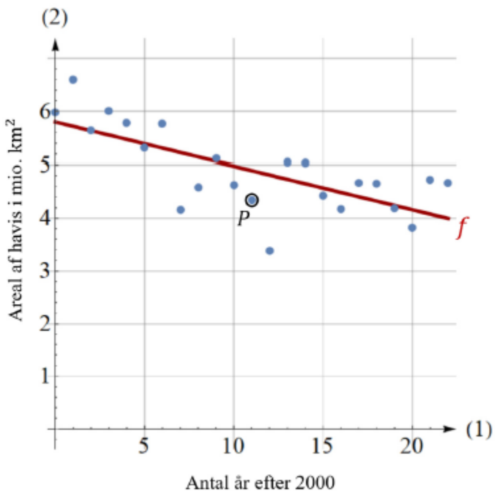
I 2019 opfyldte 85 % af eleverne i 9. klasse karakterkravet til erhvervsuddannelserne.

b) Afgør ved at bruge konfidensintervallet, om der er sket en signifikant fremgang fra 2019 til 2020 i andelen af elever i 9. klasse, der opfylder karakterkravet.

Da 85% er mindre end den mindste værdi i det udregnede konfidensinterval, kan det konkluderes, at der ikke er sket en signifikant fremgang fra 2019 til 2020, men derimod en signifikant tilbagegang i andelen af elever i 9. klasse, der opfylder karakterkravet.

7.4.5 Opgave 11 - Regression

Opgave 11



Figuren viser datapunkterne for arealet af havisen ved Arktis, målt i september hvert år i perioden 2000-2022.
Figuren viser også grafen for en lineær regressionsmodel $f(x)$ for udviklingen i arealet af havisen. Denne funktion er givet ved

$$f(x) = -0{,}0819 \cdot x + 5{,}80\,,$$

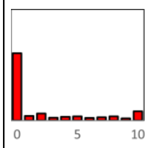
hvor x betegner antal år efter 2000, og $f(x)$ betegner arealet af havisen ved Arktis i september, målt i mio. km^2.

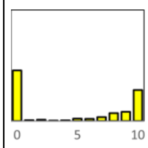
På figuren ses datapunktet $P(11, 4.34)$.

a) Bestem residualet for datapunktet P, og forklar betydningen af dette tal.

b) Bestem det år, hvor der ifølge modellen ikke længere vil være havis ved Arktis i september.

Kilde: NASA.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 2,2)
Dette spørgsmål falder meget svært ud for eleverne. Spørgsmål omkring residualer har traditionelt været stillet i forbindelse med konstruktion af residualplot på baggrund af en selvudført lineær regression, så det forvirrer mange elever, at der ikke hører et datasæt til opgaven. Enkelte finder den rigtige formel i formelsamlingen, men får trukket fra i forkert rækkefølge. Selv blandt dem der får udregnet residualet korrekt, er der stadig en del, der har svært ved at tolke, hvad der overhovedet forstås ved et residual i forhold til opgavens kontekst.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Bestem residualet for datapunktet P, og forklar betydningen af dette tal.
Jeg benytter formel 162 i formelsamlingen og kan se at jeg regner residualet ved $r_1 = y_1 - f(x_1)$
Jeg ved at y_1 er 4,34 fordi det svarer til den observerede y-værdi for punktet P
Jeg regner $f(x_1)$ i Nspire

$f(x):=-0.0819 \cdot x+5.8$ ▸ *Udført*

$f(11)$ ▸ 4.8991

Med disse oplysninger kan jeg regne residualet

$$r_1 = 4{,}34 - 4{,}8991 \approx -0{,}559$$

Residualet for P er altså $-0{,}559$. Det betyder at arealet af isen ved Arktis, 11 år efter år 2000, fyldte 0,559 færre mio. km^2 end modellen påstår.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 4,7)

Dette spørgsmål går noget bedre end det første, og der var sikkert endnu flere, der havde hentet point her, hvis det havde været spørgsmål a) i opgaven.

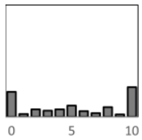
7.4.6 Opgave 12 - Differentialregning

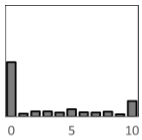
Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}.$$

a) Gør rede for, at punkterne $P(-1,4)$ og $Q(5,10)$ ligger på grafen for f.

b) Undersøg, om linjen gennem P og Q er parallel med tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 2.





Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 5,2)
Dette spørgsmål klarer eleverne nogenlunde fornuftigt, men rigtig mange elever vælger at løse opgaven grafisk, hvilket meget sjældent er tilstrækkeligt i denne type spørgsmål. En del elever er faktisk bevidste om dette, idet de i deres besvarelser forholder sig til zoomets betydning, men har formentlig intet alternativ til den grafiske besvarelse.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg. 12

Givet:

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}.$$

a) Redegørelse for at punkterne P(-1,4) og Q(5,10) ligger på grafen for f

Først vil jeg definere funktionen i TI-Nspire

$$\mathbf{f}(x):=\frac{1}{2}\cdot x^2-x+\frac{5}{2} \blacktriangleright \mathit{Done}$$

Derefter vil jeg erstatte x med førstekoordinaten i både punktet P og punktet Q, og derefter skulle jeg gerne få hvert deres andetkoordinat, da de ligger på grafen for f

$$\mathbf{f}(-1) \blacktriangleright 4$$

$$\mathbf{f}(5) \blacktriangleright 10$$

Her kan man se at deres første- og andenkoordinater passer sammen, og ligger dermed på grafen for f

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 3,2)
Omkring halvdelen af eleverne får nul point i deres besvarelse af dette spørgsmål. Meget få besvarer spørgsmålet fyldestgørende ved at udregne de to hældninger. De fleste af dem, der går i gang med en besvarelse, forsøger sig med et visuelt argument.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Undersøgelse om linjen gennem P og Q er parallel med tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinatet 2
Først vil jeg starte med at finde f'(x)

$$\mathbf{fm}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright \mathit{Done}$$

$$\mathbf{fm}(x) \blacktriangleright x-1$$

Nu kender jeg f'(x), og vil nu finde f'(2), for at finde tangenthældningen i punktet med førstekoordinat 2

$$\mathbf{fm}(2) \blacktriangleright 1$$

Jeg kender nu hældningen på tangenten og vil nu finde hældningen på linjen gennem P og Q
Det vil jeg gøre med formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hvor a er hældningen

$$\frac{10-4}{5--1} \blacktriangleright 1$$

Jeg ved nu at både tangenten og linjen har en hældning på 1, og jeg ved derfor at de er parallelle.

8 Opsamling på elevbesvarelserne af stx B-sættene

Når man ser på elevernes besvarelser af de to stx B-sæt, springer det med det samme i øjnene, at der er mange spørgsmål, som mange elever har svært ved, og få spørgsmål som mange elever har nemt ved. Man kan inddele pointgennemsnittene i 3 hovedgrupper:

Pointgennemsnit på 7 point eller derover (ca. 15% i de undersøgte sæt):

- Tegn graf-spørgsmål,
- Opgaver i lineær regression
- Lidt mere specielt: fortolkning af konstanter i cirklens ligning.

Pointgennemsnit på mellem 4 og 7 point (ca. 55% i de undersøgte sæt):
Spørgsmålene i denne gruppe er typisk spørgsmål i emnerne, der

- kræver meget få beregninger, fx bestemmelse en forskrift for f' ud fra en forskrift for f, eller
- kan løses ved hjælp af standardiserede procedurer i CAS, fx bestemmelse af punktsandsynlighed i en binomialfordeling

Der kræves stort set ingen dybdeforståelse for at få fuldt point i disse spørgsmål.

Pointgennemsnit på mindre end 4 point (ca. 30% i de undersøgte sæt):

- Enkelte af spørgsmålene i denne gruppe er fagligt vanskelige
- Resten er enten spørgsmål, der er atypiske for emnet, eller som kræver en lidt dybere forståelse, før opgaven kan besvares; fx spørgsmål om at bestemme og fortolke et residual i en opgave med kontekst.

Sammenholdes elevernes points i de forskellige typer opgaver, tegner der sig et billede af, at det ofte er lykkedes eleverne at tilegne sig lære helt elementære færdigheder, gerne med simpel brug af CAS, men at en grundlæggende forståelse af de tilhørende begreber ikke er fulgt med.

- De fleste elever kan tegne en graf i deres CAS-værktøj, men mange kan ikke aflæse $f(1)$ på en graf.
- Mange elever kan lave lineær regression, men mange ved ikke rigtig, hvad et residual er.
- En del kan differentiere, men mange kan ikke bruge det til at bestemme et minimum.
- En del kan bestemme et konfidensinterval, men mange kan ikke bruge det til at svare på spørgsmål om statistisk signifikans.
- En del kan anvende deres CAS-værktøj til at besvare spørgsmål om binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion, men mange kan ikke aflæse simle sandsynligheder fra en tabel.
- En del kan bestemme monotoniforhold, men de fleste kan ikke aflæse, hvornår $f'(x) \leq 0$ ud fra en graf.

Det er naturligvis ikke overraskende, at der er flere elever, der kan svare på mindre komplicerede typiske spørgsmål, end der er elever, der kan svare på mere komplicerede atypiske spørgsmål. Det bekymrende ligger i størrelsesforholdene. 25-30 % af stx. B-eleverne dumper, hovedsageligt fordi de i modsætning til stx A-niveau-eleverne ikke opnår en sådan robusthed bredt i emnerne, at de kan høste pointene i sættets nemme delspørgsmål.

De helt elementære færdigheder hjælper til at sikre, at eleverne består, og allerede det har krævet et stort arbejde i undervisningen. Det næste skridt for eleven og undervisningen: at arbejde med den grundlæggende forståelse af de tilhørende emner, vil stadig være et stort arbejde.

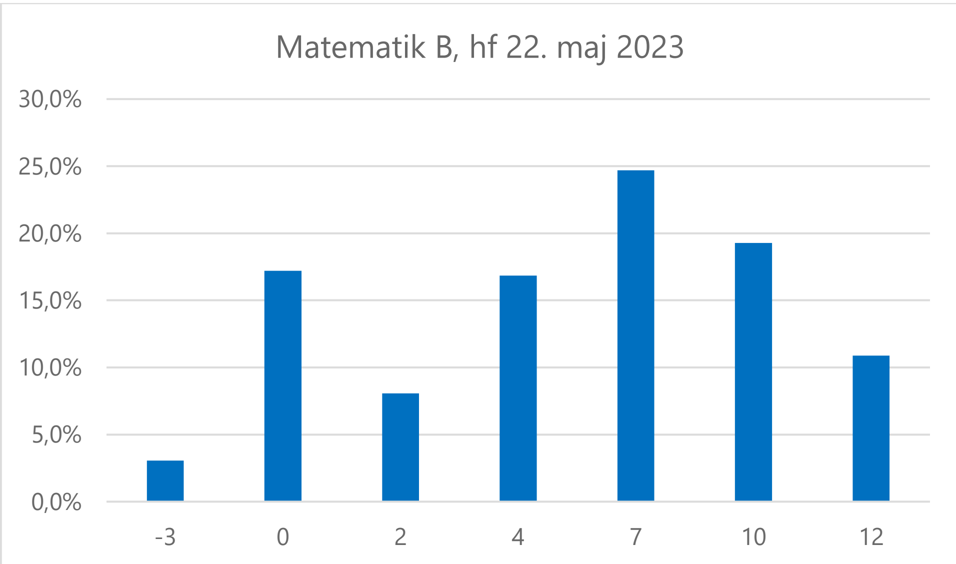
9 Hf B-niveau

Prøveresultat matematik B, hf 22. maj 2023

Antal eksaminander til prøve	**3622**
Karaktergennemsnit	**5,7**
Andel ikke-beståede	**20,3 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	3,1%	17,2%	8,1%	16,8%	24,7%	19,3%	10,9%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-71	66-85	80-117	112-157	152-185	180-200

9.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 1106 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 12 opgaver med i alt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

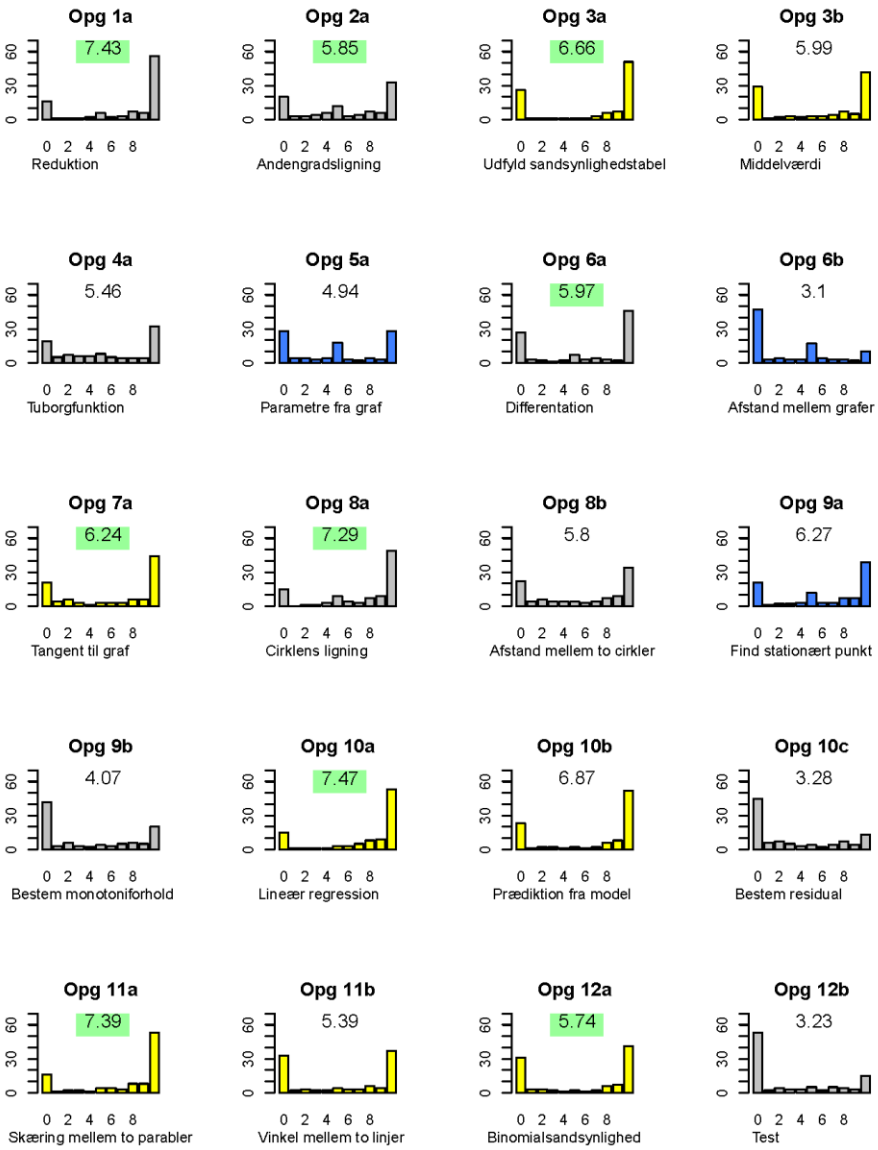
	Antal
Mindstekrav (grøn)	9
Ikke-mindstekrav (hvid)	11

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 24 nedenfor.

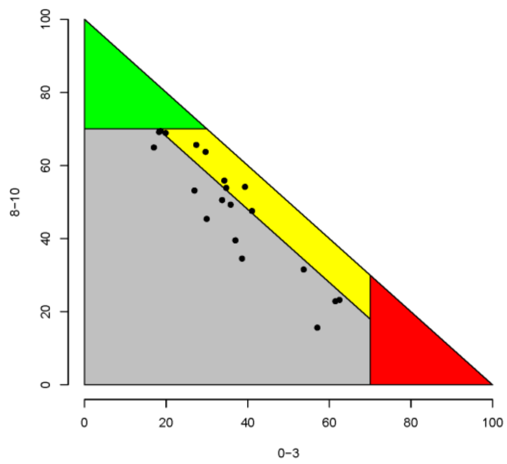


Figur 24: *Resultater for de 20 spørgsmål for HF-B 22. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
0	0	8	3	9

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

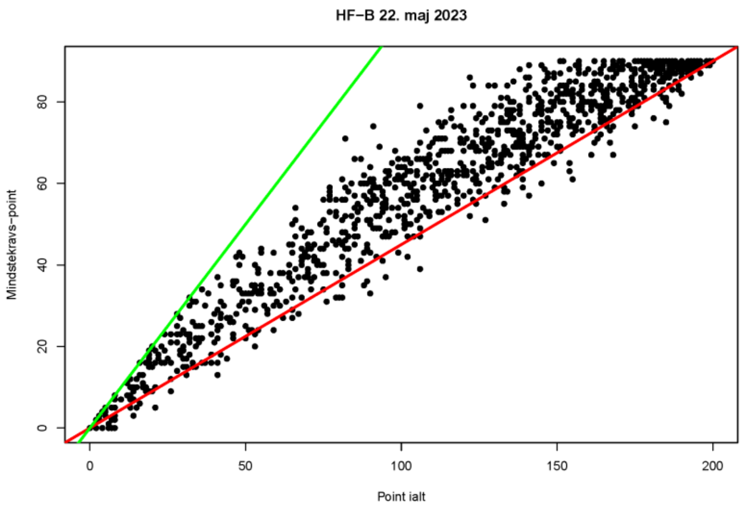


Figur 25: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for HF-B 22. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
10a	* Lineær regression	7.47
1a	* Reduktion	7.43
11a	* Skæring mellem to parabler	7.39
8a	* Cirklens ligning	7.29
10b	Prædiktion fra model	6.87
3a	* Udfyld sandsynlighedstabel	6.66
9a	Find stationært punkt	6.27
7a	* Tangent til graf	6.24
3b	Middelværdi	5.99
6a	* Differentation	5.97
2a	* Andengradsligning	5.85
8b	Afstand mellem to cirkler	5.8
12a	* Binomialsandsynlighed	5.74
4a	Tuborgfunktion	5.46
11b	Vinkel mellem to linjer	5.39
5a	Parametre fra graf	4.94
9b	Bestem monotoniforhold	4.07
10c	Bestem residual	3.28
12b	Test	3.23
6b	Afstand mellem grafer	3.1

Tabel 11: *Spørgsmålene for HF-B 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til **mindstekrav,** er farvet grønne og markeret med en stjerne.*



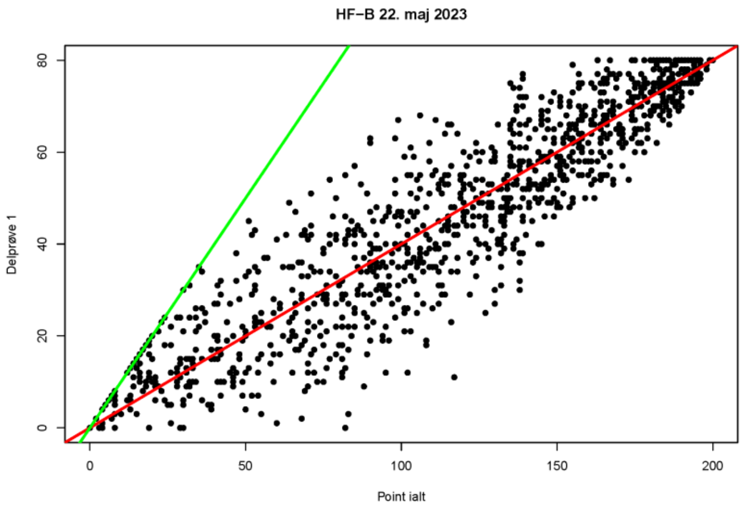
Figur 26: *HF-B 22. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 45 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får mere ud af mindstekravsopgaverne end af de øvrige, men ikke så meget som man kunne forvente. Kun de allerdygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
10a	Lineær regression	7.47
1a	∗ Reduktion	7.43
11a	Skæring mellem to parabler	7.39
8a	Cirklens ligning	7.29
10b	Prædiktion fra model	6.87
3a	∗ Udfyld sandsynlighedstabel	6.66
9a	Find stationært punkt	6.27
7a	Tangent til graf	6.24
3b	∗ Middelværdi	5.99
6a	∗ Differentation	5.97
2a	∗ Andengradsligning	5.85
8b	Afstand mellem to cirkler	5.8
12a	Binomialsandsynlighed	5.74
4a	∗ Tuborgfunktion	5.46
11b	Vinkel mellem to linjer	5.39
5a	∗ Parametre fra graf	4.94
9b	Bestem monotoniforhold	4.07
10c	Bestem residual	3.28
12b	Test	3.23
6b	∗ Afstand mellem grafer	3.1

Tabel 12: *Spørgsmålene for HF-B 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* ***uden adgang til CAS*** *er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 27: *HF-B 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får nogenlunde lige meget ud af de to delprøver.

9.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra hf B - sættet fra den 22. maj 2023 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

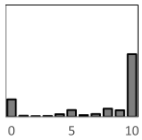
Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* ses som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

9.3 Delprøve 1

9.3.1 Opgave 1 - Reduktion

Opgave 1 a) Reducér $a^3 \cdot a^5$.

Reducér $\frac{b^7}{b^2}$.



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 7,4)

En startopgave, som de fleste klarer fint. Kun 13% får ingen points.
Typiske fejl i denne opgave er, at eksponenterne ganges sammen, henholdsvis divideres.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

opg 1. reducér $a^3 \cdot a^5$

reducerer udtrykket ved potensreglen $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

det reducerede udtryk af $a^3 \cdot a^5 = a^8$

reducér $\frac{b^7}{b^2}$

potensregnereglen ved division hedder $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

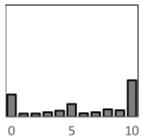
det reducerede udtryk af $\frac{b^7}{b^2} = b^5$

9.3.2 Opgave 2 - Andengradspolynomier

Opgave 2 En andengradsligning er givet ved

$$x^2 + 6x + 8 = 0\,.$$

a) Bestem diskriminanten d, og løs ligningen.



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 5,8)
Et klassisk mindstekravsspørgsmål. Mange elever kan da også bestemme diskriminanten, men de svagere elever kan ikke løse ligningen - mange springer helt over denne del af opgaven.

De typiske fejl i bestemmelsen af d er problemer med at afkode, hvad koefficienterne er (flere får x med i formlen), regningsarternes hierarki og at 6^2 udregnes til 12.

De typiske fejl ved løsning af ligningen er manglende fortegn på b, forkert bestemmelse af kvadratroden og misforståede regler angående minus. Mange skelner ikke mellem og/eller i konklusionen. Endelig forsøger nogle uden held at isolere x uden brug af rodformlen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 2

En andengradsligning er givet ved $x^2 + 6x + 8 = 0$

a) Bestem diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$
$$= 36 - 32$$
$$d = 4 \rightarrow 2 \text{ Løsninger}$$

$$X1 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{-6-2}{2} = \frac{-8}{2}$$
$$X1 = -4$$

$$X2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$X2 = -2$$

Dvs. andengradsligningen har diskriminanten 4 hvilket vil sige at den har 2 løsninger, de 2 løsninger er -4 og -2

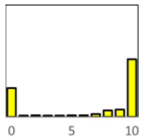
9.3.3 Opgave 3 - Sandsynlighedsregning

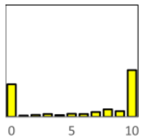
Opgave 3 Nedenstående tabel viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X.

t	0	2	5	20
$P(X=t)$	0,45	0,25	0,20	p

a) Bestem tallet p.

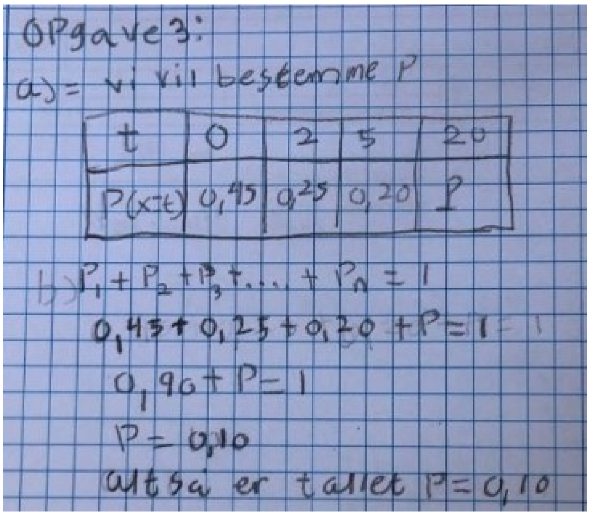
b) Bestem middelværdien af X.





Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 6,7)
Et knald-eller-fald-spørgsmål. 25% får ingen points, men mange får 10 points. En del skriver dog ikke en forklaring på, hvad de gør.
Når en del af eleverne får 0 points for deres besvarelse af dette spørgsmål, skyldes det formentlig, at de ikke ved, at $P(X=t)$ angiver, at rækken indeholder sandsynligheder.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 3:
a)= vi vil bestemme P

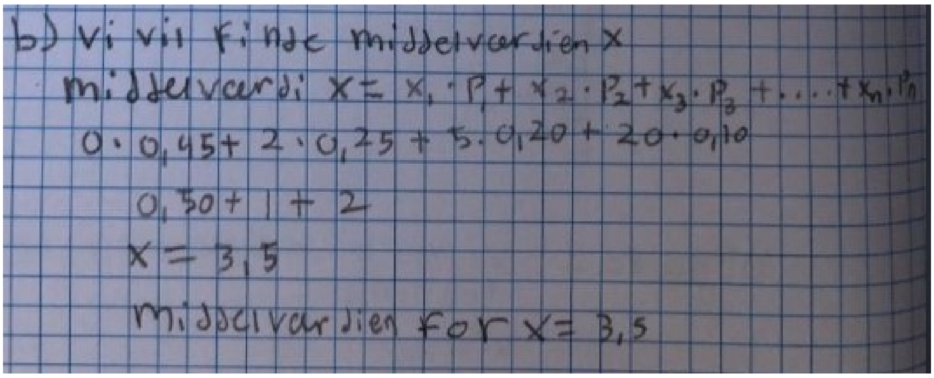
t	0	2	5	20
P(x=t)	0,45	0,25	0,20	P

b) $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$
$0,45 + 0,25 + 0,20 + P = 1$
$0,90 + P = 1$
$P = 0,10$
altså er tallet $P = 0,10$

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 6,0)
Et knald-eller-fald-spørgsmål, som mange klarer godt.
En typisk fejl er at lægge størrelserne sammen og dividere med antallet. Der er også en del, der griber fat i formlen for middelværdi for en binomialfordeling.
En del elever skriver ikke forklaring på, hvad de gør, og meget få benytter helt korrekt notation.

Man kan ikke besvare 3b) uden at have lavet 3a). Der er dog næppe mange elever, der ikke går i gang med 3a), men som har mod på at give sig i kast med 3b). Det er dog altid et godt råd til eleverne bare at skrive "et eller andet" i a), og så benytte dette i b).

Et eksempel på en elevbesvarelse:


b) Vi vil finde middelværdien X

middelværdi $X = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + x_3 \cdot P_3 + \ldots + x_n \cdot P_n$

$0 \cdot 0{,}45 + 2 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}20 + 20 \cdot 0{,}10$

$0{,}50 + 1 + 2$

$X = 3{,}5$

middelværdien for $X = 3{,}5$

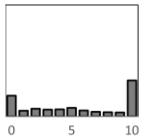
9.3.4 Opgave 4 - Stykkevis lineær funktion

Opgave 4 Hos et bestemt taxaselskab kan prisen for en taxatur beregnes med en stykkevis lineær funktion f, der er givet ved forskriften

$$f(x)=\begin{cases}16x+39 \ , \ 0<x<5 \\ 12x+59 \ , \ x\geq 5\end{cases} \quad ,$$

hvor $f(x)$ er prisen for en taxatur (målt i kr.), der er x km lang.

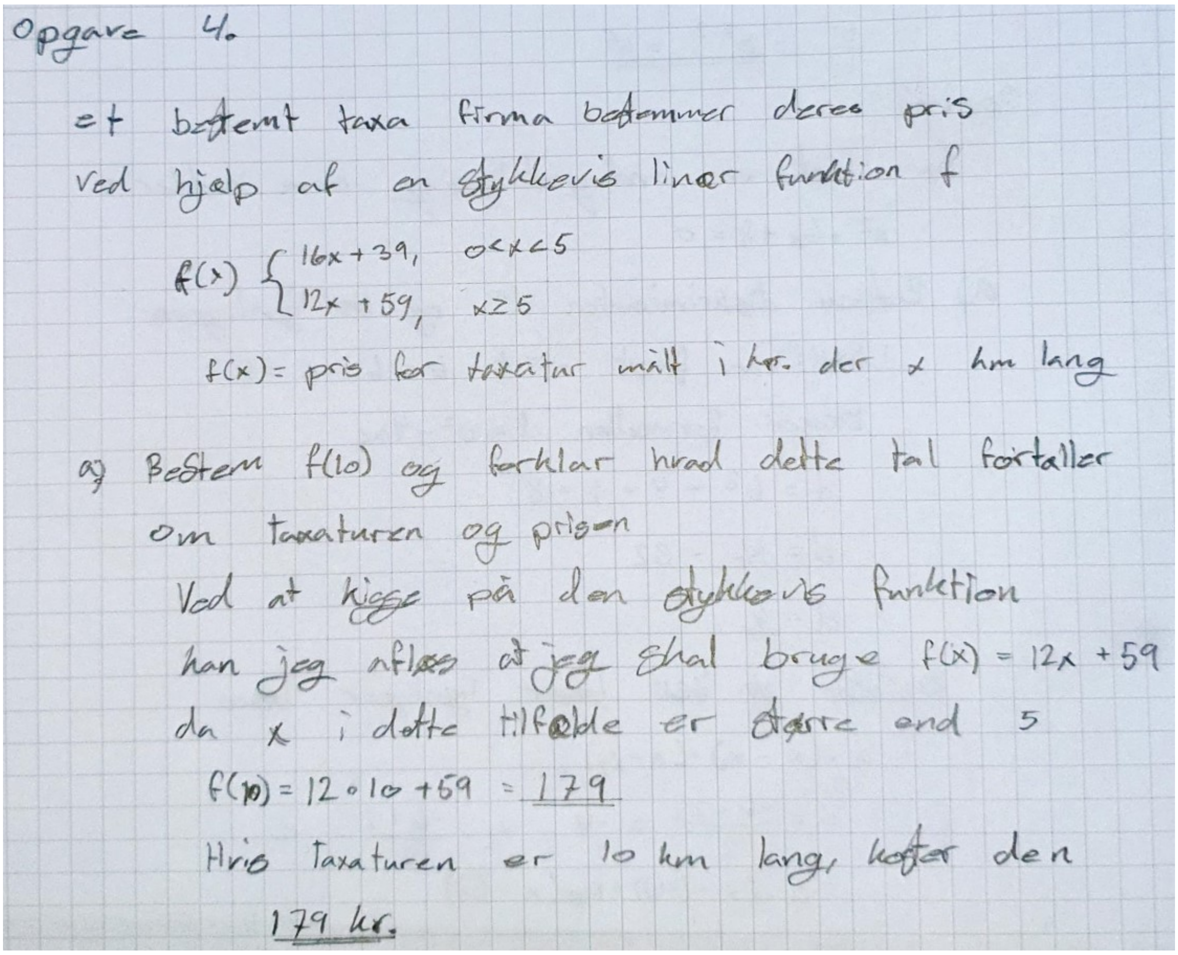
a) Bestem $f(10)$, og forklar, hvad dette tal fortæller om taxaturen og prisen.



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 5,5)

En del elever har problemer med denne opgavetype. Mange kan ikke gennemskue, hvilken af forskrifterne der skal benyttes i beregningen af $f(10)$. I stedet indsættes 10 i begge forskrifter, og fortolkningen af $f(10)$ bliver derfor ofte mærkværdig. Nogle lægger tallene sammen, andre laver "standardfortolkningen" og fortæller, hvad a og b betyder i regneforskrifterne.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 4.

et bestemt taxa firma bestemmer deres pris ved hjælp af en stykkevis linær funktion f

$$f(x)\begin{cases}16x+39, & 0<x<5 \\ 12x+59, & x\geq 5\end{cases}$$

f(x) = pris for taxatur målt i kr. der x km lang

a) Bestem f(10) og forklar hvad dette tal fortæller om taxaturen og prisen

Ved at kigge på den stykkevis funktion kan jeg afløs at jeg skal bruge f(x) = 12x + 59 da x i dette tilfælde er større end 5

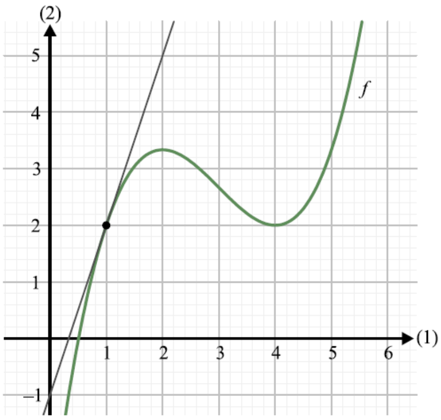
$f(10) = 12 \cdot 10 + 59 = \underline{179}$

Hvis Taxaturen er 10 km lang, koster den <u>179 kr.</u>

9.3.5 Opgave 5 - Funktioner og differentialregning

Opgave 5

Bilag vedlagt

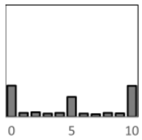


Figuren viser grafen for en funktion f og én af tangenterne til grafen for f.

a) Afgør for hver af følgende påstande, om den er korrekt. Brug bilaget, og begrund svarene.

1) $f(4)=0$.

2) $f'(1)=3$.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 4,9)

Opgaven tester, om eleverne kan skelne mellem funktionsværdi og differentialkvotient, og om de kender den geometriske fortolkning af differentialkvotienten og kan aflæse den tegnede tangents hældning.

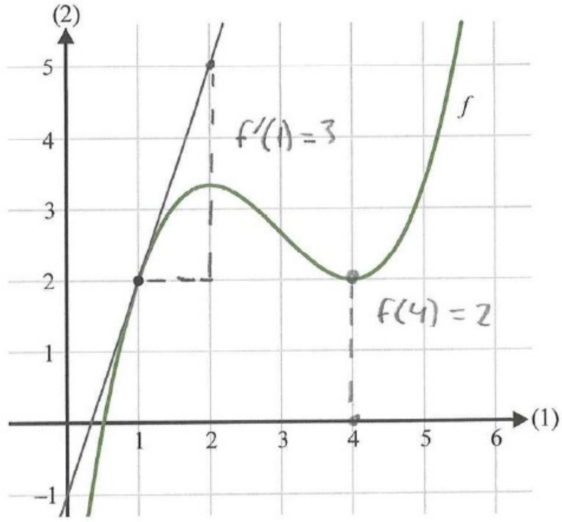
En del elever laver fejl i påstand 1). Derudover ses de "sædvanlige" mangler i denne opgavetype, nemlig manglende forklaring, manglende brug af bilaget og at mange tror, de kun skal finde én sand påstand og derfor undlader at argumentere for, at påstand 1) er forkert.

Da denne opgavetype ofte forekommer i eksamenssættene, er det meget vigtigt at indskærpe over for eleverne, at de skal forholde sig til ALLE påstandene, og at svarene SKAL begrundes.

Bemærk at formuleringer som "Benyt bilaget" eller "Brug bilaget" i spørgsmålsformuleringer ikke er en skærpelse af de generelle krav, der står oplistet på opgavesættenes første side. I princippet kan der gives fuld point for en meget nøje beskrivelse af den fremgangsmåde, hvormed bilaget anvendes - uden at dette vedlægges, men sandsynligheden for, at en sådan beskrivelse er fyldestgørende, er ikke stor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5

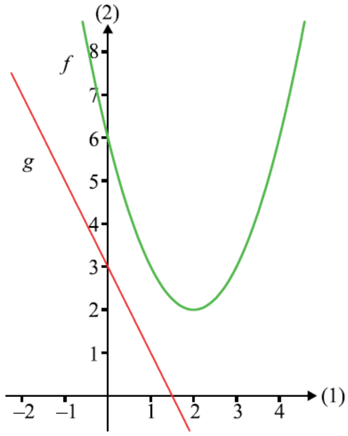


a) 1) $f(4) \neq 0$, da det kan aflæses på grafen, at $f(4) = 2$. $f(x)$ er den korresponderende y-værdi til en x-værdi.

2) $f'(1) = 3$ er sand. $f'(x)$ er tangentens hældningskoefficient, også kaldet tangenthældningen. Det kan aflæses, at går man 1x ud fra tangentens røringspunkt med $f(x)$, går man 3y op for at skære tangenten igen.

9.3.6 Opgave 6 - Distancer (forberedelsesmaterialet)

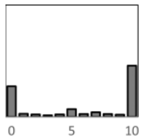
Opgave 6

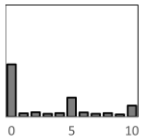


Figuren viser grafen for hver af de to funktioner $f(x) = x^2 - 4x + 6$ og $g(x) = -2x + 3$.

a) Bestem $f'(x)$ og $g'(x)$.

b) Løs ligningen $f'(x) = g'(x)$. Benyt resultatet til at bestemme den mindste lodrette distance mellem graferne for de to funktioner.



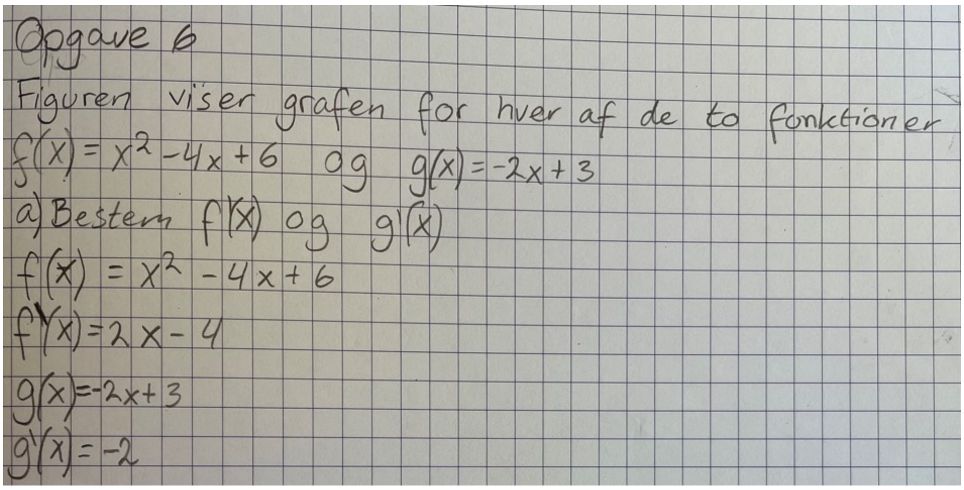


Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 6,0)

Et klassiske spørgsmål om bestemmelse af differentialkvotienten for to simple funktioner. Alligevel er der ca. 30% af eleverne, der får 0 points for deres besvarelse af dette spørgsmål.

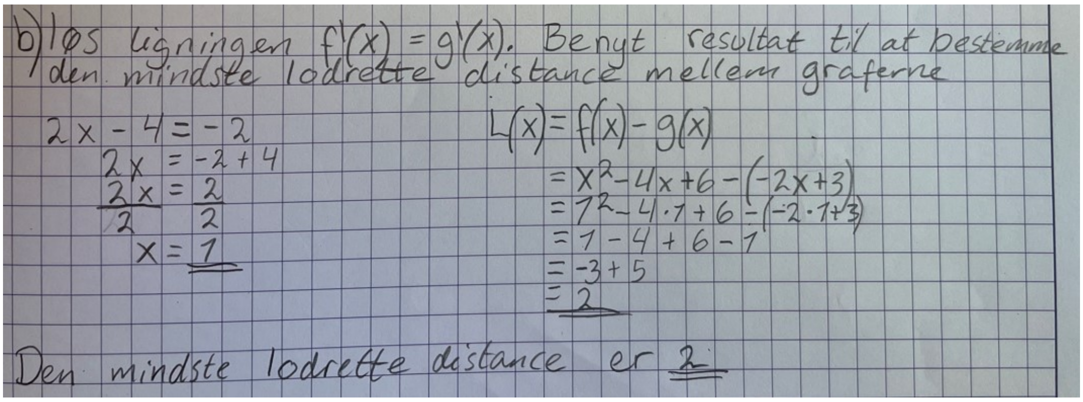
En del censorer nævner, at eleverne ikke laver mellemregninger/viser, at de benytter differentiationsregneregler. Det kan være en god ide at tage et par mellemregninger med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelige resultat skulle gå hen og være forkert.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Spørgsmål 6b (pointgennemsnit: 3,1)
Dette er det spørgsmål i sættet, som eleverne klarer dårligst. Spørgsmålet hører til forberedelsesmaterialet "Distancer".
En del elever forsøger slet ikke at besvare spørgsmålet, måske fordi det virker afskrækkende, hvis man ikke har læst forberedelsesmaterialet tilstrækkeligt grundigt.
Af de elever, der besvarer spørgsmålet, løser en betragtelig del ligningen korrekt, men tror så, at $x = 1$ er den mindste lodrette distance.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



b) løs ligningen $f'(x) = g'(x)$. Benyt resultat til at bestemme den mindste lodrette distance mellem graferne

$$2x - 4 = -2$$
$$2x = -2 + 4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$$
$$x = \underline{\underline{1}}$$

$$L(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x^2 - 4x + 6 - (-2x + 3)$$
$$= 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 - (-2 \cdot 1 + 3)$$
$$= 1 - 4 + 6 - 1$$
$$= -3 + 5$$
$$= \underline{\underline{2}}$$

Den mindste lodrette distance er $\underline{\underline{2}}$

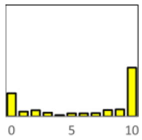
9.4 Delprøve 2

9.4.1 Opgave 7 - Differentialregning

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 2x .$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,\ f(1))$.

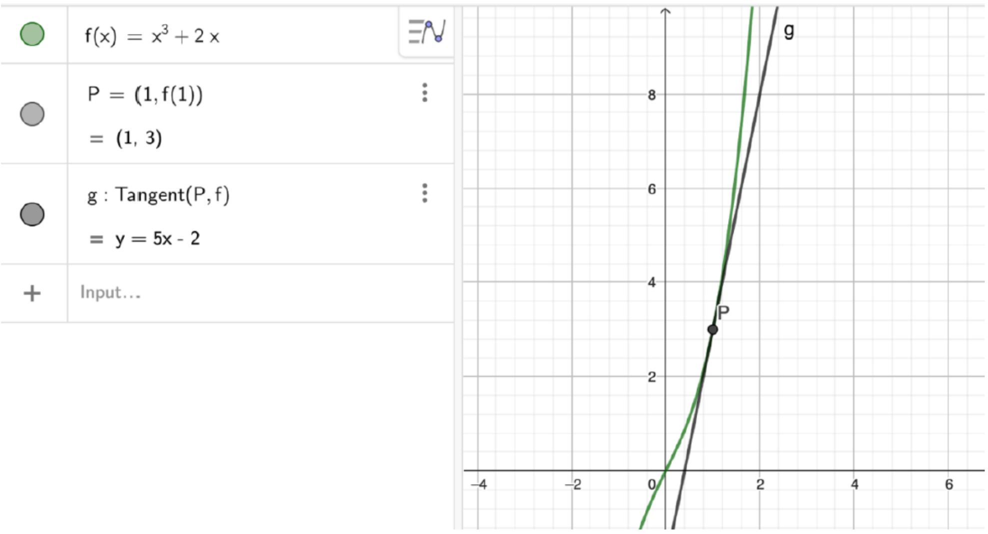


Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 6,2)

En meget klassisk opgave, som langt de fleste løser med et grafværktøj, Det er en knald-eller-fald-opgave, hvor ca. 20% får 0 point.
Typiske fejl er, at tangenten placeres forkert, at beskrivelse af brugen af værktøjsprogrammet mangler, og at konklusionen mangler.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

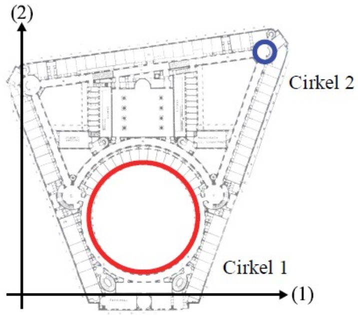
a. Jeg starter med at tegne funktionen og punktet i geogebra
Jeg bruger GeoGebras tangent funktion til at lave en tanget til punktet P
Herved får jeg en ligning for tangent til P som er $y = 5x - 2$
Her vist på et billede fra geogebra.



9.4.2 Opgave 8 - Distancer (forberedelsesmaterialet)

Opgave 8

Figur 1
Billedkilde: earth.google.com



Figur 2

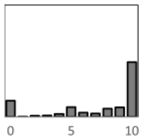
Figur 1 viser Københavns Politigård.
På figur 2 er politigårdens grundplan lagt ind i et koordinatsystem, hvor enheden på begge akser er meter. To af de runde bygningsdele er markeret på figuren.
Den store runde gård kan beskrives med cirkel 1, der har ligningen

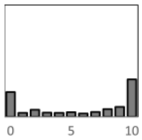
$$(x-54)^2+(y-34)^2=515{,}29\,.$$

a) Bestem centrum C_1 og radius r_1 for cirkel 1.

Et rundt trappetårn kan beskrives med cirkel 2, der har centrum $C_2(109,106)$ og radius $r_2=5$.

b) Bestem den mindste distance mellem de to cirkler.





Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 7,3)

Et klassisk spørgsmål, som mange klarer fint. En del glemmer dog at tage kvadratroden ved bestemmelse af radius.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Cirkel 1 har ligningen.

$$(x-54)^2+(y-34)^2=515{,}29$$

a) Bestem centrum C_1 og radius r_1 for cirkel 1.

Vi starter med at identificere centrum, dette gør vi ved at kigge på cirklens forskrift.

Centrum $C(a,b)$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$(x-54)^2+(y-34)^2=515{,}29$$

Herved aflæser vi C_1 hvor x-koordinatet er 54 og y-koordinatet er 34

$$C_1(54,34)$$

På samme måde identificeres r_1

Radius i anden er lig med 515,29

Derved finder vi radius

$$r_1=\sqrt{r^2}=\sqrt{515{,}29}=22{,}7$$

Cirkel 1. Har centrum $C_1(54,34)$ og radius $r_1=22{,}7$

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 5,8)

Et spørgsmål hørende til forberedelsesmaterialet, og som mange løser ved at benytte formlen fra Indstiksarket. En del løser dog opgaven grafisk. Ved grafisk løsning er det et udpræget problem, at der mangler forklaring på den anvendte metode.
Ca. ¼ af eleverne får kun 0 - 1 point i opgaven. Det er vigtigt at gøre det klart for eleverne, at de skal arbejde meget seriøst med forberedelsesmaterialet. Der er mange points at hente i dette emne, og eksamensopgaverne ligger typisk meget tæt på opgaveeksemplerne i forberedelsesmaterialet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem den mindste distance mellem de to cirkler.

Her anvender vi formlen for mindste distance mellem cirkler.

$$d = |C_1C_2| - r_1 - r_2$$

Distancen mellem $C_1\ og\ C_2$ findes ved brug af formlen for distance mellem to punkter.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cirkel 1: $x_1 = 54\ y_1 = 34$

Cirkel 2: $x_2 = 109\ y_2 = 106$

$$|C_1C_2| = \sqrt{(109 - 54)^2 + (106 - 34)^2} \approx 90{,}60353$$

Herved har vi udregnet $|C_1C_2|$, derpå trækker vi blot de to radiusser sammen, da vi herved får den korteste distance ikke mellem cirklernes centrum men mellem de to cirkel-periferier.

$$d = |C_1C_2| - r_1 - r_2$$

$$r_1 = 22{,}7$$

$$r_2 = 5$$

$$d = 90{,}60353 - 22{,}7 - 5 = 62{,}90353$$

Den korteste distance mellem de to cirkler er derved 62,90353 meter.

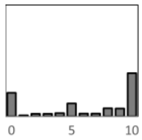
9.4.3 Opgave 9 - Differentialregning

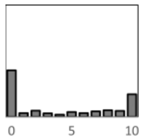
Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x - e^x + 4 .$$

a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x) = 0$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.





Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 6,3)
En helt klassisk opgave i differentialregning.
Langt de fleste benytter CAS-værktøj til differentiationen.
Det volder særligt en del TI-Nspire brugere problemer at vælge det korrekte e, når forskriften skal skrives ind. Konsekvenser ved dette er ikke bare tabte point i dette spørgsmål, men i hele Opgave 9. Det er derfor meget vigtigt at sikre sig, at alle ens elever laver mange opgaver med funktioner indeholdende den naturlige eksponentialfunktion på deres respektive CAS-værktøjer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 9

En funktion **f** er givet ved $f(x):=4\cdot x-e^x+4$ ▸ *Udført*.

a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x)=0$.

Differantialkvotienten $f'(x)$ (tangenthældningen for $f(x)$) beregnes:

$\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ $4.-(2.71828)^x$

Differantialkvotienten er hermed $4-(2.71828)^x$.

Vandrette tangenter $f'(x)=0$ beregnes:

$\text{solve}\left(4-(2.71828)^x=0,x\right)$ ▸ $x=1.3863$

Løsningen til ligningen $f'(x)=0$ er hermed $x=1.3863$.

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 4,1)
Igen en klassisk opgave i differentialregning, som mange elever får 0 points i, og hvor ca. halvdelen får mellem 0 og 2 points. Eleverne, der kommer igennem, løser oftest opgaven grafisk.
b)-spørgsmålet bliver sjældent koblet sammen med a)-spørgsmålet, en del kigger kun på grafen for f, og mange har svært ved at skrive monotoniintervallerne op. Mange besvarelser bærer præg af at være skabelonbesvarelser, hvor resultatet blot angives i et skema uden forklaring.

Idet funktionen ikke er begrænset, vil det ikke være muligt at få det maksimale antal point for besvarelsen, hvis denne alene indeholder et grafisk argument - der skal henvises til resultatet i a). Ikke desto mindre kan det være en god ide at lære eleverne, at det altid giver god mening at tegne grafen for f og evt. benytte CAS-værktøjets ekstremumsværktøj, om ikke andet så som en kontrol.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem monotoniforholdene for **f**.

Jeg ved at $\mathbf{f}'(x)=0$ når $x=1.3863$, denne information kan jeg bruge til at se på monotoniforholdne ved at vælge et tilfældigt tal der er mindre og større end $x=1.3863$.

Derefter indsætter jeg det i formlen $\mathbf{f}'(x)=4-(2.71828)^x$.

$\mathbf{f}(1)=4-(2.71828)^1$ ▸ $\mathbf{f}(1)=1.28172$ --> her er der en positiv tangenthældning

$\mathbf{f}(2)=4-(2.71828)^2$ ▸ $\mathbf{f}(2.)=-3.38905$ --> her er der en negativ tangenthældning

x		1.3863	
$f'(x)$	+	0	-

Det ses at:

f er voksende i intervallet:

$]-\infty;1.3863[$

f er aftagende i intervallet:

$]1.3863;\infty[$

Der er tale om det lokale masksimum når $x=1.3863$.

9.4.4 Opgave 10 - Regression og residualer

Opgave 10

Billedkilde: obiettivo2030.it

Organisationen "Global Footprint Network" beregner hvert år, hvor mange ressourcer menneskeheden samlet forbruger dét år. Ressourceforbruget angives i "antal jordkloder". Tabellen viser data fra en række årstal.

Antal år efter 1970	1	14	21	39	44	49	50	51
"Antal jordkloder"	1,00	1,15	1,29	1,60	1,71	1,76	1,56	1,74

I en model beskrives sammenhængen ved en lineær funktion med forskriften

$$f(x) = a \cdot x + b\,,$$

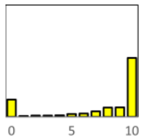
hvor $f(x)$ er "antal jordkloder", og x er antal år efter 1970.

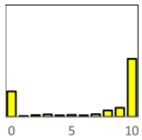
a) Bestem tallene a og b ved regression.

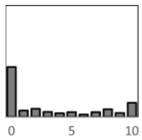
b) Benyt modellen til at bestemme "antal jordkloder" i 2030.

Under coronaepidemien i 2020 forbrugte menneskeheden færre ressourcer end modellen forudsiger.

c) Benyt forskriften og tabeloplysningerne til at beregne residualet for 2020.







Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 7,5)
Et klassisk spørgsmål vedrørende regression, som de fleste klarer fint. Nogle mangler dog dokumentation, og nogle angiver ikke a og b, men blot regneforskriften.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

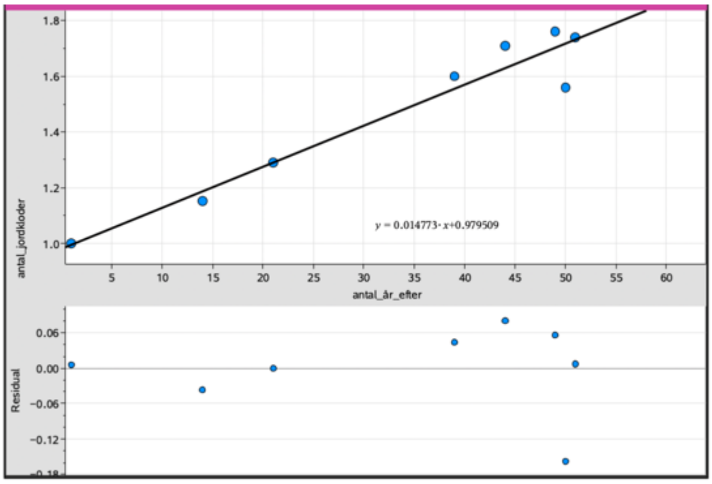
Organisationen "Global Footprint Network" beregner hvert år, hvor mange ressourcer menneskeheden samlet forbruger dét år. Ressourceforbruget angives i "antal jordkloder". Tabellen viser data fra en række årstal.

I en model beskrives sammenhængen ved en lineær funktion med forskriften
$f(x)=a\cdot x+b$
hvor f(x) er "antal jordkloder" og x er antal år efter 1970

a) Bestem tallene a og b ved regression
Jeg har insat tallene fra tabellen, og lavet et diagramer og statistik over tallene. Derfter brugte jeg funktion: 'linæer regression'
Derfor kan jeg konkludere at
a=0,0147
b=0,979
$f(x):=0.0145\cdot 50+0.979$ ▸ *Udført*

	A antal_...	B antal_j...
1	1.	1.
2	14.	1.15
3	21.	1.29
4	39.	1.6
5	44.	1.71
6	49.	1.76
7	50.	1.56
8	51.	1.74

B antal_jordkloder



Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 6,9)

Spørgsmålet besvares ofte ved at indsætte i regneforskriften fundet i a). Nogle løser opgaven grafisk. De fleste klarer spørgsmålet fint.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Benyt modellen til at bestemme "antal jordkloder" i 2030.

Hvis man kigger på modellen kan man se at der 60 år efter, i år 2030 vil være ca. 1,85 "jordkloder".

Det kan regnes efter ved hjælp af funktionen: $g(x):=0.0145\cdot x+0.979$

Jeg indsætter bare 60 på x plads, og får den til at udregne det for mig.

$g(x)=0.0145\cdot 60+0.979$ ▸ $g(x)=1.849$

Derfor kan jeg konkludere, at der vil være 1,85 "jordkloder" i 2030.

Spørgsmål 10c (pointgennemsnit: 3,3)

Et spørgsmål, som meget få besvarer korrekt, og som rigtig mange springer helt over.

Det er første gang, der spørges til et konkret residual i en eksamensopgave på hf B.

Mange virker ikke til at have en forståelse af, hvad der forstås ved et residual. Nogle tegner et residual-plot, og nogle kommenterer derefter på modellens anvendelighed - de falder således tilbage på opgavetyper, kendt fra C-niveauet.

Noget kunne tyde på, at residualer bliver lidt "glemt" på B-niveauet på visse hold, og at der er behov for at genopfriske definitionen af et residual.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c. Ifølge oplysninger i tabellen var "antal jordkloder" 1,56. Ifølge forskriften er det dog 1,72 som beregnet af CAS i GeoGeBra.

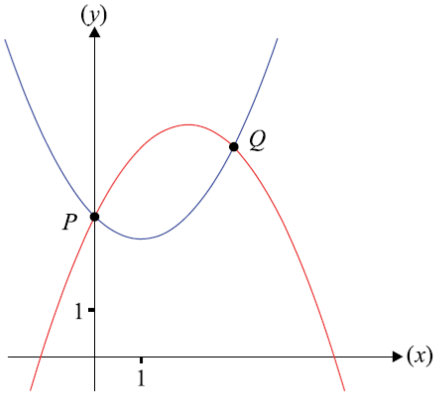
CAS

1	g(50) ≈ **1.72**
2	

Residualet er beregnet ved at finde forskellen mellem observeret y-værdi og tilsvarende y-værdi i modellen: $1{,}56 - 1{,}72 = -0{,}16$. Ergo er residualet for for 2020 altså $\underline{\underline{-0{,}16}}$

9.4.5 Opgave 11 - Skæringspunkter og vinkel mellem linjer

Opgave 11



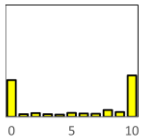
På figuren ses to parabler givet ved ligningerne

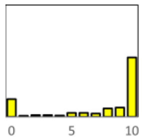
$$y = 0,5x^2 - x + 3 \quad \text{og} \quad y = -0,5x^2 + 2x + 3 \ .$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af parablernes skæringspunkter P og Q.

En ret linje l går gennem punkterne P og Q.

b) Bestem den spidse vinkel, som l danner med y-aksen.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 7,4)

Flertallet løser opgaven grafisk, og det går godt for mange. Nogle elever glemmer dog at beskrive brugen af værktøjsprogrammet.
Løses opgaven algebraisk, glemmer nogle elever at bestemme andenkoordinaterne.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

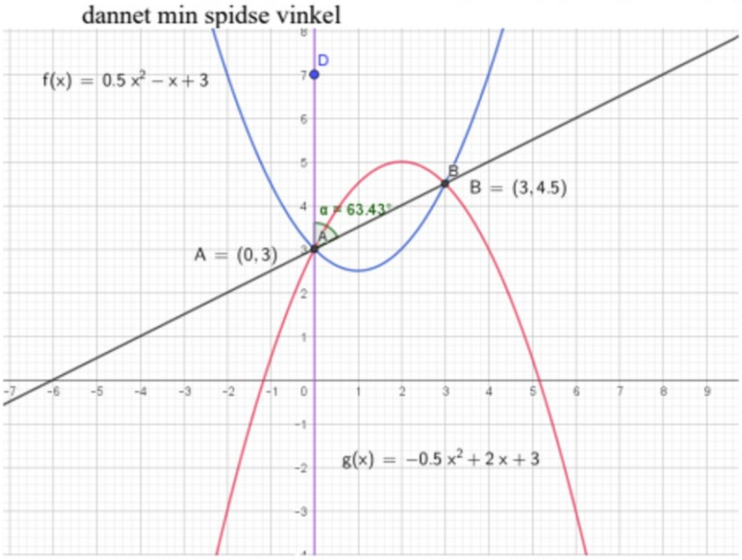
Ikke indsendt af rettegruppen.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 5,4)

Flertallet løser opgaven grafisk. Nogle måler dog den forkerte vinkel: En del angiver vinklen med x-aksen og andre vinklen med parablen. Nogle angiver også den stumpe vinkel.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem den spidse vinkel, som l danner med *y*-aksen.
Foruden det jeg har gjort i opgave A, har jeg nu tegnet en linje gennem de to skæringspunkter mes linjeværktøjet.
Derefter har jeg tegnet en linje ind om følger y-aksen.
Da jeg i forvejen har de to skæringspunkter, mangler jeg dog stadig et punkt til at kunne lave en vinkel med. Så jeg har derfor sat et punkt i (0,7) lidt længere op af y-aksen end punkt A for at kunne lave en vinkel.
Derefter brugte jeg mit vinkelværktøj, hvor jeg så trykkede på punkter B, A, og D og fik dannet min spidse vinkel

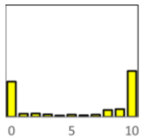


Så den spidse vinkel linjen der går gennem de to skæringspunkter danner med y-aksen er 63.43 grader.

9.4.6 Opgave 12 - Binomialsandsynlighed og test

Opgave 12

Billedkilde: komputer.dk

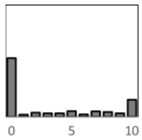


I 2021 var 22 % af alle betalinger i danske fysiske butikker mobilbetalinger.
Den stokastiske variabel X betegner antallet af mobilbetalinger blandt 200 tilfældigt udvalgte betalinger. Det antages, at X er binomialfordelt med antalsparameteren $n = 200$ og sandsynlighedsparameteren $p = 0,22$.

a) Bestem sandsynligheden $P(X = 50)$.

På en skole ønsker en klasse at undersøge mobilbetalinger i kantinen ved at teste nulhypotesen

H_0 : 22 % af alle betalinger i kantinen er mobilbetalinger.



Klassen har observeret 200 tilfældigt udvalgte betalinger i kantinen. Det viser sig, at 70 af disse var med mobiltelefon.

b) Bestem acceptområdet for et dobbeltsidet binomialtest på 5 % signifikansniveau, og forklar, hvorfor nulhypotesen skal forkastes.

Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 5,7)
En knald-eller-fald-opgave. Godt 30% får ingen points i denne mindstekravsopgave.
Benyttes formlen for binomialsandsynlighed, løber nogle ind i problemer, hvis $K(200, 50)$ udregnes separat.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

I 2021 var 22% af alle betalinger i danske fysiske butikker mobilbetalinger. Den stokastiske variabel X betegner antallet af mobilbetalinger blandt 200 tilfældigt udvalgte betalinger. Det antages at X er binomialfordelt med antalsparameteren **n**:=200 og sandsynlighedsparamteren **p**:=0.22

a) Bestem sandsynligheden P(X=50)
Jeg bruger binompdf værktøjet:
binomPdf(**n**,**p**,50) ▸ 0.039106

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 3,2)
Spørgsmålet er et standard-spørgsmål i tosidet binomialtest, men det er ikke desto mindre den opgave i delprøve 2, hvor eleverne scorer lavest. Dette er ikke nogen overraskelse, for emnet er svært: Det kræver (for de fleste) tid og koncentreret tankevirksomhed at forstå test-tankegangen.
Mange elever benytter en skabelon fra værktøjsprogrammerne, men det kniber alligevel med at finde det korrekte acceptområde. Nogle elever forsøger i stedet at bestemme et konfidensinterval, og andre karakteriserer 70 som et exceptionelt udfald.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

På en skole ønsker en klasse at undersøge mobilbetalinger i kantinen ved at teste nulhypotesen:

H_0: 22% af alle betalinger i kantinen er mobilbetalinger

Klassen har observeret 200 tilfældigt udvalgte betalinger i kantinen. Det viser sig, at 70 af disse var med mobiltelefon.

b) Bestem acceptområdet for et dobbeltsidet binomialtest på 5% signifikansniveau, og forklar, hvorfor nulhypotesen skal forkastes

Den kritiske mængde bestemmes.

binomCdf(**n**,**p**,0,32) ▸ 0.021888

binomCdf(**n**,**p**,0,33) ▸ 0.033391

Den nedre del af den kritiske mængde er : {0,1,...,32}

binomCdf(**n**,**p**,57,200) ▸ 0.018546

binomCdf(**n**,**p**,56,200) ▸ 0.027216

Den øvre del af den kritiske mængde er:
{57,58,...,200}

Så acceptområdet er mellem 33 til 56

Resultatet af undersøgelsen giver 70 succeser. Da 70 ligger udenfor acceptområdet, skal nulhypotesen forkastes.

10 Opsamling på elevbesvarelserne af hf B-sættet

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i hf B-sættet er det værd særligt at fremhæve følgende:

Spørgsmålene, som eleverne klarer bedst, omhandler
- lineær regression,
- reduktion og
- analytisk geometri (skæring mellem parabler og bestemmelse af cirkelligning).

De af mindstekravsopgaverne, som gik dårligst, handler om
- punktsandsynlighed i en binomialfordeling,
- løsning af andengradsligning og
- differentiation af simple funktioner.

De opgaver, der faldt sværest ud, handler om
- bestemmelse af mindste lodrette afstand mellem grafer (opgavetypen er behandlet i det nye forberedelsesmateriale om "Distancer),
- bestemmelse af funktionsværdi i en gaffelforskrift
- binomialtest og
- bestemmelse af et konkret residual.

Opgaver fra forberedelsesmaterialet om distancer scorer i gennemsnit 3,1 (opgave 6b), og ca. en fjerdedel af eleverne får kun 0 - 1 point i spørgsmål 8b. Det ser altså ud til, at det har været vanskeligt for eleverne at hente points i dette emne. De stillede eksamensopgaverne har ligget tæt på opgaverne i forberedelsesmaterialet.

Det er ikke en overraskelse, at spørgsmål i binomialtest er svære for eleverne, fordi tankegangen er svær. Det er måske lidt mere overraskende, at den mindstekravsopgave, som går dårligst, er bestemmelse af binomialsandsynlighed, da de fleste CAS-værktøjer relativt let kan beregne disse.

To af spørgsmålene i differentialregning volder også ganske store problemer, nemlig 6a om differentiation af to simple funktioner uden CAS og 9b om bestemmelse af monotoniforhold. Ca. 30% af eleverne får 0 points for deres besvarelse af 6a, og ca. halvdelen af eleverne for 0 - 2 points for deres besvarelse af 9b.

En del elever mister points, fordi de ikke argumenterer tilstrækkeligt for deres svar. Det gælder fx i spørgsmål, hvor det skal afgøres, om nogle påstande er korrekte eller ej, som fx i spørgsmål 5a. Her kan elever unødvendigt miste points, muligvis blot, fordi de ikke er opmærksomme på kravet i denne type opgave om, at de *skal* forholde sig til alle påstandene, og at alle svarene skal begrundes, for at få alle 10 points.

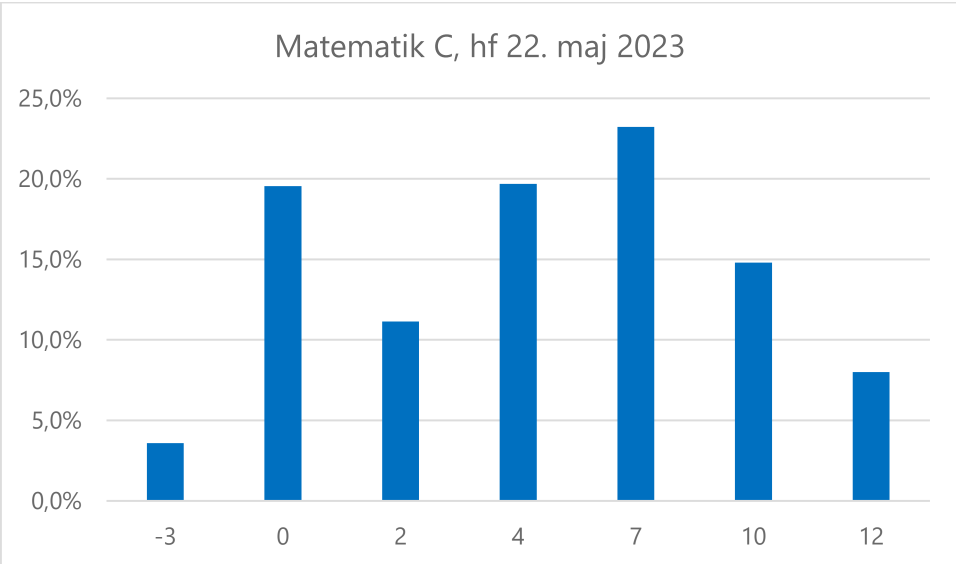
11 Hf C-niveau

Prøveresultat matematik C, hf 22. maj 2023

Antal eksaminander til prøve **7951**
Karaktergennemsnit **5,0**
Andel ikke-beståede **23,1 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	3,6%	19,6%	11,1%	19,7%	23,2%	14,8%	8,0%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-12	9-53	49-63	60-87	84-117	114-138	135-150

11.1 Klassificering af underspørgsmål

De er 2218 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 11 opgaver med ialt 15 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

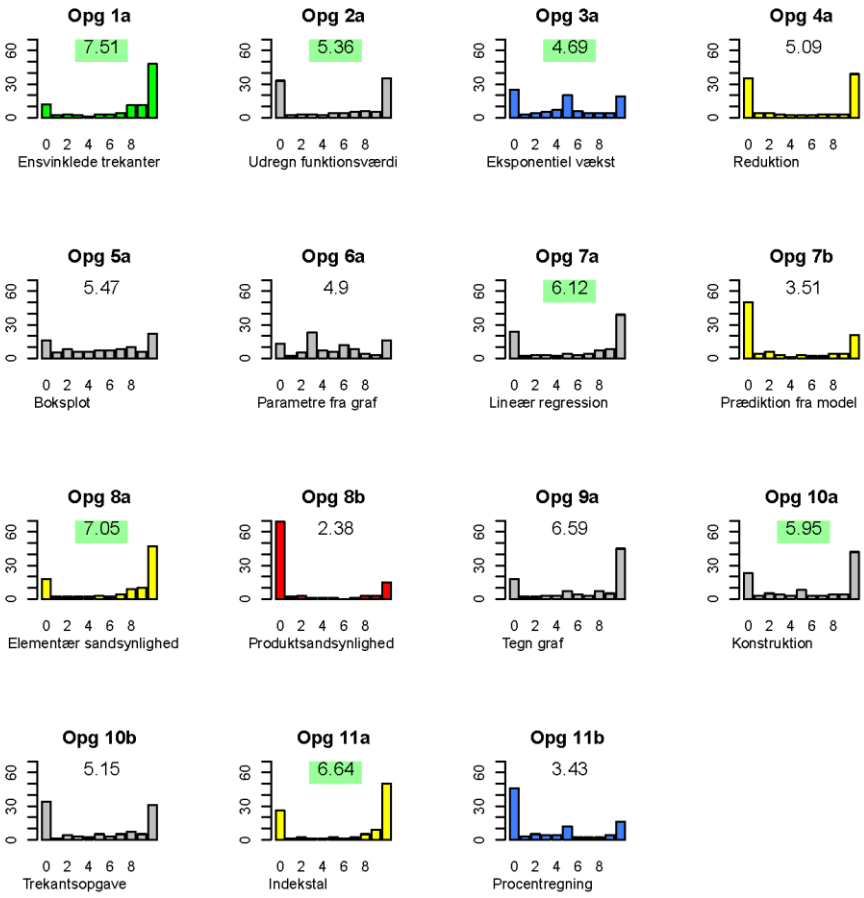
	Antal
Mindstekrav (grøn)	7
Ikke-mindstekrav (hvid)	8

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	6
Delprøve 2	9

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 28 nedenfor.

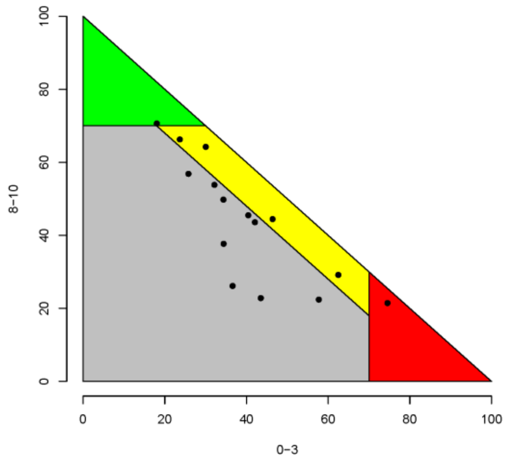


Figur 28: *Resultater for de 15 spørgsmål for HF-C 22. maj 2023. Mindstekravsopgaverne er markeret med en grøn kasse i overskriften. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Standard	Midtertop
1	1	4	2	7

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

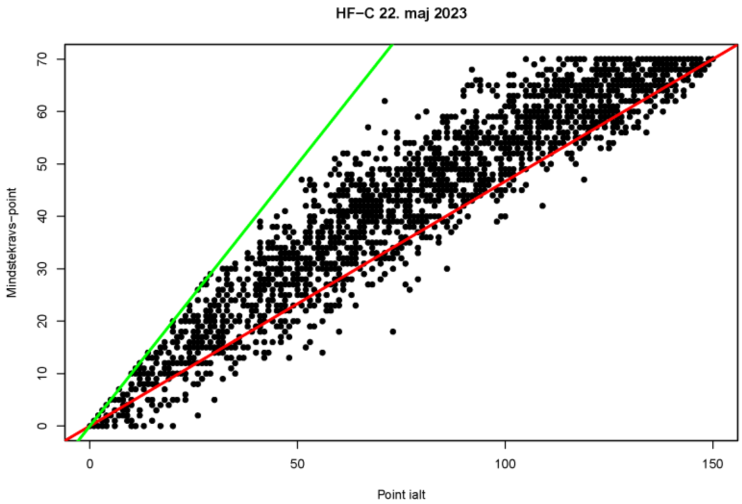


Figur 29: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for HF-C 22. maj 2023. Spørgsmål der klassificeres som midtertop (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	* Ensvinklede trekanter	7.51
8a	* Elementær sandsynlighed	7.05
11a	* Indekstal	6.64
9a	Tegn graf	6.59
7a	* Lineær regression	6.12
10a	* Konstruktion	5.95
5a	Boksplot	5.47
2a	* Udregn funktionsværdi	5.36
10b	Trekantsopgave	5.15
4a	Reduktion	5.09
6a	Parametre fra graf	4.9
3a	* Eksponentiel vækst	4.69
7b	Prædiktion fra model	3.51
11b	Procentregning	3.43
8b	Produktsandsynlighed	2.38

Tabel 13: *Spørgsmålene for HF-C 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* ***mindstekrav,*** *er farvet grønne og markeret med en stjerne.*



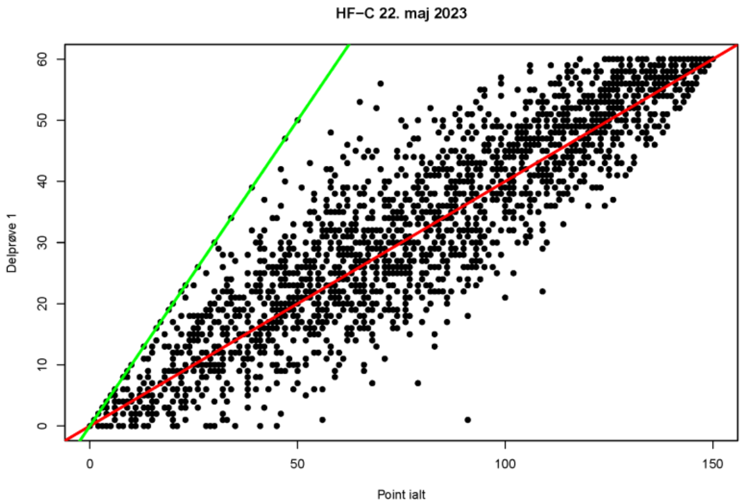
Figur 30: *HF-C 22. maj 2023, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 47 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får mere ud af mindstekravsopgaverne end af de øvrige, men ikke så meget som man kunne forvente. Kun de allerdygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	∗ Ensvinklede trekanter	7.51
8a	Elementær sandsynlighed	7.05
11a	Indekstal	6.64
9a	Tegn graf	6.59
7a	Lineær regression	6.12
10a	Konstruktion	5.95
5a	∗ Boksplot	5.47
2a	∗ Udregn funktionsværdi	5.36
10b	Trekantsopgave	5.15
4a	∗ Reduktion	5.09
6a	∗ Parametre fra graf	4.9
3a	∗ Eksponentiel vækst	4.69
7b	Prædiktion fra model	3.51
11b	Procentregning	3.43
8b	Produktsandsynlighed	2.38

Tabel 14: *Spørgsmålene for HF-C 22. maj 2023, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* ***uden adgang til CAS*** *er farvet lilla og markeret med en stjerne.*



Figur 31: *HF-C 22. maj 2023. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får nogenlunde lige meget ud af de to delprøver.

11.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra hf C - sættet fra den 22. maj 2023 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

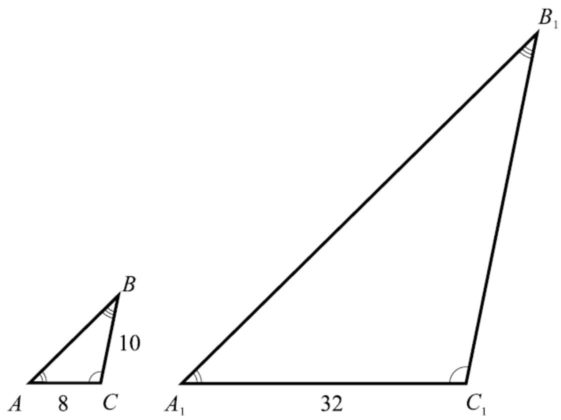
Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

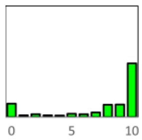
Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

11.3 Delprøve 1

11.3.1 Opgave 1 - Ensvinklede trekanter

Opgave 1





Figuren viser to ensvinklede trekanter. Nogle af trekanternes mål fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden B_1C_1.

Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 7,5)
En klassisk startopgave, og den opgave i sættet, som eleverne klarer bedst. Kun 12% får 0 points.
De fleste får det korrekte resultat, men der mangler ofte mellemregninger og forklaringer med brug af fagudtryk som skalafaktor og ensliggende sider.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 1.

a) Bestem længden af siden B_1C_1, også kaldt a_1.

Jeg benytter formlen: $\frac{b_1}{b} = k$ fordi $a_1 = k \cdot a$

$k = \frac{32}{8} = \frac{16}{4} = 4$

$a_1 = 4 \cdot 10 = 40$

$\underline{\underline{a_1 = 40}}$

11.3.2 Opgave 2 - Lineær funktion og beregning af funktionsværdi

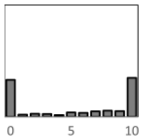
Opgave 2 En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = 5x - 3 .$$

a) Udfyld nedenstående tabel. Brug bilaget, og begrund dit svar.

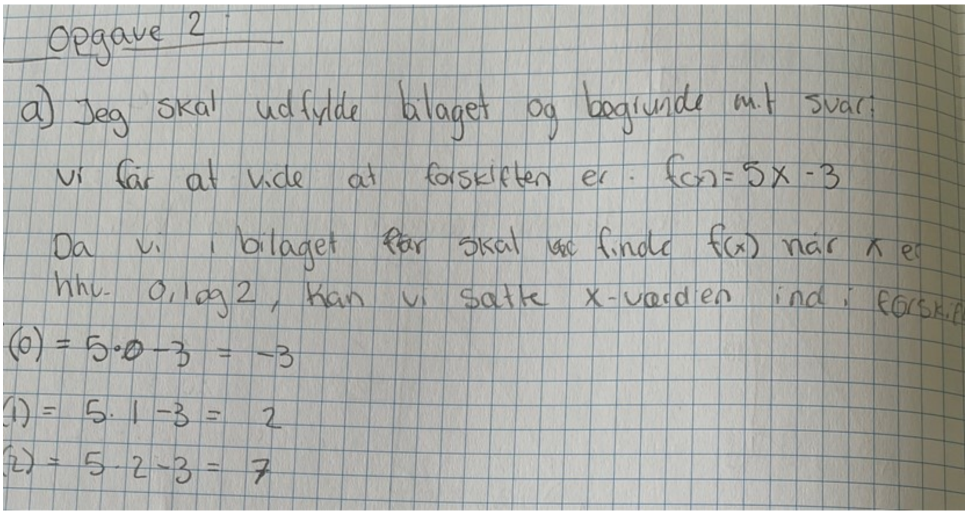
Bilag vedlagt

x	0	1	2
$f(x)$			



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 5,4)
En mindstekravsopgave, som mange har svært ved at løse. Mere end 30% får ingen points.
Opgaven er i princippet let, idet der blot skal oversættes fra forskrift til tabel, men denne type opgave har ikke været stillet ret tit i eksamenssættene på hf C.
Udover at mange elever ikke kan udfylde tabellen korrekt, så er en typisk mangel, at en del elever undlader at begrunde deres svar.
De gode elever løser typisk opgaven ved at indsætte de tre x-værdier i forskriften og lave en detaljeret udregning i hvert tilfælde, eller ved at udnytte viden om konstanterne a og b for den lineære funktion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 2

a) Jeg skal udfylde bilaget og begrunde mit svar.
Vi får at vide at forskriften er: $f(x) = 5x - 3$
Da vi i bilaget ~~får~~ skal ~~vi~~ finde $f(x)$ når x er hhv. 0, 1 og 2, kan vi sætte x-værdien ind i forskrift

$(0) = 5 \cdot 0 - 3 = -3$

$(1) = 5 \cdot 1 - 3 = 2$

$(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$

Man kan også finde f(x) på en anden måde.
Vi kan nemlig se forskriften er linenær, da den passer ind i den linenær funktions forskrift: $f(x) = ax + b$
hvor a er hældningskoecifficienten og b er skæring på y-aksen.

Derfor kan man også finde f(x) ved at sige når ~~x bliver 1 større bliver f(x)~~ 5 man går 1 ud af x-aksen ~~går~~ stiger y-aksen med 5.
Og vi ved at skæring på y-aksen er -3, som også er f(0).

Dermed kan man udfylde tabellen på bilaget

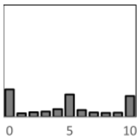
11.3.3 Opgave 3 - Eksponentielle udviklinger

Opgave 3 Nogle forskere har i et forsøg undersøgt udviklingen i antallet af mus i et afgrænset område. Ved forsøgets start var der 80 mus i området. Antallet af mus i området voksede med 45 % pr. år.
Det oplyses, at udviklingen i antallet af mus kan beskrives ved en eksponentiel funktion

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor $f(x)$ er antallet af mus i området x år efter forsøgets start.

a) Bestem tallene a og b. Begrund dit svar.



Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 4,7)
En mindstekravsopgave, og en helt klassisk opgave i eksponentielle udviklinger. Pointfordelingen afspejler, at ca. 75% kan angive b-værdien (med eller uden forklaring), mens meget få kan angive a korrekt.
Typiske fejl er, at eleverne skriver $a = 0{,}45$ eller $a = 45\%$ eller $a = 45$. Desuden kaldes a hyppigt for stigningstal/hældning. I mange opgaver mangler forklaringerne helt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg 3

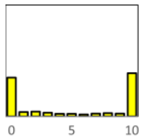
a. $f(x) = b \cdot a^x$, $f(x) = 80 \cdot 1{,}45^x$

b = startsværdien, eller år 0, der hvor den rammer x-aksen = 80

a = fremskrivningsfaktoren = D = 1+r = 1+0,45 = 1,45 = a>1

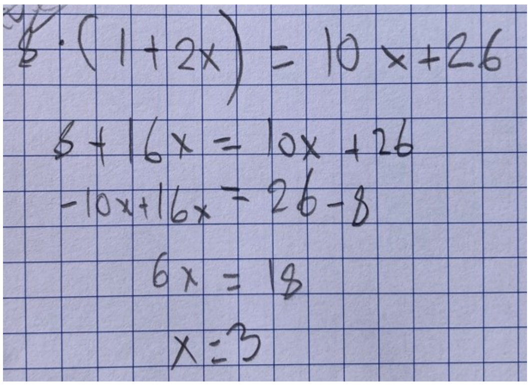
11.3.4 Opgave 4 - Ligninger

Opgave 4 a) Løs ligningen $8\cdot(1+2x)=10x+26$.



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 5,1)
En svær opgave for mange elever. De har specielt svært ved at gange ind i parentesen.
Mange af de elever, der får 0 points, har helt sprunget opgaven over, måske fordi de er blevet afskrækket af parentesen i første linje. Det er derfor meget vigtigt at gøre det klart for eleverne, at der kan være mange points at hente i en ligningsopgave, selvom man laver (flere) fejl undervejs og ender med et forkert resultat.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



11.3.5 Opgave 5 - Beskrivende statistik

Opgave 5 Eleverne i en hf-klasse med 18 elever har svaret på spørgsmålet:

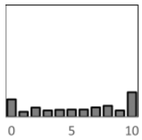
Hvor mange minutter bruger du på transport for at komme i skole?

Svarene ses i nedenstående tabel.

Bilag vedlagt

5	8	10	13	15	16	17	20	24	26	30	35	35	39	42	48	50	54

a) Bestem det udvidede kvartilsæt, og tegn et boksplot for fordelingen af transporttid. Brug bilaget.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 5,5)
Mange elever kan ikke bestemme kvartilerne, og meget få begrunder, hvordan de er kommet frem til kvartilsættet. Første del af bilaget bruges typisk ikke, og udregningen af medianen vises ikke.
Mange elever tegner kun et boksplot, og dette er tit meget upræcist tegnet. Maksimum og minimum er oftest korrekt afsat, mens ét eller flere af kvartilerne typisk er afsat forkert.
Bemærk at formuleringer som "Benyt bilaget" eller "Brug bilaget" i spørgsmålsformuleringer ikke er en skærpelse af de generelle krav, der står oplistet på opgavesættenes første side. I princippet kan der gives fuld point for en meget nøje beskrivelse af den fremgangsmåde, hvormed bilaget anvendes - uden at dette vedlægges, men sandsynligheden for, at en sådan beskrivelse er fyldestgørende, er ikke stor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5

Se bilag.

Minimum = 5

Median = 25

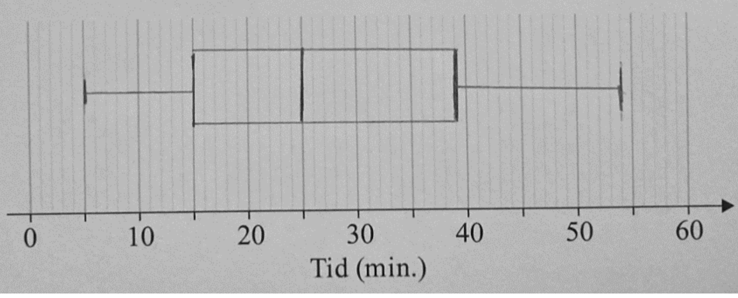
Maksimum = 54

Nedre kvartil Q1 = 15

Opgave 5

5	8	10	13	15	16	17	20	24	26	30	35	35	39	42	48	50	54

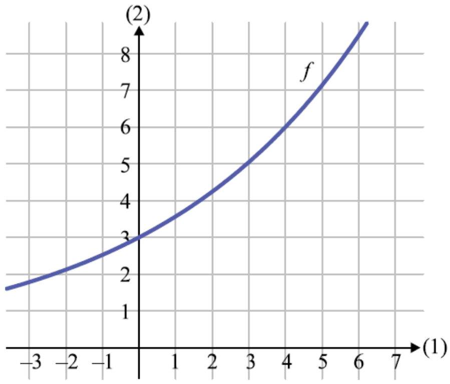
Minimum Q1 Median = 25 Q3 Maksimum



11.3.6 Opgave 6 - Eksponentielle udviklinger

Opgave 6

Bilag vedlagt



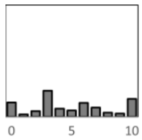
Figuren viser grafen for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$.

a) Afgør for hver af følgende påstande, om den er korrekt. Brug bilaget og begrund svarene.

1) $b = 3$.

2) a er mindre end 1.

3) Fordoblingskonstanten for f er lig med 4.



Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 4,9)

Mange kan besvare 1), men langt de fleste har problemer med 2) og 3). Meget få får maksimumpoints. Mange elever argumenterer ikke for deres svar, og en del bruger heller ikke bilaget i deres argumentation.
Typiske fejl i 2):
De fleste tænker på fremskrivningsfaktoren som en hældning, hvilket betyder, at $a < 1$ godtages af mange, som f.eks. blot tjekker, hvor meget y vokser, når x vokser fra 0 til 1. Når der korrekt skrives, at funktionen er voksende, refererer meget få til teorien (f.eks. "voksende, når $a < 1$").
Typiske fejl i 3):
Det er ikke altid klart for eleverne, at det er y-værdien, der skal fordobles.
Det forklares ikke, at $T_2 = x_2 - x_1$, der skrives blot, at tallet er 4.

Det er meget vigtigt at indskærpe over for eleverne, at der skal argumenteres for svarene i denne type opgave, og at der er en del points at hente ved at tegne noget relevant på bilaget.
Bemærk at formuleringer som "Benyt bilaget" eller "Brug bilaget" i spørgsmålsformuleringer ikke er en skærpelse af de generelle krav, der står oplistet på opgavesættenes første side. I princippet kan der gives fuld point for en meget nøje beskrivelse af den fremgangsmåde, hvormed bilaget anvendes - uden at dette vedlægges, men sandsynligheden for, at en sådan beskrivelse er fyldestgørende, er ikke stor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

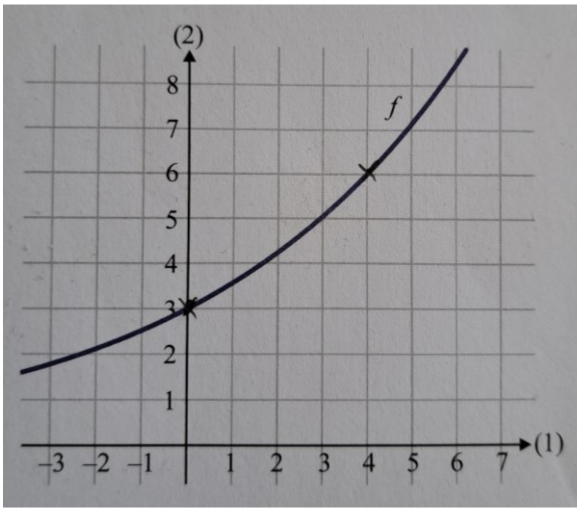
Opgave 6) Figur viser graf for en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$

a) Afgør for hver af følgende påstande, om den er korrekt

1) $b = 3$ Denne påstand er korrekt, eftersom den siger at skæring med y-aksen / begyndelsesværdi er på 3 og det kan vi se på grafen er sandt

2) a er mindre end 1. Denne påstand er forkert. I en eksponentielt voksende funktion, er $a > 1$

3) Fordoblingskonstant for f er lig med 4. Dette er korrekt, Hvis vi starter i punkt (0,3). Altså hvor x er 0 og y er 3. Hvis vi bevæger os 4 ud på x-aksen, vil grafen skære i 6 med y-aksen. Altså bliver y fordoblet hvis vi går 4 ud på x-aksen. Sand påstand



11.4 Delprøve 2

11.4.1 Opgave 7 - Regression

Opgave 7

Billedkilde: brother.dk

Tabellen viser, hvor lang tid en bestemt printer bruger på at udskrive et antal sider.

Antal sider	2	5	10	13	19	20
Tid (sekunder)	17	22	38	43	59	62

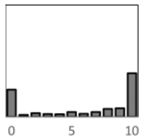
I en model kan sammenhængen beskrives ved en lineær funktion

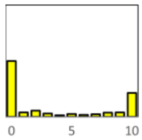
$f(x) = ax + b$,

hvor $f(x)$ er tiden (målt i sekunder), det tager at udskrive x sider.

a) Bestem tallene a og b ved lineær regression.

b) Hvor mange sider kan printeren udskrive på 80 sekunder ifølge modellen?





Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 6,1)

En klassisk eksamensopgave i regression, men en del elever kan være blevet forvirrede over, at tiden i denne opgave er den afhængige variabel. 25% får ingen points i denne opgave.
Typiske fejl er, at der byttes om på de to variable, og at a og b ikke angives i konklusionen.
Enkelte bytter om på a og b.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Tabellen viser, hvor lang tid en bestemt printer bruger på at udskrive et antal sider.
I en model kan sammenhængen beskrives ved en lineær funktion:

f(x) = ax + b

f(x) er tiden målt i sekunder

x er antallet af udskrevne sider

Antal sider	2	5	10	13	19	20
Tid (sekunder)	17	22	38	43	59	62

Lineær regression udført vha. WordMat: $R^2 = 0{,}9956629543$

$$y = 2{,}532956685x + 11{,}03766478$$

a)
a = 2,532956685 er den tid det tager printeren at printe ét ark

b = 11,03766478 er begyndelsestiden før printeren starter udprintning

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 3,5)
Et klassisk spørgsmål, som mange elever ikke får points i. Mange beregner $f(80)$ i stedet for at løse ligningen $f(x) = 80$. En forklaring er nok, at tiden her er den afhængige variabel, hvilket eleverne ikke er vant til.
Det er i almindelighed vigtigt at gøre eleverne opmærksomme på, at de skal gøre sig det pinligt klart, hvad de variable betegner.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)
På 80 sekunder kan printeren, ifølge modellen, udskrive:

$$80 = 2{,}532956685x + 11{,}03766478$$

$$\Updownarrow \qquad \textit{Ligningen løses for x vha. WordMat.}$$

$$x = 27{,}22602$$

<u>27 sider</u>

11.4.2 Opgave 8 - Sandsynlighedsregning

Opgave 8

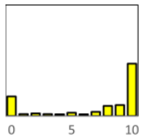
Billedkilde: appadvice.com

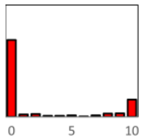
Figuren viser en roulette med 18 forskellige felter.
Når der spilles på rouletten, vil en kugle lande tilfældigt på ét af felterne.

a) Bestem sandsynligheden for, at kuglen lander på et af de 8 sorte felter, når der spilles på rouletten.

Der spilles nu på rouletten to gange i træk.

b) Bestem sandsynligheden for, at rouletten lander på et af de 8 sorte felter i både første og andet spil.





Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 7,0)

De fleste elever får mange points i denne opgave. Dog mangler der ofte argumentation i form af f.eks. $P(A) = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Jeg skal bestemme sandsynligheden for, at en kugle lander på en af de 8 sorte felter, når der spilles roulette.

- Der er 18 mulige felter på rouletten
- Der er 8 gunstige (altså sorte felter)

- Jeg dividerer nu antallet af gunstige med mulige

- **Dermed er der $\frac{8}{18}$ chance for at lande på et sort felt under et spil roulette**
  - **Dette kan yderligere forkortes til $\frac{4}{9}$ chance**

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 2,4)

Den opgave i sættet, som falder eleverne sværest, og hvor langt de fleste elever får 0 points. Meget få tænker på "både-og"-princippet.

Typiske fejl er, at sandsynligheden fra a) lægges sammen med sig selv i stedet for at ganges, eller at både antal mulige og antal gunstige fordobles, hvorved sandsynligheden bliver den samme som i a).

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Der spilles nu 2 gange i streg, hvorfor jeg skal bestemme sandsynligheden for at lande på et af de 8 sorte felter under både det første og det andet spil?

- Vi udnytter, at vi i opgaven ovenover fandt ud af, at der er $\frac{4}{9}$ chance for at lande på et sort felt

- Da der er tale om en BÅDE/OG-situation, skal vi bruge multiplikationsprincippet som siger, at vi skal gange sandsynlighederne sammen, fordi der skal foretages flere delvalg efter hinanden.

- $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 9} = \frac{16}{81}$ Jeg ganger sandsynlighederne med hinanden

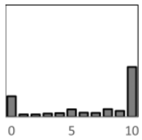
Der er således $\frac{16}{81}$ chance for at rouletten lander på et af de sorte felter i både første og andet spil

11.4.3 Opgave 9 - Funktioner - graftegning

Opgave 9 En funktion f har forskriften

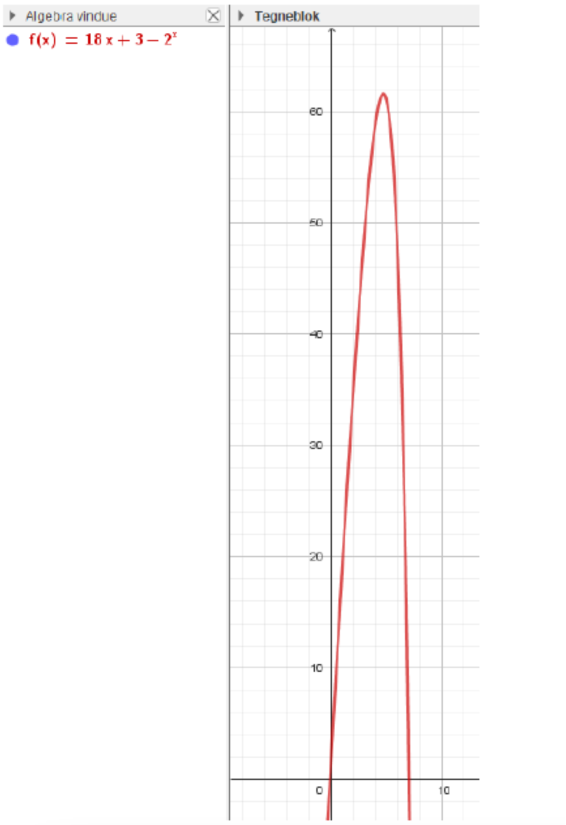
$$f(x) = 18x + 3 - 2^x \ .$$

a) Tegn grafen for f. Man skal kunne se hele grafen fra $x = 0$ til $x = 7$.



Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 6,6)
En graftegningsopgave, som mange klarer fint, men hvor nogle måske bliver forvirrede over den i eksamenssammenhæng nye formulering med kravet om, at grafen skal kunne ses mellem to givne x-værdier. Dette resulterer formodentlig i, at al fokus er på x-værdierne. I hvert fald ses, at en del elever mangler toppen af grafen. En del zoomer blot og får så en meget smal graf, og endelig tegner nogle blot grafen i et lille interval omkring $x = 0$.

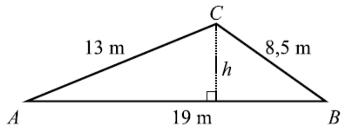
Et eksempel på en elevbesvarelse:



11.4.4 Opgave 10 - Geometri (trekantskonstruktion)

Opgave 10

Figur 1
Billedkilde: archdaily.com

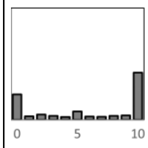


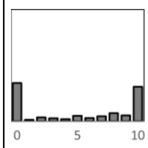
Figur 2

Figur 1 viser en arkitekttegning af gavlen på et hus. Figur 2 viser en model af tagkonstruktionen.

a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC, og forklar din konstruktion.

b) Bestem højden h af tagkonstruktionen.

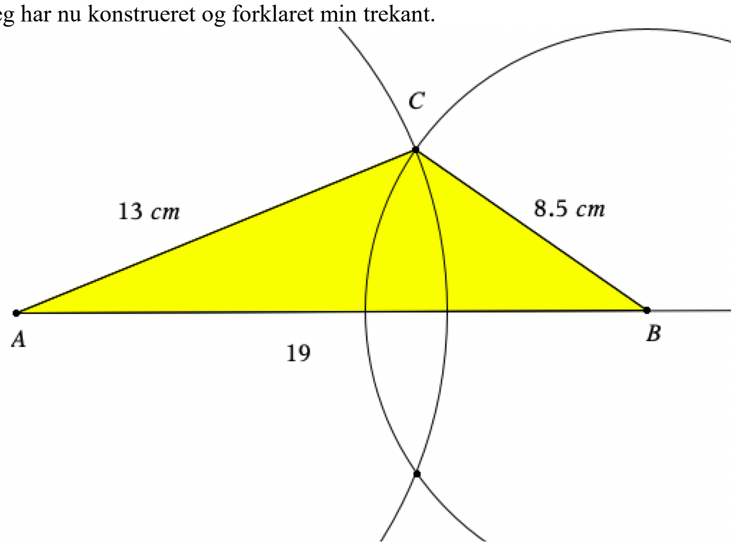




Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 6,0)
En helt klassisk konstruktionsopgave. Mange elever laver en korrekt konstruktion, om end nogle blot laver en trekant ud fra 3 linjer med givne længder.
Nogle udelader helt konstruktionsbeskrivelsen, og en del elever sletter hjælpecirkler og hjælpelinjer og dokumenterer kun besvarelsen med et billede af selve trekanten. Hvis begge dele mangler, er det oftest umuligt (med mindre længder og vinkler vises med f.eks. 5 decimaler) at se, om konstruktionen er lavet korrekt. For at eleverne kan være sikre på at få de points, de faktisk har gjort sig fortjent til, er det derfor meget vigtigt, at konstruktionsobjekterne er synlige i besvarelsen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

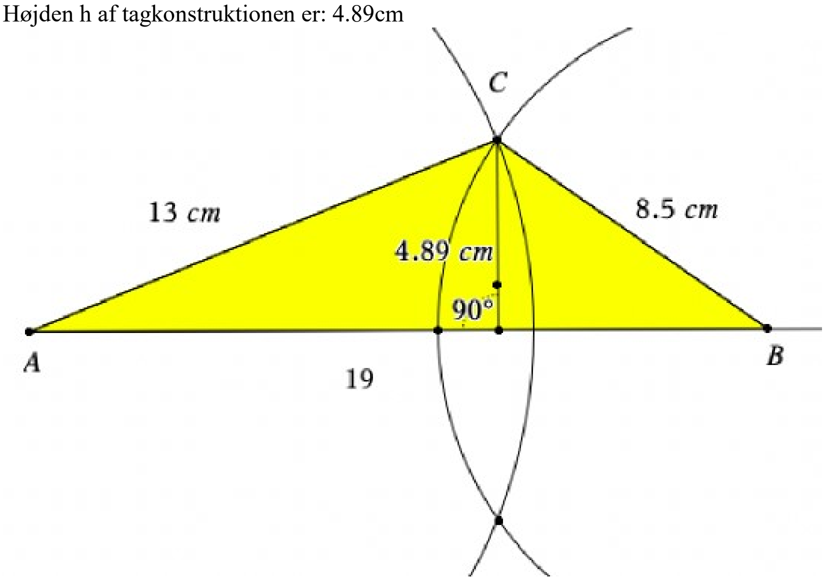
Jeg starter med at lave en halvlinje som jeg giver længden 19 cm. Derefter laver jeg en cirkel med centrum i punkt A, med en radius på 13cm, derefter laver jeg en cirkel med centrum i punkt B, med en radius på 8,5cm. Derefter finder jeg skæringspunktet mellem de to cirkler. Det kalder jeg punkt C. Jeg laver derefter et linjestykke mellem AC og derefter en linje mere mellem BC.
Jeg har nu konstrueret og forklaret min trekant.



Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 5,1)
En helt klassisk konstruktionsopgave. Mange elever laver en korrekt konstruktion, men tit mangler konstruktionsforklaringen helt. Nogle glemmer også at skrive en konklusion med korrekt enhed.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg starter med at lave en vinkelretlinje gennem punkt C, da jeg ved at trekanterne skal have en ret vinkel på 90 grader. Jeg kan derefter finde skæringspunktet mellem de to linjer. Jeg laver derefter en linje mellem de to punkter og måler linjen men måleværktøjet. Jeg måler linjen til 4,89cm.
Højden h af tagkonstruktionen er: 4.89cm

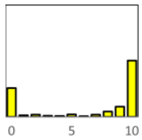


11.4.5 Opgave 11 - Indekstal og vækstegenskab for eksponentiel udvikling

Opgave 11 I 2022 var der store prisstigninger på fødevarer. Nedenstående tabel viser oplysninger om prisen på en liter mælk.

Måned	Januar	Juni
Pris (kr.)	11,95	
Indekstal (mælk)	100	113

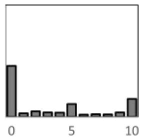
a) Bestem prisen for en liter mælk i juni måned.



Prisen på en bakke æg voksede med 4 % pr. måned i de 5 måneder fra januar til juni.

b) Bestem den manglende pris og det manglende indekstal i nedenstående tabel.

Måned	Januar	Juni
Pris (kr.)	24,50	
Indekstal (æg)	100	



Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 6,6)
En knald-eller-fald opgave i indekstal. 25% får ingen points, men resten får mange points.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 11

a) Jeg vil bestemme prisen for en liter mælk i juni måned
Hertil er givet nedenstående tabel, hvor jeg bruger formlen for indekstal

Måned	Januar	Juni
Pris (kr.)	11,95	
Indekstal (mælk)	100	113

Formlen for indekstal når man kender 2 indekstal og en værdi er følgende:

$$V_s = I_s / I_b * V_b$$

For at finde prisen for mælk i juni måned gør jeg som følgende

$$\frac{113}{100} \cdot 11{,}95 \approx 13{,}5035$$

Prisen for mælk i juni måned er altså 13,5 kr.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 3,4)

Et svært, sidste spørgsmål, hvor ca. halvdelen af eleverne får 2 points eller derunder.
Den typiske korrekte besvarelse af opgaven bruger kapitalfremskrivning på prisen, der vokser med 4% pr. termin i 5 terminer. Nogle kommer dog også igennem ved at fremskrive med 4% 5 gange i træk. Indekstallet kan herefter bestemmes på sædvanlig vis.
En typisk fejl er, at en forøgelse på 4% 5 gange giver en samlet forøgelse på 20%. En anden typisk fejl er, at forøgelsen kun beregnes for 1 måned.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Jeg vil finde den manglende pris og det manglende indekstal i nedenstående tabel

Måned	Januar	Juni
Pris (kr.)	24,50	
Indekstal (æg)	100	

Jeg vil først og fremmest finde prisen i juni ved at lave en eksponentiel funktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

B er vores start pris i januar på 24,5
A er prisstigningen i decimal
X er antal måneder

$$f(x) = 24{,}5 \cdot (1 + 0{,}04)^5 \approx 29{,}808$$

Den manglende pris er altså 29,8 kr.

For at finde det manglende indekstal bruger jeg igen formlen for indekstal hvor man kender 2 værdier og 1 indekstal

$$I_s = V_s / V_b * I_b$$

$$\frac{29{,}8}{24{,}5} \cdot 100 \approx 121{,}6327$$

Indekstallet for æg i juni er altså 121,63

Den manglende pris for æg i juni er 29,8 kr.
Det manglende indekstal for æg i juni er 121,63.

12 Opsamling på elevbesvarelserne af hf C-sættet

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i hf C-sættet, er det værd særligt at fremhæve følgende:

Opgaverne, som eleverne klarer bedst, handler om
- ensvinklede trekanter,
- bestemmelse af elementær sandsynlighed i et symmetrisk sandsynlighedsfelt samt
- beregning af indekstal.

De af mindstekravsopgaverne, som gik dårligst, handler om
- eksponentiel vækst,
- udregning af funktionsværdier for en lineær funktion og
- trekantskonstruktion; og
- endelig fik mere end 30% af eleverne ikke point i opgave 2b, der gik ud på at udfylde en støttepunktstabel ud fra en forskrift.

De opgaver, der faldt sværest ud, handler om
- "produktsandsynlighed"
- eksponentielle udviklinger, herunder vækstegenskab
- løsning af lineære ligninger

En opgave om prædiktion ud fra en lineær model falder sværere ud end normalt for typen, formodentlig fordi tiden *t* er afhængig varabel i den pågældende opgave.

Det er ikke overraskende, at spørgsmål i sandsynlighedsregning er svære for eleverne. Når en del af eleverne får kun 0 points for deres besvarelse af spørgsmål 8b i sandsynlighedsregning, kan man få det indtryk, at mange føler sig utrygge ved emnet giver op på forhånd. Der er dog også mange, der forsøger at besvare spørgsmålet, men som ikke vurderer det resultat, som de kommer frem til, med kritiske øjne.

Eksponentiel vækst og procentregning voldte også i år de fleste elever problemer. Opgave 3a handler om oversættelse fra sprog til formel, og meget få elever kan bestemme a-værdien. I 6b tænker mange på a-værdien som en hældning i stedet for en fremskrivningsfaktor, og den lineære tankegang ses også hos mange i 11b, hvor en typisk fejl er, at en forøgelse på 4% 5 gange i træk giver en samlet forøgelse på 20%. Selv i øvrigt gode elever har problemer med dette helt centrale emne. De fleste undervisere er givet fuldt ud klar over dette, og der er ikke en mirakelkur til at løse problemet, men da er er tale om opgavetyper, der fremkommer meget hyppigt i eksamenssættene, er det formentlig godt givet ud at vende tilbage til emnet hyppigt, måske særligt i forbindelse med træning af repræsentationsskifte mellem sprog og formel, og at forskellen på fremskrivningsfaktor og hældning jævnligt præciseres.

Opgave 7b voldte overraskende store problemer, idet mange beregnede $f(80)$ i stedet for at løse ligningen $f(x) = 80$. En forklaring er nok, at tiden her ganske usædvanligt var den afhængige variabel, og hvis eleverne ikke har som en del af deres rutine at skrive op, hvad *x* hhv *y* betegner, kan den type fejl forekomme.

En del elever mister points, fordi de ikke argumenterer tilstrækkeligt for deres svar. Det gælder fx i spørgsmål som i opgave 6, hvor det skal afgøres, om nogle påstande er korrekte eller ej. Her kan elever unødvendigt miste points, muligvis blot, fordi de ikke er opmærksomme på kravet i denne type opgave om, at de *skal* forholde sig til alle påstandene, og at alle svarene skal begrundes, for at få alle 10 points.

BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET