BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Evaluering af de skriftlige prøver i matematik stx og hf, sommeren 2022

Evaluering af de skriftlige prøver i matematik stx og hf, sommeren 2022
[Forside undertitel]

2023
ISBN nr. [xxx xxx xxx] (web udgave)

Design: Center for Kommunikation og Presse
Denne publikation kan ikke bestilles.
Der henvises til webudgaven.

Publikationen kan hentes på:
www.uvm.dk
Børne- og Undervisningsministeriet
Departementet
Frederiksholms Kanal 21
1220 København K

Indhold

Forord

I dette evalueringshæfte gennemgås prøveresultaterne ved de skriftlige prøver i matematik i det almene gymnasium og hf ved sommerprøverne maj-juni 2022.

Evalueringsgruppen bestod af studienævnsformand Ernst Hansen, Institut for Matematiske Fag ved Københavns Universitet, lektor Kristoffer Grue Jensen, Stenhus Gymnasium & HF og lektor Lene Søndergaard, Randers HF & VUC, som på nær oplysninger om prøvevilkår pga. covid-19 har forfattet afsnit 2-12. Datamateriale til forcensuren er indsamlet og organiseret af lektor Niels Østergaard, HF Efterslægten. Alle fire takkes mange gange for deres indsats.

Hver eksaminands besvarelse bedømmes ved votering mellem to censorer. Censorerne takkes ligeledes for uvurderlig indsats med at rette og bedømme årets besvarelser samt indberette oplysninger til forcensuren om elevernes besvarelse af opgaverne.

I 2022-evalueringen kommenteres som noget nyt elevernes besvarelser af de enkelte spørgsmål og delspørgsmål, baseret på indsendte noter herom fra én censorgruppe pr. opgave. En særlig tak rettes til de censorgrupper, der i forbindelse med censormødet indsendte materiale og således bidrog til denne del af rapporten.

Karakterstatistikker for de gymnasiale prøver offentliggøres også på www.uddannelsesstatistik.dk efter hver prøvetermin.

Kim Bertelsen
Fagkonsulent i matematik stx og hf

1 Baggrund

1.1 Covid-19-pandemien og prøveudtræk, sommer 2022

Under covid-19-pandemien, der begyndte i Danmark med nedlukningen fra marts 2020, forløb en række prøver i terminerne anderledes end normalt.

I en politisk aftale af 25. februar 2022 kunne regeringen og alle folketingets partier konstatere, at hverdagen heldigvis igen var blevet normal på landets uddannelsesinstitutioner. Covid-19 var ikke længere end samfundskritisk sygdom, og som hovedregel bestemtes normal prøveafvikling.

Imidlertid aftaltes at indføre enkelte undtagelser fra denne hovedregel, fordi afgangseleverne på bl.a. ungdomsuddannelsernes ældste klassetrin afsluttede flereårige forløb, hvoraf store dele af undervisningen havde været underlagt forskellige restriktioner og forstyrrelser.

Aftalen blev udmøntet 30. marts 2022 i "Bekendtgørelse om visse regler om prøver [...] i sommerterminen 2022 og sygeterminen 2022 i de gymnasiale uddannelser [...]" med tilhørende vejledning.

Formålet var jf bekendtgørelsen at "sikre elevers og kursisters gennemførelse og afslutning af igangværende uddannelse eller kurser under de helt ekstraordinære forhold som følge af foranstaltningerne efter loven og forebyggelsen og afhjælpningen i samfundet i forbindelse med covid-19".

Den almengymnasiale uddannelse (stx), 3g

- I 3g stx gennemførtes skriftlig prøve i dansk, mundtlig prøve i studieretningsprojektet, samt to mundtlige prøver efter udtræk som hovedregel i studieretningsfag på A- eller B-niveau eller andet A-niveaufag. Alle andre prøver blev aflyst. For de aflyste prøver blev årskarakteren ophøjet til prøvekarakter. Normalt er eleverne til 7-8 prøver ved afslutningen af 3g, heraf 3-4 skriftlige prøver.
- Konsekvens for matematik: Ca. 1350 kursister fra GSK og VUC-kurser var til prøve i matematik stx A, mens det sædvanlige store prøvevolumen fra 3g'erne i normalt forløb, af størrelsesorden 10.000 elever, var aflyst.

Den almengymnasiale uddannelse (stx), 1g og 2g

- Normalt prøveforløb. Skriftlige prøver i matematik stx, B-niveau, gennemførtes uden aflysninger for første gang siden 2019.

Den toårige uddannelse til almen studentereksamen (stx), 2. år

- På andet år gennemføres prøver i skriftlig dansk samt to mundtlige prøver efter udtræk som hovedregel i studieretningsfag på A- eller B-niveau eller andet A-niveaufag.

Hf-uddannelsen, 2hf

- Elever kom efter eget valg enten til prøver som normalt eller til prøver i dansk samt tre fag i udtræk.
- Konsekvens for matematik: Et reduceret antal elever aflagde skriftlige prøver i matematik hf B-niveau end normalt.

Hf-uddannelsen, 1hf

- Normalt prøveforløb.

Hf-enkeltfag, GOF, SOF, GIF

- Normalt prøveforløb.

1.2 Elever til prøve

På grund af det reducerede prøveudtræk var antallet af elever til prøve sommeren 2022 lavere end normalt på navnlig stx A og hf B.

Prøveforekomst	Antal eksaminander
Stx A, 20. maj 2022	894
Stx A, 24. maj 2022	458
Stx B, 20. maj 2022	872
Stx B, 24. maj 2022	8114
Hf B, 20. maj 2022	3044
Hf C, 20. maj 2022	8712

Det lavere antal elever til prøve skyldes prøveaflysninger pga. covid-19, jf. foregående afsnit.
Eleverne til prøve i matematik stx A var hovedsageligt VUC-kursister og selvstuderende, idet denne skriftlige prøve var aflyst for elever i gymnasiet (stx) i sædvanligt forløb.

1.3 Prøveform og prøvesæt

Prøveformerne i matematik stx og hf for hvert af niveauerne er som følger.

Niveau	Delprøve 1	Delprøve 2	Samlet varighed
Matematik stx A	2 timer uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	3 timer med hjælpemidler	5 timer
Matematik stx B	1½ time uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	2½ time med hjælpemidler	4 timer
Matematik hf B	1½ time uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	2½ time med hjælpemidler	4 timer
Matematik hf C	1 time uden andre hjælpemidler end godkendt formelsamling	2 timer med hjælpemidler	3 timer

Til prøverne på stx A og hf B hører et forberedelsesmateriale.

Prøverne på stx A og stx B har hver to prøveforekomster i eksamensperioden maj-juni for at hver elevs skriftlige prøver kan afvikles i løbet af et forholdsvis kort tidsrum uanset elevens fagkombination.

Opgavekommissionerne tilstræber at sammensætte opgavesæt, der rummer opgaver af varierende sværhedsgrad, således at elever på alle faglige niveauer kan få lejlighed til at vise, hvad de kan. Således indeholder et opgavesæt både opgaver, der tester mindre komplekse færdigheder og kompetencer såvel som vanskeligere opgaver og delspørgsmål.

Den tilsigtede karakterfordeling for de beståede karakterer over tid er, at 10% af eleverne opnår karakteren 12, at 25% af eleverne opnår karakteren 10, at 30% opnår karakteren 7, at 25% opnår karakteren 4, og at 10% opnår karakteren 02.

1.4 Censur og censurresultat

Karakterfastsættelsen for den enkelte elevs besvarelse sker ved votering mellem to censorer med udgangspunkt i pointsummen for besvarelsen og en standardoversættelsesskala fra points til karakter. De karakterer, som censorerne afgiver, er dog ikke alene et resultat af en pointsammentælling. På grundlag af et givet antal point fastsættes en foreløbig karakter; i den endelige karakterfastsættelse indgår tillige en diskussion mellem censorerne samt en helhedsvurdering af den enkelte besvarelse.

Ved den såkaldte "forcensur" ca midtvejs i censurperioden indberetter for hvert hold én af censorerne de foreløbigt tildelte points for hvert spørgsmål for holdets fem første elever og giver derudover i prosaform generelle kommentarer til elevernes besvarelse af opgaverne.

Forcensuren giver mulighed for en tidlig vurdering af, om opgavesættene har fungeret efter hensigten, og en mulighed for at opdage eventuelle uhensigtsmæssigheder, som kunne give anledning til ændring af oversættelsesskalaen.

Normalt vil man ændre oversættelsesskalaen for et sæt, hvis man fx kan pege på delspørgsmål eller opgaver, som faldt anderledes dårligt ud end forventet, eller hvis omfanget af sættet viser sig at være for stort, altså tydelige tegn på, at ellers gode elever har opnået en uventet lav pointsum.

Oversættelsesskalaerne er anført i forbindelse med gennemgangen af hvert sæt. For ingen af sættene i sommerterminen maj-juni 2022 fandt man anledning til på ovst. grundlag at ændre standardoversættelsesskalaen. Skalaen ses i de følgende afsnit ved gennemgangen af prøveresultaterne for hvert sæt.

Resultatet af karaktergivningen samt evalueringsgruppens arbejde giver anledning til følgende bemærkninger:

Andelen af elever, der ikke består, er desværre høj. Det gælder navnlig stx B, hf B og hf C.

Det bemærkes for det første ved analysen af mindstekravsopgaverne, at kun de allerdygtigste elever får fuldt point i disse opgaver på trods af opgavernes helt grundlæggende karakter. Det kan principielt skyldes indbyggede vanskeligheder i opgaverne, men det kan også skyldes, at selv et basalt overblik over hele læreplanens kernestof kun magtes af de allerdygtigste elever.

For det andet bemærkes på B- og C-niveau, at det er svært at pege på opgavetyper eller emner overhovedet i sættene, som eleverne generelt har let ved. Eksempelvis noterer evalueringsgruppen, at der på stx B i de to sæt kun er ét eneste spørgsmål, der er faldet eleverne let (i den betydning, at 70% af eleverne opnår 8-10 point). Det tyder på, at elevgruppen som helhed har svært ved at leve op til læreplanens krav. På hf B bemærkes, at eleverne er udfordrede af selv simple differentialregningsopgaver, enkle opgaver i forberedelsesmaterialet, opgaver i analytisk geometri samt opgaver i håndtering af bogstavudtryk. På hf C bemærkes som på stx B, at en stor del af eleverne ikke løser mindstekravsopgaverne og andre umiddelbart tilgængelige opgaver som f.eks. opgaver i helt grundlæggende beregninger i emnet "rette linjer" eller i fortolkninger hørende til de simple vækstmodeller.

For det tredje bemærkes på B-niveau, at det tilsyneladende falder eleverne svært at besvare selv lette spørgsmål fra det underliggende niveau – evalueringsgruppen fremhæver her en opgave i stx B 20. maj-sættet om tolkning af en fremskrivningsfaktor, der hører til på C-niveauet, men som ikke desto mindre kun giver 2,4 points i gennemsnit for populationen. Det tyder på en manglende vedligeholdelse hos eleven af viden og færdigheder fra helt tidligt i forløbet. Det støtter indtrykket af en population på stx B, der kun vanskeligt er nået omkring kernestoffet i dets helhed i tilstrækkelig dybde til, at indholdet har kunnet bundfælde sig.

Alt i alt efterlader analysen af pointfordelingerne for sættene på disse niveauer det indtryk, at der er en meget høj andel af elever, der ikke tilstrækkeligt har kunnet leve op til læreplanens krav.

Ved censuren blev standardoversættelsesskalaen som nævnt benyttet for alle de stillede sæt. Skalaen ses i de følgende afsnit ved gennemgangen af prøveresultaterne for hvert sæt.

2 Datamateriale og forudsætninger for analyse

2.1 Introduktion

Ved sommerprøverne 2022 i skriftlig matematik på gymnasialt niveau blev på grund af usædvanlige omstændigheder (covid-pandemien) kun få stx A-eksamener afholdt. Tilsvarende var hf B stadig påvirket af covid-efterdønningerne, da 2-årige hf-elever kunne vælge kun at gå til eksamen i fire fag. Stx B, hf C og alle hf-enkeltfagsprøver mm. blev dog afviklet normalt uden aflysninger.

I det følgende er det hensigten at afdække og identificere en række mønstre i pointgivningen og at præsentere en terminologi, der kan italesætte disse mønstre.

Datamaterialet er den såkaldte forcensur. Ved eksamen vurderes hver besvarelse af to censorer. Dette organiseres holdvis. De to censorer arbejder tidsforskudt, fordi en del af materialet foreligger på papir. Førstecensor indrapporterer en detaljeret bedømmelse af besvarelserne fra fem elever fra hver klasse (de fem første fra karakterlisten eller fra listen i netprøver.dk), og disse bedømmelser udgør forcensuren.

Forcensuren er en kvalitetssikringsmekanisme i bedømmelsesprocessen: Den giver et samlet overblik inden den endelige karaktergivning - og hvis der er tegn på store afvigelser fra det normale, er dermed mulighed for at justere oversættelsesskalaen fra points til karakter. Men forcensuren har også en vigtig rolle at spille i den efterfølgende evalueringsproces, fordi oplysningerne er så detaljerede. For den overordnede bedømmelsesproces foreligger der kun oplysninger om den endelige karakter for hver enkelt elev.

Datamateriale fra forcensuren er indsamlet og organiseret af Niels Østergaard. Analysen er gennemført af Ernst Hansen.

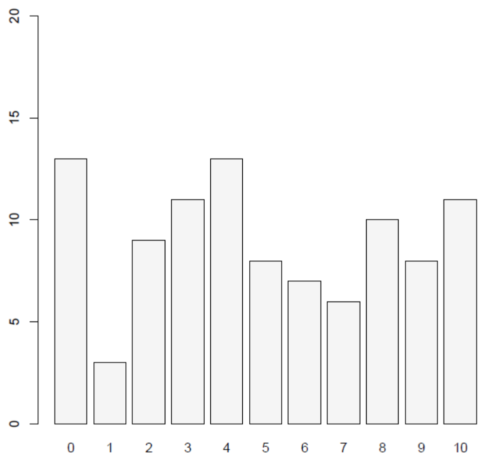
2.2 Terminologi

For hvert delspørgsmål kan data fra forcensuren opsummeres i en tabel som i tabel 1.

Score	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Procent	13	3	9	11	13	8	7	6	10	8	11

Tabel 1: *Eksempel på bedømmelse af et delspørgsmål. Procenttallet angiver hvor mange procent af besvarelserne fra forcensuren i den pågældende prøve, der har opnået scoren i kolonnen. Procenttallene summer således til 100 (på nær diskretiseringsfejl).*

Informationen i tabellen over scorerne forstås lettest ved at optegne et histogram:



Figur 1: *Grafisk repræsentation af data fra tabel 1.*

Eksemplet i figur 1 er ganske ukarakteristisk for de histogrammer man ser for de faktiske bedømmelser. En ligefordeling over de mulige scorer er et sjældent fænomen. Normalt vil der være en skævhed i den ene eller den anden retning, ofte ganske udtalt. Det er formentlig et karakteristisk forhold for matematik.

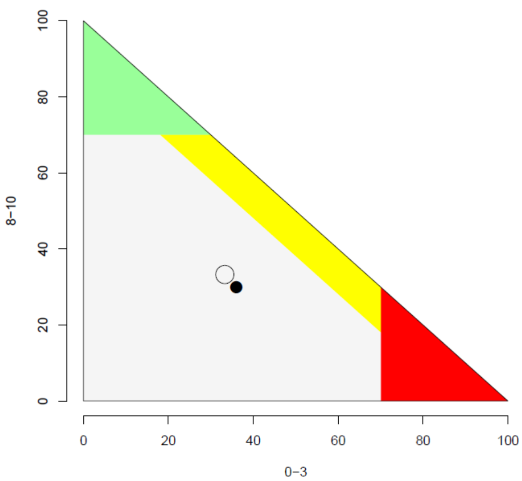
Det er ikke klart om skævheden ligger i spørgsmålenes formulering, i elevernes præstationer eller om den skabes af bedømmelsespraksis. Men det vil fremgå af denne rapport at det er uhyre sjældent at se bedømmelser af spørgsmål hvor midterområdet har nogen særlig vægt. Bedømmelserne vil koncentrere sig i den ene ende af skalaen eller i den anden ende - eller eventuelt i begge ender (svarende til at halvdelen af eleverne ikke kan få hul på spørgsmålet, mens den anden halvdel af eleverne løser spørgsmålet perfekt).

For at kunne formulere os kvalitativt om disse skævheder kan vi forgrove oplysningerne fra tabel 1 til følgende tabel:

Score	0-3	4-7	8-10
Procent	36	34	30

Tabel 2: *Grov version af data fra tabel 1.*

Denne grove version af data kan repræsenteres i et kompositionsdiagram, hvor vi optegner de to ydergrupper.

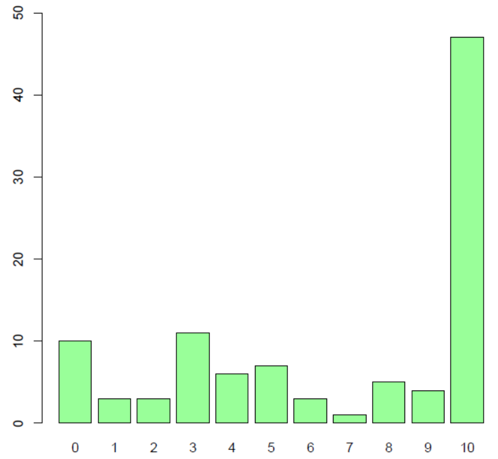


Figur 2: *Kompositionsdiagram. Data fra tabel 2 er repræsenteret af den sorte prik. Det åbne punkt vil svare til at lige mange elever får bedømmelser i de tre grupper 0-3, 4-7 og 8-10. De farvede områder forklares nedenfor.*

Det røde område på figur 2 repræsenterer et spørgsmål der er gået dårligt for hovedparten af eleverne. Det grønne område repræsenterer et spørgsmål der er gået godt for hovedparten af eleverne. Et spørgsmål hvor hovedparten af eleverne scorer i midterområdet vil blive afbildet nede omkring origo. Det gule område på tegningen repræsenterer et spørgsmål hvor der er bedømmelser i begge ender af skalaen, men stort set ingen bedømmelser i midterområdet. Den præcise definition af disse områder vil blive givet nedenfor.

Let spørgsmål

Vi definerer et let spørgsmål som et spørgsmål hvor mindst 70 procent af eleverne scorer 8-10. Et typisk histogram vil se ud som i figur 3.



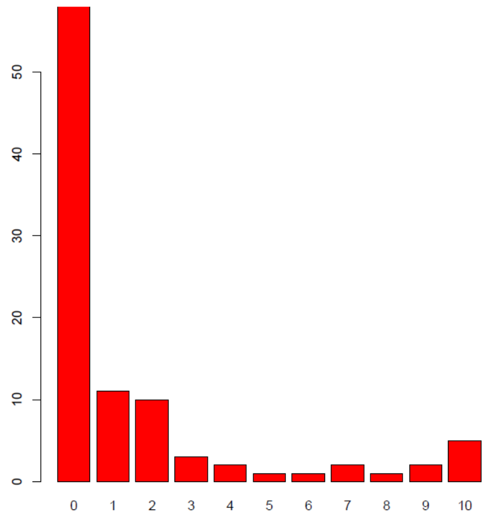
Figur 3: *Eksempel på et histogram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'let'.*

Det er vigtigt at et eksamenssæt har enkelte spørgsmål i denne kategori. De skal bruges til at skelne de elever der kan lidt fra de elever der intet kan. Men der skal ikke være for mange af den slags spørgsmål, for de har ingen funktion i forhold til at separere middelelever fra hinanden.

Det præcise valg af 70 procent som skæringsgrænse har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Svært spørgsmål

Vi definerer et svært spørgsmål som et spørgsmål hvor mindst 70 procent af eleverne scorer 0-3. Et typisk histogram vil se ud som i figur 4.



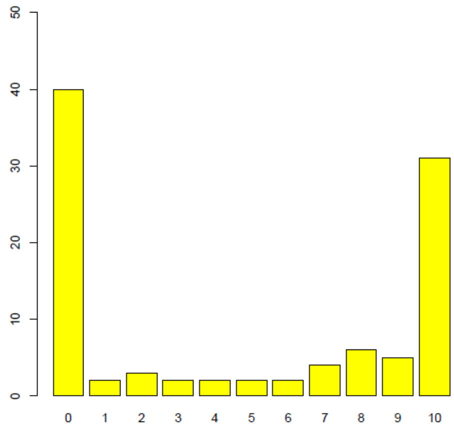
Figur 4: *Eksempel på et histogram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'svært'.*

Det er vigtigt at et eksamenssæt har enkelte spørgsmål i denne kategori. De skal bruges til at skelne mellem top-eleverne. Men der skal ikke være for mange af den slags spørgsmål, for de har ingen funktion i forhold til at separere middelelever fra hinanden.

Det præcise valg af 70 procent som skæringsgrænse har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Knald-eller-fald spørgsmål

Vi definerer et knald-eller-fald spørgsmål som et spørgsmål der hverken er let eller svært og hvor under 12 procent af eleverne scorer 4-7. Et typisk histogram vil se ud som i figur 5.



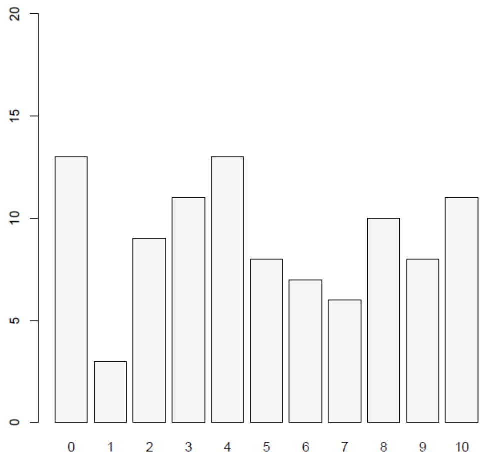
Figur 5: *Eksempel på et histogram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'knald-eller-fald'.*

Hvis spørgsmålet hverken er let eller svært, vil der være mindst 18 procent i både 0-3 gruppen og 8-10 gruppen. De to ydergrupper vil således hver især være mindst 50 procent større end midtergruppen. Forbløffende mange spørgsmål har knald-eller-fald karakter i et eller andet omfang. Det er et helt typisk fænomen at 0 og 10 er de to enkeltscorer der gives flest af i de enkelte spørgsmål. Præcis hvor man sætter grænsen i den formelle definition har naturligvis en vis grad af vilkårlighed.

Det kan være udmærket med et vist antal knald-eller-fald spørgsmål i et eksamenssæt. De har en vis funktion i at separere elever i midterområdet.

Standard-spørgsmål

Et spørgsmål defineres som standard, hvis det ikke falder i en af de tre allerede definerede kategorier let, svær eller knald- eller-fald. Der skal altså være under 70 procent i hver af de to yderområder 0-3 og 8-10, og mindst 12 procent i midterområdet 4-7. Et typisk histogram kan se ud som i figur 6.



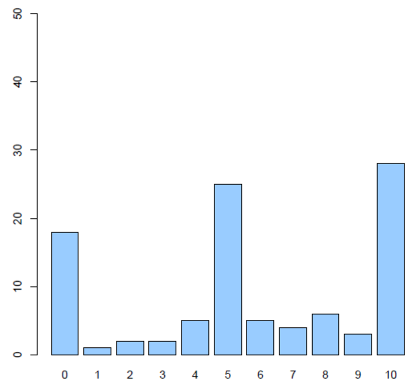
Figur 6: *Eksempel på et histogram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive karakteriseret som 'standard'. Tegningen er den samme som i figur 1.*

Bemærk at hvis der fandtes spørgsmål, hvor scorerne klumpede sig sammen i midterområdet, så ville man nok have behov for en speciel kategori til at fange dette fænomen. Men i praksis ses der aldrig spørgsmål af den karakter. Derfor føles behovet for en ekstra kategori ikke så stærkt.

Som udgangspunkt vil man ønske, at der er mange standardspørgsmål i et opgavesæt, for spørgsmål af denne karakter er de bedst egnede til at differentiere mellem elever på nogenlunde samme niveau.

Midtertop spørgsmål

Inden for standardspørgsmålene er der et enkelt mønster, der er så karakteristisk, at det fortjener sin egen kategori: det drejer sig som spørgsmål, hvor der er markant flere elever, der får præcis 5 end de umiddelbare naboscorer 4, 6 og 7. Histogrammer med dette mønster har en top i midten. Et typisk histogram vil se ud som i figur 7.



Figur 7: *Eksempel på et histogram, hvor det pågældende spørgsmål vil blive kategoriseret som 'midtertop'.*

Denne midtertop kan opstå hvis spørgsmålet har en todelt formulering. For eksempel:

Bestem parametrene a og b, og giv en fortolkning af b.

Her vil der være en række elever der fejlfrit kan bestemme parametrene, men som ikke har noget brugbart at sige om deres fortolkning. I praksis fungerer sådanne spørgsmål som en kombination af to 5-point spørgsmål nærmere end som et 10-point spørgsmål.

Rent operativt definerer vi et midtertop spørgsmål som et spørgsmål der som udgangspunkt er standard, men hvor der er en markant top i scoren 5. For næsten alle spørgsmål er det sådan, at der er flest, der scorer netop 5 end naboscorerne - det er formentlig et retteteknisk fænomen. Der skal være markant flest før vi udråber spørgsmålet til at have midtertop. Vi kræver at mindst halvdelen af scorerne i midterområdet 4-7 falder i netop 5.

Det er er ikke klart om det bedømmelsesteknisk er godt eller skidt med en midtertop. Men hvis et spørgsmål har en midtertop, så kan det så godt som altid føres tilbage til spørgsmålets formulering.

Vi opsummerer disse definitioner samlet:

Klassifikationskriterier:

Let spørgsmål - mindst 70 procent i 8-10
Svært spørgsmål - mindst 70 procent i 0-3
Knald-eller-fald - hverken let eller svært, højst 12 procent i 4-7
Standard spørgsmål - hverken let, svært eller knald-eller-fald
Midtertop - se præcis definition ovenfor

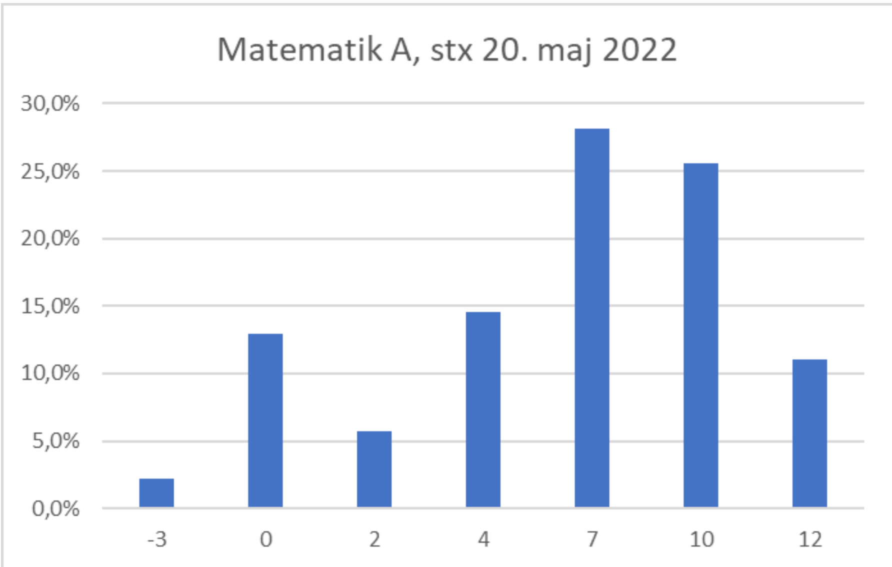
3 Stx A-niveau 20. maj 2022

Prøveresultat matematik A, stx 20. maj 2022[1]

Antal eksaminander til prøve **894**
Karaktergennnemsnit **6,47**
Andel ikke-beståede **15,1 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	2,2%	12,9%	5,7%	14,5%	28,1%	25,5%	11,0%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-21	15-89	82-106	100-146	140-196	190-231	225-250

[1] Der er en restgruppe på 158 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

3.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 273 elever i forcensuren for denne prøve. Bemærk at det er så få observationer, at en statistisk behandling er af tvivlsom værdi. Der er stillet 14 opgaver med i alt 25 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

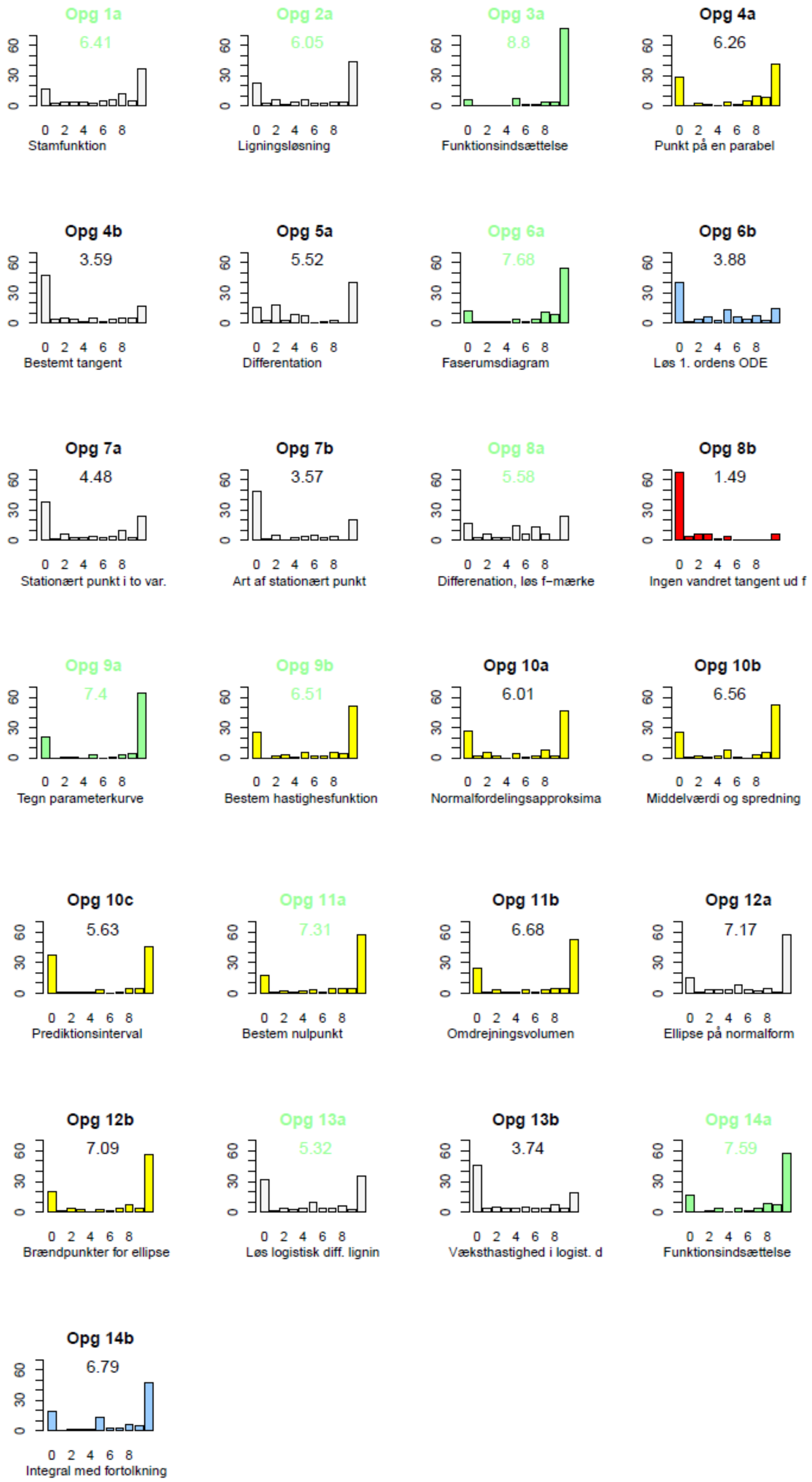
	Antal
Mindstekrav (grøn)	10
Ikke-mindstekrav (hvid)	15

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	12
Delprøve 2	13

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 16 nedenfor.

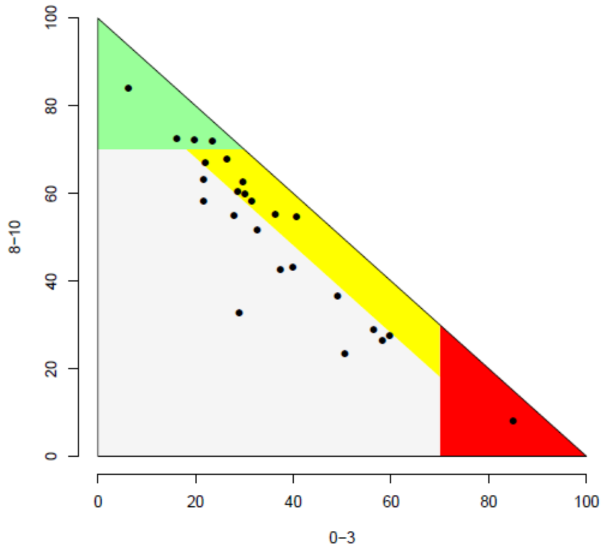


Figur 16: *Resultater for de 25 spørgsmål for STX-A 20. maj 2022. Overskriften er farvet grøn for mindste-kravsspørgsmål. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Midtertop	Standard
4	1	8	2	10

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

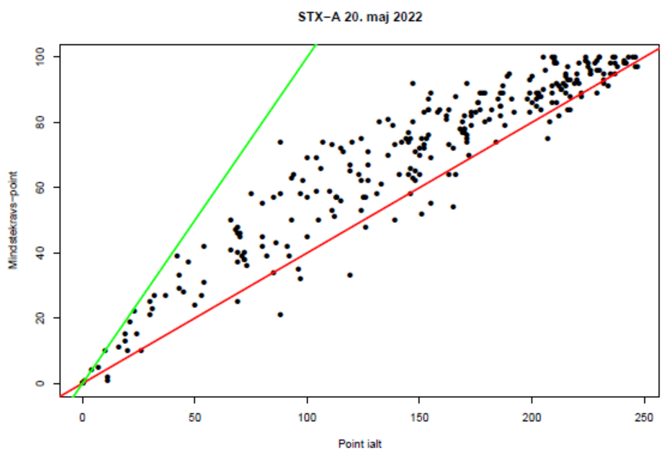


Figur 17: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-A 20. maj 2022. Spørgsmål der klassificeres som 'midtertop' (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
3a	Funktionsindsættelse	8.8
6a	Faserumsdiagram	7.68
14a	Funktionsindsættelse	7.59
9a	Tegn parameterkurve	7.4
11a	Bestem nulpunkt	7.31
12a	Ellipse på normalform	7.17
12b	Brændpunkter for ellipse	7.09
14b	Integral med fortolkning	6.79
11b	Omdrejningsvolumen	6.68
10b	Middelværdi og spredning	6.56
9b	Bestem hastighesfunktion	6.51
1a	Stamfunktion	6.41
4a	Punkt på en parabel	6.26
2a	Ligningsløsning	6.05
10a	Normalfordelingsapproksimation	6.01
10c	Prediktionsinterval	5.63
8a	Differenation, løs f-mærke lig nul	5.58
5a	Differentation	5.52
13a	Løs logistisk diff. ligning	5.32
7a	Stationært punkt i to var.	4.48
6b	Løs 1. ordens ODE	3.88
13b	Væksthastighed i logist. diff.	3.74
4b	Bestemt tangent	3.59
7b	Art af stationært punkt	3.57
8b	Ingen vandret tangent ud fra parameter	1.49

Tabel 7: *Spørgsmålene for STX-A 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* **mindstekrav** *er farvet grønne.*



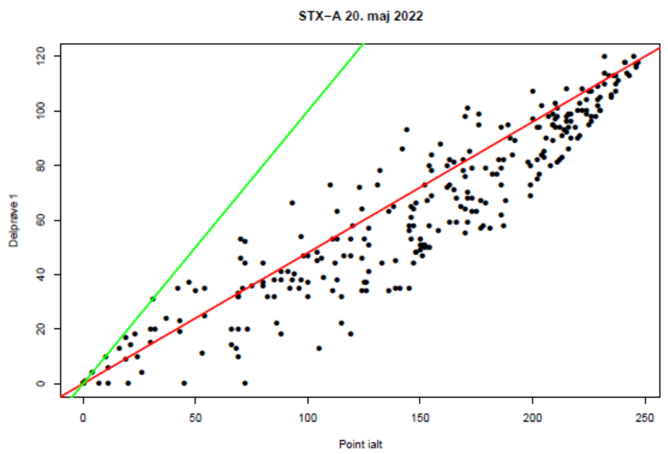
Figur 11: *STX-A 20. maj 2022, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at eleverne får en god del af de indledende point i mindstekravsopgaverne. Men den viser også at kun de dygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne - disse opgaver har altså indbyggede vanskeligheder, eller også er der kun ganske få elever, der har overblik over hele kernestoffet.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
3a	Funktionsindsættelse	8.8
6a	Faserumsdiagram	7.68
14a	Funktionsindsættelse	7.59
9a	Tegn parameterkurve	7.4
11a	Bestem nulpunkt	7.31
12a	Ellipse på normalform	7.17
12b	Brændpunkter for ellipse	7.09
14b	Integral med fortolkning	6.79
11b	Omdrejningsvolumen	6.68
10b	Middelværdi og spredning	6.56
9b	Bestem hastighesfunktion	6.51
1a	Stamfunktion	6.41
4a	Punkt på en parabel	6.26
2a	Ligningsløsning	6.05
10a	Normalfordelingsapproksimation	6.01
10c	Prediktionsinterval	5.63
8a	Differenation, løs f-mærke lig nul	5.58
5a	Differentation	5.52
13a	Løs logistisk diff. ligning	5.32
7a	Stationært punkt i to var.	4.48
6b	Løs 1. ordens ODE	3.88
13b	Væksthastighed i logist. diff.	3.74
4b	Bestemt tangent	3.59
7b	Art af stationært punkt	3.57
8b	Ingen vandret tangent ud fra parameter	1.49

Tabel 8: *Spørgsmålene for STX-A 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* **uden adgang til CAS** *er farvet lilla.*



Figur 18: *STX-A 20. maj 2022. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 48 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende får en del mere ud af delprøve 2 end af delprøve 1. Specielt er der nogle der får fuldt (eller næsten fuldt) point i delprøve 2 mens de mangler en del point i delprøve 1.

3.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx A-sættet fra den 20. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens delspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra afsnit 2.2.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. En del rettegrupper fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

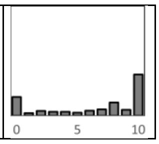
3.3 Delprøve 1

3.3.1 Opgave 1 - Ubestemt integral

Opgave 1 (10 point)

a) Bestem integralet

$$\int (x^2 + 8x)dx.$$



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 6,4)

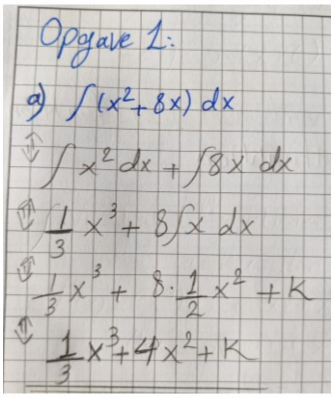
En mindstekravsopgave, hvor typetallet er 10, men hvor en del elever ikke får point overhovedet. Integrationskonstanten glemmes ofte, og flere integrerer kun første led korrekt.

En del censorer nævner i forbindelse med dette spørgsmål, at de savner mellemregninger. Det er i hvert fald en god ide at tage et par mellemregninger med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelig resultat skulle gå hen og være forkert.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse, hvor udregningen vises med mange mellemregninger, og samtlige løsninger angives. Der burde dog anvendes lighedstegn, ikke biimplikation.

De tre mellemregninger kræves ikke for at få fuldt point.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 1:

a) $\int (x^2+8x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int x^2\,dx + \int 8x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + 8\int x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + 8\cdot\frac{1}{2}x^2 + K$

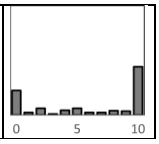
$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + K$

3.3.2 Opgave 2 - Ligning

Opgave 2 (10 point)

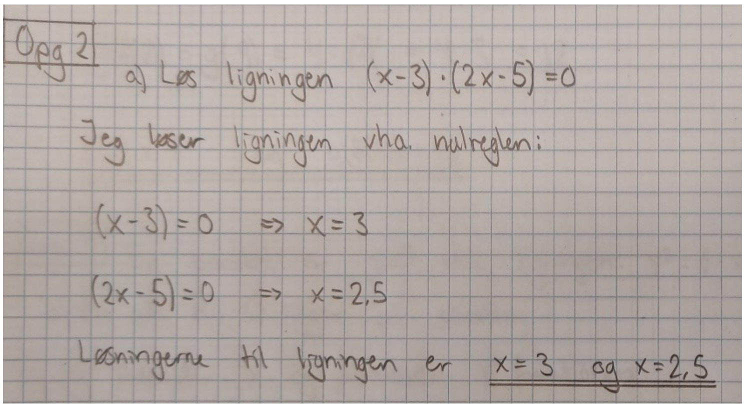
a) Løs ligningen

$$(x-3)\cdot(2x-5)=0.$$



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 6,1)
Mange benytter nulreglen eller ganger parenteserne sammen og løser andengradsligningen.
Der er dog også elever, der blot gætter på den ene eller begge løsninger og derfor mister points, da de ikke anvender en metode (eller argumenterer for, at samtlige løsninger er bestemt).

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opg 2

a) Løs ligningen $(x-3)\cdot(2x-5)=0$

Jeg løser ligningen vha. nulreglen:

$(x-3)=0 \Rightarrow x=3$

$(2x-5)=0 \Rightarrow x=2,5$

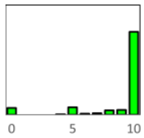
Løsningerne til ligningen er $\underline{\underline{x=3 \text{ og } x=2,5}}$

3.3.3 Opgave 3 - Sammensatte funktioner

Opgave 3 Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 + 5$$
$$g(x) = 4 \cdot \sqrt{x}.$$

(10 point) a) Bestem $f(2)$ og $g(f(2))$.



Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 8,8)
En simpel opgave, som få laver fejl i.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 3

$f(x) = x^2 + 5$ og $g(x) = 4 \cdot \sqrt{x}$

a) bestem $f(2)$

$f(2) = 2^2 + 5 = 4 + 5 = 9$

bestem $g(f(2))$

jeg indsætter $f(2)$ på x's plads i $g(x)$

$g(f(2)) = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$

Altså er $f(2) = 9$ og $g(f(2)) = 12$

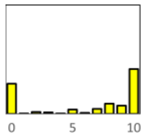
3.3.4 Opgave 4 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

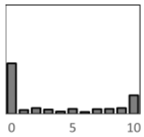
Opgave 4 En parabel er givet ved ligningen

$$y^2 = 6 \cdot x.$$

(10 point) a) Vis, at punktet $P(6,-6)$ ligger på parablen.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til parablen i punktet P.



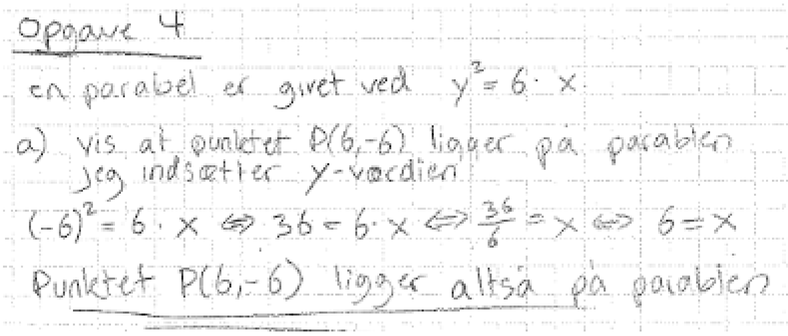


Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 6,3)

Opgaven løses af de fleste ved, at de indsætter punktets koordinater i ligningen og bemærker, at ligningen er opfyldt.

En typisk fejl er, at parentesen om −6 mangler.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 4

en parabel er givet ved $y^2 = 6 \cdot x$

a) vis at punktet P(6,-6) ligger på parablen
jeg indsætter y-værdien

$(-6)^2 = 6 \cdot x \Leftrightarrow 36 = 6 \cdot x \Leftrightarrow \frac{36}{6} = x \Leftrightarrow 6 = x$

Punktet P(6,-6) ligger altså på parablen

Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 3,6)
En del elever kender ikke formlen fra forberedelsesmaterialet. Mange bruger den "sædvanlige tangentligning", selvom der ikke er tale om en funktion. Et godt råd er derfor at gøre det klart for eleverne, at de skal arbejde meget seriøst med forberedelsesmaterialet. Der er mange points at hente i dette emne, og eksamensopgaverne ligger typisk meget tæt på opgaveeksemplerne i forberedelsesmaterialet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) bestem en ligning for tangenten i punktet P

$y^2 = a\cdot x$ har tangent ligningen $y\cdot y_0 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot(x+x_0)$

så vi indsætter kendt værdier og reducerer

$y\cdot(-6) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot(x+6) \Leftrightarrow -6y = 3\cdot x + 6\cdot 3$

$\Updownarrow$

$-6y = 3\cdot x + 18$ vi divider med 6

$\frac{-6}{6}\cdot y = \frac{3\cdot x}{6} + \frac{18}{6} \Leftrightarrow -y = \frac{1}{2}\cdot x + 3 = -y$ vi bytter fortegn

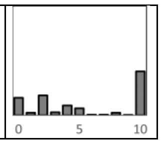
$y = -\frac{1}{2}\cdot x - 3$ er tangentligningen til parablens punkt P(6,-6)

3.3.5 Opgave 5 - Differentialregning (Produktreglen)

Opgave 5 En funktion f er givet ved

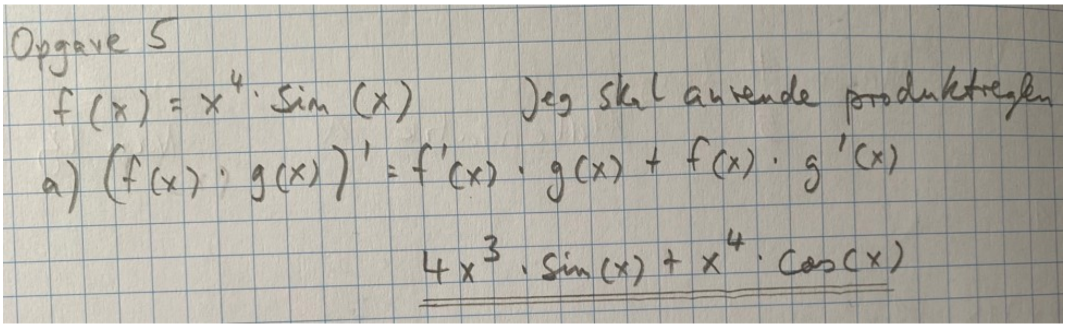
$$f(x) = x^4 \cdot \sin(x).$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 5,5)
Den typiske fejl i denne opgave er, at de to funktioner differentieres hver for sig, og svaret angives som produktet af de to afledte funktioner. Nogle elever har desuden problemer med at differentiere potens-funktionen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 5

$f(x) = x^4 \cdot \text{Sin}(x)$ Jeg skal anvende produktreglen

a) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\underline{\underline{4x^3 \cdot \text{Sin}(x) + x^4 \cdot \text{Cos}(x)}}$

3.3.6 Opgave 6 - Differentialligninger

Opgave 6 På figuren ses hældningsfeltet hørende til differentialligningen

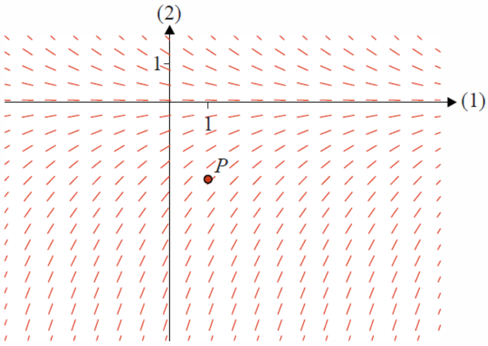
Bilag vedlagt

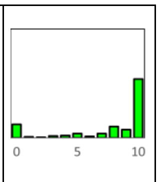
$$y' = -\frac{1}{2}y.$$

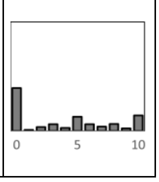
Grafen for en løsning f til differentialligningen går gennem punktet $P(1,-2)$.

(10 point) a) Skitsér grafen for f på bilaget.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

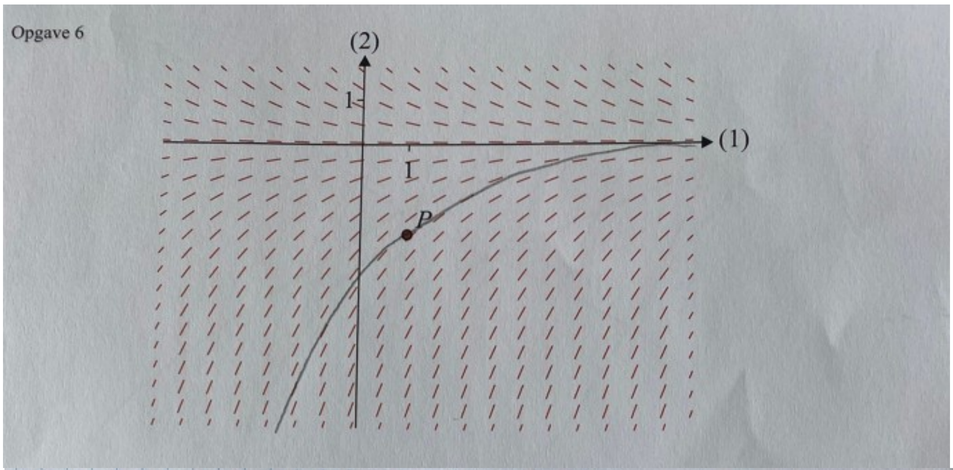






Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 7,7)
De fleste elever kan lave en korrekt skitse, men meget få skriver en forklaring om, at løsningskurven skal følge linjeelementerne. Det er en god ide at lære eleverne at skrive en kort forklaring til denne opgavetype, også fordi det kan være svært at tegne løsningskurven præcist i hånden.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Jeg lader kurvens hælding følge hældingen af linjeelementerne og sørger for den går igennem punktet P.

Spørgsmål 6b (pointgennemsnit: 3,9)
En del elever, der forsøger sig med spørgsmålet, angiver kun den fuldstændige løsning.
Mange elever, der forsøger at bestemme den partikulære løsning, har problemer med at isolere konstanten c.

Nedenfor ses et eksempel på en god besvarelse, trods det forkerte facit.
Den generelle løsningsformel skrives op. I stedet for det korrekte $k = -\frac{1}{2}$, indsættes $k = \frac{1}{2}$.
Punktets koordinater indsættes, c isoleres og den partikulære løsning skrives op til slut.
Det manglende fortegn på k ændrer ikke væsentligt på de udregninger, der skal til for at isolere c, så eleven opnår fuldt point for denne del af spørgsmålet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

OPG 6 b) $y' = -\frac{1}{2}y \rightarrow y' = k \cdot y$

BESTEMMER EN FORSKRIFT VHA. FS $y = c \cdot e^{kx}$ FS(176)

$y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ P(1,-2)

$-2 = c \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 1}$ ISOLER C VHA GIVET PUNKT

$-2 = c \cdot e^{\frac{1}{2}}$

$\frac{-2}{e^{\frac{1}{2}}} = c \rightarrow f(x) = \frac{-2}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

3.3.7 Opgave 7 - Funktioner af to variable

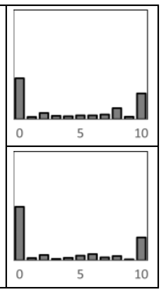
Opgave 7 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x.$$

Det oplyses, at f har ét stationært punkt.

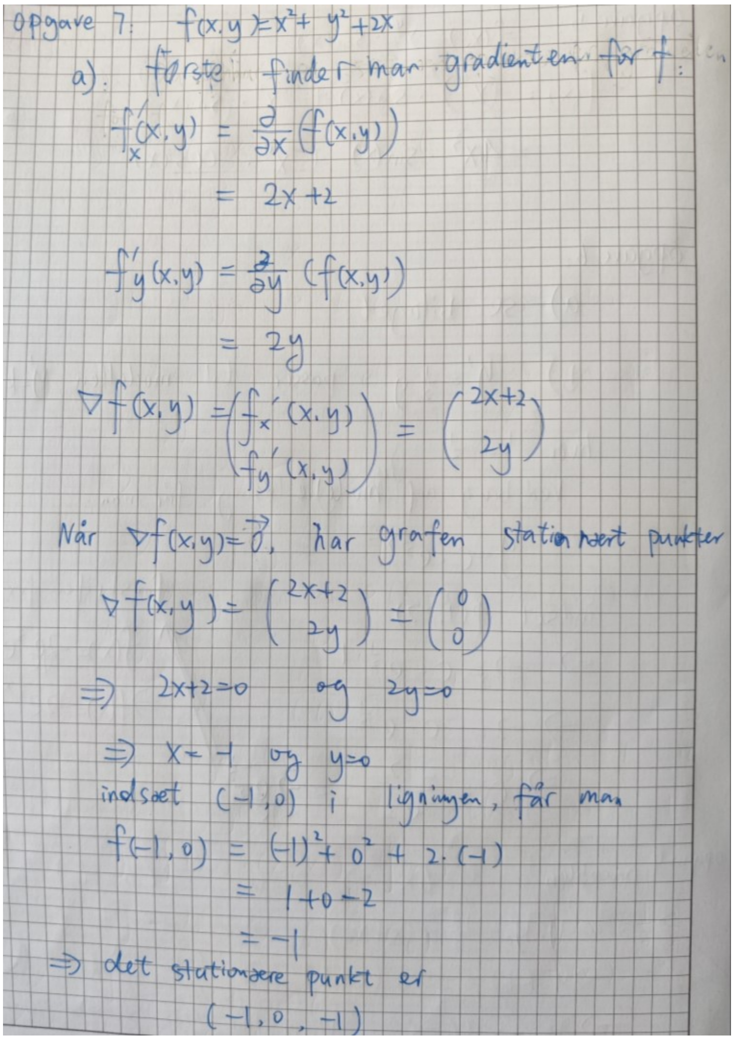
(10 point) a) Bestem koordinatsættet til det stationære punkt.

(10 point) b) Bestem arten af det stationære punkt.



Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 4,5)
Et svært spørgsmål for en stor del af eleverne. Det er vanskeligt for mange at holde styr på, hvad der skal opfattes som en konstant, når der differentieres partielt.
En del elever beregner ikke det stationære punkts z-koordinat.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 7: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$

a): første finder man gradienten for f:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = 2x+2$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = 2y$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Når $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, har grafen stationært punkter

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $2x+2=0$ og $2y=0$

$\Rightarrow$ $x=-1$ og $y=0$

indsæt $(-1,0)$ i ligningen, får man

$$f(-1,0) = (-1)^2 + 0^2 + 2\cdot(-1) = 1+0-2 = -1$$

$\Rightarrow$ det stationære punkt er $(-1,0,-1)$

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 3,6)
En svær opgave for de fleste elever. Da de dobbeltafledede og blandede afledede alle er en konstant, afhænger svaret på b) ikke af, om det stationære punkt er bestemt (korrekt) i a), men mange elever forsøger sig slet ikke med opgaven.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 7:

b). Ved at lave double afledede til $f(x,y)$ i forhold til x og y, får man:

$$f''_{xx}(x,y) = (2x+2)'_x = 2$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (2x+2)'_y = (2y)'_x = 0$$
$$f''_{yy}(x,y) = (2y)'_y = 2$$

$x_0 = -1,\ y_0 = 0$

$r = f''_{xx}(x_0, y_0) = 2$

$s = f''_{xy}(x_0, y_0) = 0$

$t = f''_{yy}(x_0, y_0) = 2$

$\Rightarrow\ r \cdot t - s^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$

$r > 0$

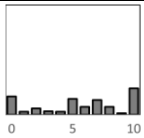
$\Rightarrow$ Det stationære punkt er et lokalt minimum

3.3.8 Opgave 8 - Differentialregning

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 4.$$

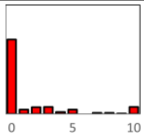
(10 point) a) Bestem $f'(x)$, og løs ligningen $f'(x) = 0$.



En funktion g er givet ved

$$g(x) = x^3 + k \cdot x + 4, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

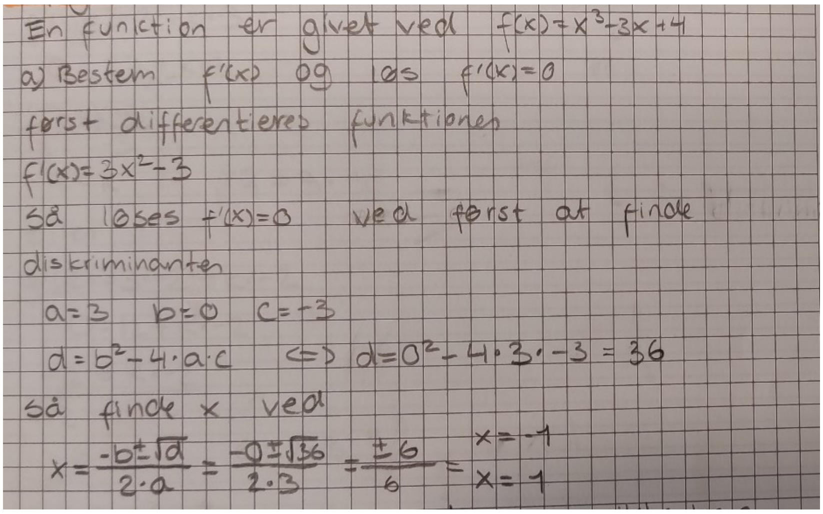
(10 point) b) For hvilke værdier af tallet k har grafen for g ingen vandrette tangenter?



Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 5,6)

De fleste kan besvare dette spørgsmål. Det er oplagt at udnytte, at den fremkomne andengradsligning er simpel og let kan løses uden brug af rodformlen, men det kræver, at man "husker" begge løsninger - en del finder kun løsningen $x = 1$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



En function er givet ved $f(x) = x^3 - 3x + 4$

a) Bestem $f'(x)$ og løs $f'(x) = 0$

først differentieres funktionen

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Så løses $f'(x) = 0$ ved først at finde diskriminanten

$a = 3 \quad b = 0 \quad c = -3$

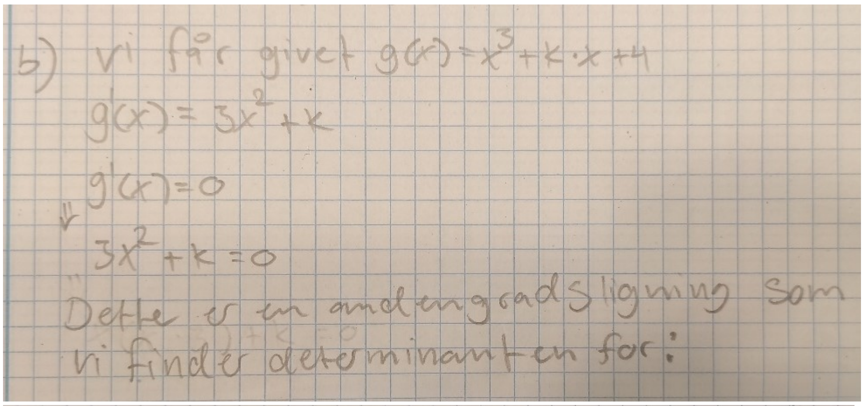
$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \iff d = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 36$

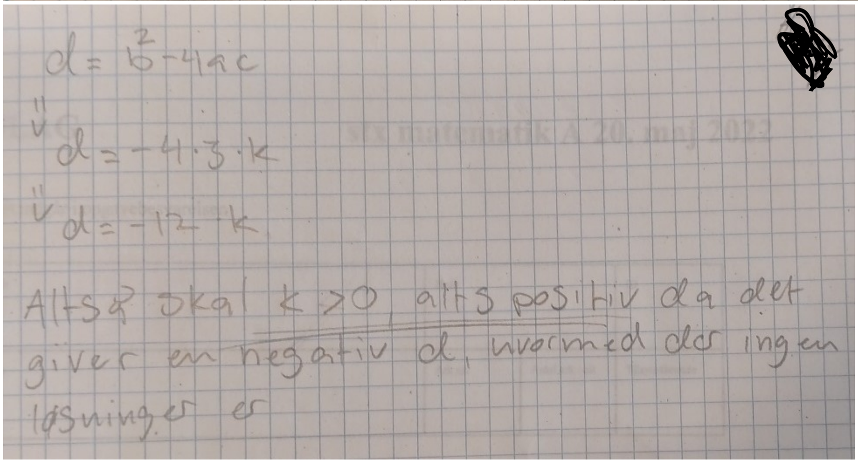
Så finde x ved

$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-0 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 3} = \frac{\pm 6}{6} = \begin{matrix} x = -1 \\ x = 1 \end{matrix}$

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 1,5)
Dette spørgsmål er tænkt som det ræsonnementskrævende spørgsmål i delprøve 1. For eleverne er spørgsmålet det sværeste i sættet, og meget få kan løse opgaven.
Eleverne har svært ved at gennemskue, at de kan bruge samme metode som i a). Et godt råd er at lære eleverne altid at være opmærksomme på, om det (eller de) foregående spørgsmål kan udnyttes i et senere spørgsmål.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


b) vi får givet $g(x)=x^3+k\cdot x+4$
$g'(x)=3x^2+k$
$g'(x)=0$
$\Updownarrow$
$3x^2+k=0$
$\Updownarrow$
Dette er en andengradsligning som vi finder determinanten for:


[redacted]
$d=b^2-4ac$
$\Updownarrow$
$d=-4\cdot 3\cdot k$
$\Updownarrow$
$d=-12\cdot k$
Altså skal $k>0$, altså positiv da det giver en negativ d, hvormed der ingen løsninger er

3.4 Delprøve 2

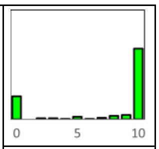
3.4.1 Opgave 9 - Vektorfunktioner

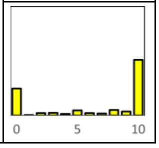
Opgave 9 En parameterkurve er givet ved stedfunktionen

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) \\ 4\cdot(\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \quad 0\le t\le 2\pi .$$

(10 point) a) Tegn parameterkurven for $\vec{s}(t)$.

(10 point) b) Bestem hastighedsfunktionen $\vec{s}\,'(t)$.





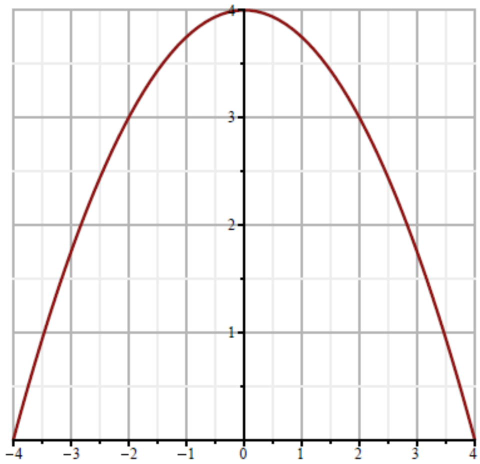
Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 7,4)
Et simpelt spørgsmål, hvis man kender sit CAS-værktøj.
Nogle har problemer med at indstille et fornuftigt grafvindue.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Parameterkurven er givet ved stedfunktionen:
$\vec{s}(t) := \langle 4\cdot\cos(t), 4\cdot(\sin(t))^2\rangle$

$$\vec{s} := t \mapsto \langle 4\cdot\cos(t), 4\cdot\sin(t)^2\rangle$$

a) Tegn parameterkurven $\vec{s}(t)$
$plot([4\cdot\cos(t), 4\cdot(\sin(t))^2, t=0..2\,\pi])$



Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 6,5)
De fleste løser denne opgave med et CAS-program, få løser den i hånden.
Nogle regner i grader i stedet for radianer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Hastighedsfunktionen bestemmes ved at differentiere $\vec{s}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t) = \begin{bmatrix} -4\sin(t) \\ 8\sin(t)\cos(t) \end{bmatrix}$$

3.4.2 Opgave 10 - Normalfordelingen

Opgave 10 På et gartneri udvælger man på tilfældig måde 200 fuldt udvoksede tulipaner af en bestemt art. Man måler længden af deres stilke, og tabellen herunder viser nogle af målingerne.

Længde (mm)	300	271	…	280	261

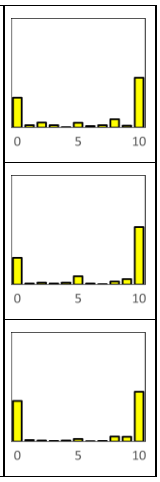
Hele tabellen med alle 200 målinger findes i bilaget "Tulipanstilke.xlsx"

(10 point) a) Gør rede for, at længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

(10 point) b) Bestem middelværdi og spredning for X.

På gartneriet udvælger man en tilfældig tulipan af denne art.

(10 point) c) Bestem sandsynligheden for, at længden af stilken er mellem 270 mm og 330 mm.



Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 6,0)
Et knald-eller-fald spørgsmål, hvor det står og falder med, om man kender sit værktøjsprogram.
For at kunne løse delspørgsmål b) og c), skal a) løses, så det koster dyrt, hvis man ikke kan teste, om data er normalfordelt. Det er også en meget typisk eksamensopgave, så et godt råd er at få eleverne til at terpe besvarelsen af denne opgavetype.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse, hvor opgavens relevante oplysninger præsenteres, fraktilplottet tegnes, og opgaven afrundes med en konklusion. Der savnes dog en forklaring på brug af værktøjsprogrammet.

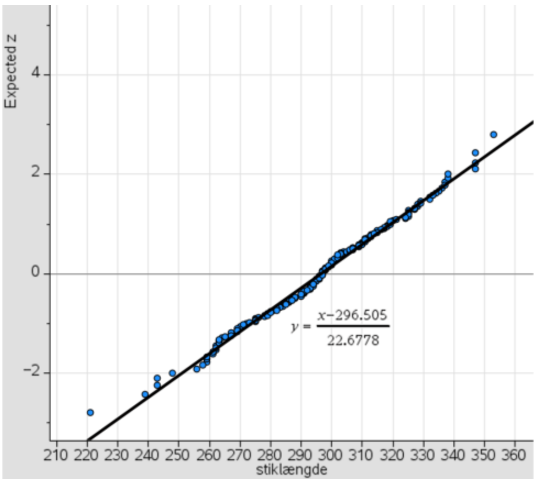
Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10:

På et gartneri udvælger man på tilfældig måde 200 fuldt udvoksede tulipaner af en bestemt art. Man måler længden af deres stilke,og tabellen herunder viser nogle af målingerne.

a) Gør rede for, at længden af tulipanernes stilke med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

Datapunkterne følger pænt den rette linje i fraktilplottet uden tegn på systematiske afvigelser. Vi kan derfor antage, at de observerede Datapunkterne (længdene) med god tilnærmelse er normalfordelte.



Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 6,6)
Når fraktilplottet/QQ-plottet tegnes, angiver de gængse værktøjsprogrammer middelværdien samt et eller flere spredningsestimater.
Der gives fuldt point uanset hvilket spredningsestimat, der vælges, og eleverne skal ikke argumentere for deres valg.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem middelværdi og spredning:

Begge kan aflæses af QQ-plottet:

$\mu = 296.5\ mm$

$$\mu = 296.5\ mm \quad (2)$$

$\sigma = 22.678\ mm$

$$\sigma = 22.678\ mm \quad (3)$$

Spørgsmål 10c (pointgennemsnit: 5,6)

Spørgsmålet kan besvares på mange måder, alt afhængig af hvilket værktøjsprogram, man benytter.

I nedenstående eksempel benyttes tæthedsfunktionen (forkert benævnt "fordelingsfunktionen"), brugen af værktøjsprogrammet forklares, og opgaven afrundes med en konklusion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Bestem sandsynligheden for at længden af stilken er mellem 270 mm og 330 mm.

$\mu := 296.5 = 296.5$
$\sigma := 22.678 = 22.678$
Jeg benytter fordelingsfunktionen, og integrerer denne i intervallet 270-330:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f := x \mapsto \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}$$

$$\int_{270}^{330} f(x)\,dx$$

0.8088934867

Sandsynligheden for at længden af stilken er mellem 270-330 mm er altså 0.81

3.4.3 Opgave 11 - Integralregning (Rumfang af omdrejningslegeme)

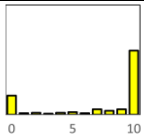
Opgave 11 En funktion f er givet ved

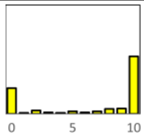
$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2.$$

(10 point) a) Bestem funktionens nulpunkter.

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M i første kvadrant.

(10 point) b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ om førsteaksen.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 7,3)
En simpel opgave, der lettest løses ved beregning i værktøjsprogrammet.
Løses opgaven grafisk, benytter eleverne ikke altid værktøjsprogrammet til at finde nulpunkterne. Det skal de naturligvis gøre, ligesom de skal skrive, at de har gjort det. I en opgave som denne, hvor alle løsninger er hele tal, kan en manglende beskrivelse af fremgangsmåden blive særdeles kostbar, da censorerne så ikke kan udelukke, at der blot har været tale om en aflæsning med det blotte øje. Endvidere er definitionsmængden ubegrænset opadtil, så der er ingen sikkerhed for, at alle nulpunkter kan ses i det (tilfældigt) valgte grafvindue.
Enkelte forsøger at løse opgaven som en andengradsligning.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Funktionen er givet ved

$f(x) := 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2$

$$f := x \mapsto 3 \cdot \sqrt{x-2} - x + 2 \quad (2)$$

Funktionens nulpunkter er når y=f(x)=0:

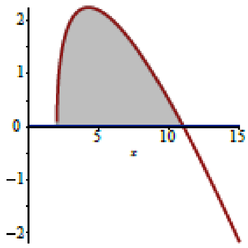
$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}, \{x = 11\}$

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 6,7)
En opgave, som de fleste klarer godt.
De mest typiske fejl er, at π glemmes i beregningen, og at integranden ikke kvadreres.

I nedenstående besvarelse er funktionen defineret i a).
Punktmængden visualiseres, måske for at vise, at $f(x)$ er ikke-negativ (dette er ikke et nødvendigt krav i forbindelse med rumfangsberegning, men skader heller ikke!). Integrationsgrænserne omtales som "grænseværdierne" og blandes sammen med et interval - der burde henvises til svaret i a). Rumfanget beregnes, afrundes og der konkluderes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg tegner M-området
$skraver([f(x), 0], x = 0..15, x = 2..11, size = [250, 250])$



$f(x) \geq 0 \Rightarrow$ M fremkommer ved at dreje området mellem grafen for f og x-aksen 360° om x-aksen i intervallet [2 ;11] som er grænsværdierne.
Voluemenet beregnes med følgende formel:

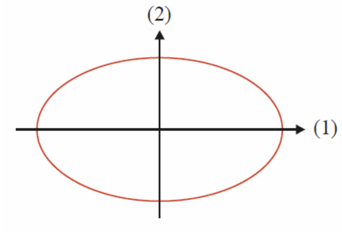
$$V = \pi \cdot \int_{2.}^{11} f(x)^2 \, dx = V = 76.34070149$$

Voluemenet af omdrejningslegemet er ca. 76,3

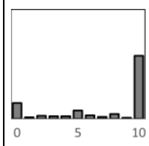
3.4.4 Opgave 12 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

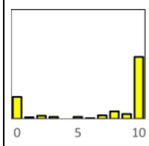
Opgave 12

Figur 1
Billedkilde: Living in harmony



Figur 2





Figur 1 viser et spisebord med en ellipseformet bordplade.
Figur 2 viser en model af bordpladen indlagt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt i ellipsens centrum.
Bordpladen måler 180 cm på den lange led og 105 cm på den korte led.

(10 point) a) Bestem ellipsens ligning på normalform.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter.

Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 7,2)
En simpel opgave for elever, der har gennemarbejdet forberedelsesmaterialet.
Opgaven løses ved at indsætte i formlen.
En typisk fejl er, at de angivne længder ikke halveres.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Vi skal bruge normalformen for en ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vi har længden for storaksen $2a$, vi finder derfor den halve storakse ved at isolerer a, altså ved at dividere med 2 på begge sider.

$$2a = 180$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. WordMat.*

$$a = 90$$

Få får derfor den halve storakse til $a = 90$.

Vi har også længden af lilleaksen $2b$, vi finder på samme måde den halve lilleakse ved at isolerer b, ved at dividere med 2 på begge sider.

$$2b = 105$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for b vha. WordMat.*

$$b = 52{,}5$$

Vi har dermed fået den halve lilleakse til $b = 52{,}5$.

Da vi har centrum i $C(0{,}0)$ skal tælleren bestå og x og y. Vi kan sætte værdierne for a og b ind i normalformen.

$$\frac{x^2}{90^2}+\frac{y^2}{52{,}5^2}=1$$

Vi har dermed bestemt ellipsens ligning på formalform.

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 7,1)
Opgaven løses relativt let, hvis man kender formlen for koordinatsættene til brændpunkterne.
Igen skal det pointeres, at det er vigtigt at gøre det klart for eleverne, at de skal arbejde meget seriøst med forberedelsesmaterialet. Der er mange points at hente i dette emne, og eksamensopgaverne ligger typisk meget tæt på opgaveeksemplerne i forberedelsesmaterialet.
En typisk fejl er, at de angivne længder ikke halveres.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Vi bruger formlen for koordinatsæt til brændpunkter.

$$F_1 = \left(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$$

$$F_2 = \left(\sqrt{a^2 - b^2}; 0\right)$$

Vi starter med at finde det første brændpunkt og sætter værdien for den halve storakse og den halve lilleakse ind.

$$F_1 = \left(-\sqrt{90^2 - 52{,}5^2}; 0\right)$$

Vi løser kvadratroden for sig selv, da WordMat ikke kan regne parentesen.

$$-\sqrt{90^2 - 52{,}5^2} \approx -73{,}10096$$

Vi kan dermed sætte værdien for kvadratroden ind i punktet.

$$F_1 = (-73{,}10096; 0)$$

Vi har dermed bestemt det første brændpunkts koordinater.

Vi bruger samme metode til at bestemme det næste. Vi sætter værdierne ind for den halve storakse og den halve lilleakse.

$$F_2 = \left(\sqrt{90^2 - 52{,}5^2}; 0\right)$$

Vi regner kvadratroden for sig selv, da WordMat ikke kan regne parentesen.

$$\sqrt{90^2 - 52{,}5^2} \approx 73{,}10096$$

Vi sætter værdien af kvadratroden ind i punktet.

$$F_2 = (73{,}10096; 0)$$

Vi har nu bestemt den andet brændpunkts koordinater.

Vi har dermed bestemt de to koordinatsæt til brændpunkterne $F_1 = (-73{,}10096; 0) \quad \wedge \quad F_2 = (73{,}10096; 0)$.

3.4.5 Opgave 13 - Differentialligninger

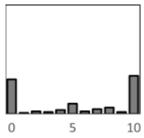
Opgave 13 Befolkningsudviklingen i Taiwan i perioden 1996-2019 kan i en model beskrives ved differentialligningen

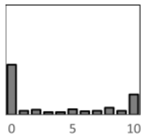
$$\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P),$$

hvor $P(t)$ er antallet af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og t er antal år efter 1996. I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan.

(10 point) a) Bestem en forskrift for P.

(10 point) b) Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dette tal.





Spørgsmål 13a (pointgennemsnit: 5,3)
Opgaven løses lettest med et CAS-værktøj, hvor differentialligningen løses med den givne begyndelsesbetingelse.
En del elever overser begyndelsesbetingelsen eller kan ikke bestemme den partikulære løsning.

Nedenfor ses et eksempel på en besvarelse, hvor eleven ikke udnytter muligheden for at bestemme den partikulære løsning direkte ved brug af WordMat.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Forskriften for P bestemmes da:

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y) \Rightarrow y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0,003641 \cdot P \cdot (23,95 - P) \Rightarrow P(t) = \frac{23,95}{1 + c \cdot e^{-0,003641 \cdot 23,95 \cdot t}}$$

c findes så da det er oplyst at i 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan, og tiden t bestemmes som 0 da 1996 er startåret. c beregnes med WordMat:

$$21,53 = \frac{23,95}{1 + c \cdot e^{-0,003641 \cdot 23,95 \cdot 0}}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for c vha. WordMat.*

$$c = 0,1124013$$

Forskriften for P bliver så:

$$P(t) = \frac{23,95}{1 + 0,1124013 \cdot e^{-0,003641 \cdot 23,95 \cdot t}}$$

Spørgsmål 13b (pointgennemsnit: 3,7)
For at løse opgaven, skal man have bestemt en partikulær løsning i a).
En del elever laver ikke fortolkningen, og blandt de, der gør, mangler en del at skrive, at ændringen er "pr. år".

I besvarelsen nedenfor bestemmes $P'(23)$, og der konkluderes med korrekt enhed. Væksthastigheden angives dog med for stor nøjagtighed (30656,49 indb./pr. år). Der lægges ikke som i f.eks. fysik og kemi vægt på, at eleverne overvejer, hvor mange betydende cifre, resultatet præcist skal angives med, men særligt på A-niveau forventes de at forholde sig til, at der er tale om en model med de usikkerheder, dette indebærer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Funktionen for P defineres og $P'(23)$ bestemmes med WordMat:

$$P(t) := \frac{23,95}{1 + 0,1124013 \cdot e^{-0,003641 \cdot 23,95 \cdot t}}$$

$$P'(23) \approx 0,03065649$$

Tallet betyder at 23 år efter år 1996, $1996 + 23 = 2019$ altså i år 2019, vokser antallet af indbyggere i Taiwan med 0,03065649 millioner indbyggere om året. Altså væksthastigheden i år 2019 er 0,03065649.

3.4.6 Opgave 14 - Differential- og integralregning

Opgave 14 Den hastighed, som vandstanden i verdenshavene stiger med, kan beskrives ved modellen

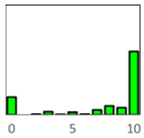
$$f(t) = 0{,}084 \cdot t + 2,$$

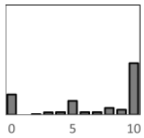
hvor $f(t)$ er hastigheden (målt i mm/år), og t er antal år efter 1991.

(10 point) a) Hvilken hastighed stiger vandstanden med i 2022 ifølge modellen?

(10 point) b) Bestem $\int_0^{31} f(t)\,dt$, og forklar betydningen af dette tal.

Kilde: dtu.dk





Spørgsmål 14a (pointgennemsnit: 7,6)

Funktionen beskriver noget atypisk en hastighed, men meget få elever misforstår opgaven og bestemmer f'.

Opgaven løses af (nærmest) alle ved en beregning som vist i besvarelsen nedenfor.

I denne besvarelse havde det været godt, hvis de to variable, $f(t)$ og t, var blevet beskrevet.

Der konkluderes også med for stor nøjagtighed.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

$$Definer: f(t) = 0{,}084 \cdot t + 2$$

a)

Hvis år 1991 svarer til t værdien 0 må t værdien for 2022 være 31

31 indsættes på t's plads i den definerede formel, løses med cas

$$f(31) = 4{,}604$$

Hastigheden er altså 4,604 mm/år i år 2022

Spørgsmål 14b (pointgennemsnit: 6,8)

Rigtig mange elever løser denne sidste opgave i sættet, dog undlader en del at forklare betydningen af tallet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)

$$\int_0^{31} f(t)dt = \frac{14751918881820759131}{144115188075855872} = 102{,}362$$

Hvis f(t) beskriver en årlig tilvækst må stamfunktion til f(t) altså F(t) beskrive den kumulerede vandstigning hvor t er år efter 1991 og F(t) er total vandstigning mm

Det bestemte integrale fortæller os at vandet er steget med 102,362mm på 31 år

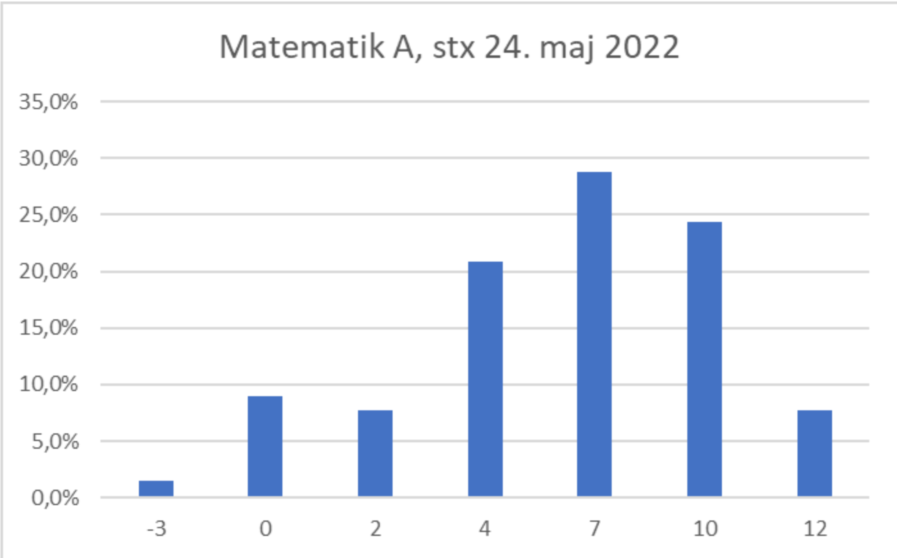
4 Stx A-niveau 24. maj 2022

Prøveresultat matematik A, stx 24. maj 2022[2]

Antal eksaminander til prøve	**458**
Karaktergennnemsnit	**6,32**
Andel ikke-beståede	**10,5 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	1,5%	9,0%	7,8%	20,8%	28,8%	24,3%	7,8%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-21	15-89	82-106	100-146	140-196	190-231	225-250

[2] Der er en restgruppe på 59 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

4.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 139 elever i forcensuren for denne prøve. Det er så få observationer, at en statistisk behandling er af tvivlsom værdi, og den udelades.

Der er stillet 14 opgaver med i alt 25 spørgsmål.

4.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx A-sættet fra den 24. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens delspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra afsnit 2.2.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. En del rettegrupper fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

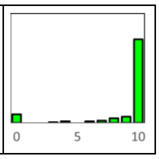
4.3 Delprøve 1

4.3.1 Opgave 1 - Funktioner af to variable

Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y)=x^2-y^2-11.$$

(10 point) a) Bestem $f(5,\ 2)$.



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 8,8)
Et meget nemt spørgsmål at lægge ud med. Ca. 75% af eleverne får 10 point for deres besvarelse, og det er stort set kun -2^2 - delen, der giver problemer for nogle.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg. 1 a) $f(5,2)=5^2-2^2-11$

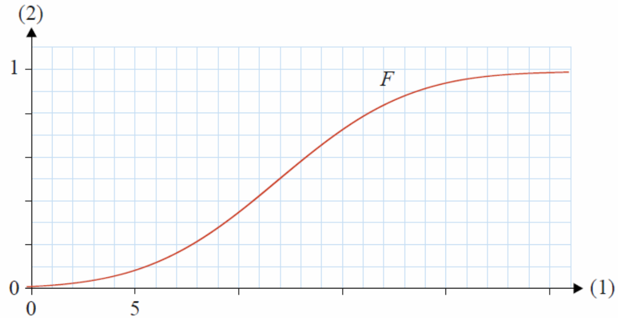
$=25-4-11$

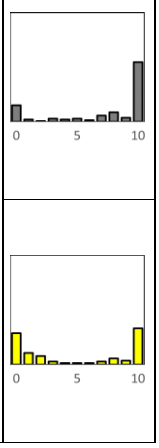
$=\underline{\underline{10}}$

4.3.2 Opgave 2 - Normalfordelingen

Opgave 2

Bilag vedlagt





Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X.

(10 point) a) Bestem middelværdien μ. Brug bilaget.

(10 point) b) Bestem $P(10 \leq X \leq 21)$. Brug bilaget.

Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 7,3)

Et nemt spørgsmål, der går godt for mange. Da der i spørgsmålsformuleringen stilles krav til anvendelse af bilaget, er det vigtigt, at eleverne her tydeligt markerer, hvordan middelværdien bestemmes.

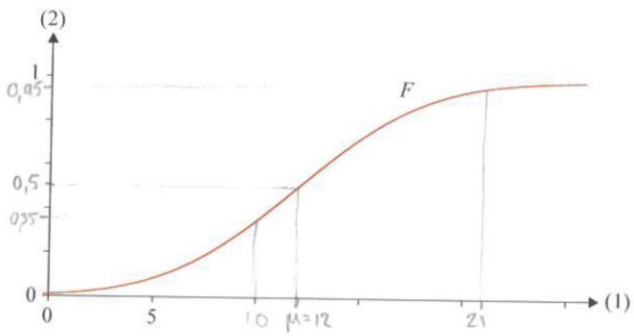
Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 2:

En figur viser fordelingsfunktion F for en normalfordelt stokastisk variabel X.

a) Middelværdi μ bestemmes til at være lig $\underline{\underline{12}}$. (Se bilag)

Opgave 2

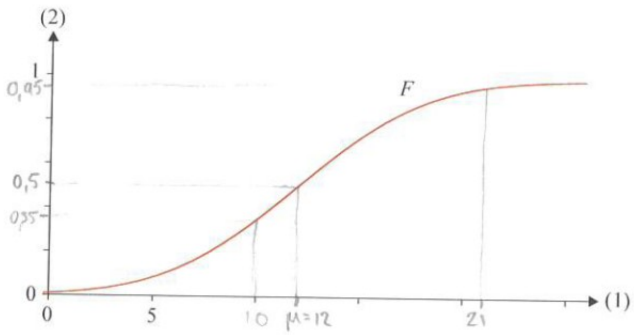


Spørgsmål 2b (pointgennemsnit: 4,9)
Dette spørgsmål volder flere elever problemer. Ca. en fjerdedel får 0 point for deres besvarelse. Et godt råd er at prioritere at lade sine elever arbejde lidt med både grafen for normalfordelingens tæthedsfunktion og for fordelingsfunktionen. Her er særligt spørgsmål om middelværdi og spredning relevante, men også konkrete sandsynligheder skal kunne aflæses af fordelingsfunktionen (som i dette spørgsmål). Endvidere er viden om sandsynlighedsmassen inden for plus/minus 1, 2 og 3 gange spredningen relevant, samt begreberne normale og exceptionelle udfald.
Som nævnt i forbindelse med det foregående spørgsmål er det også her nødvendigt, at eleven tydeligt markerer på bilaget, hvordan de to relevante sandsynligheder bestemmes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) $P(10 \leq X \leq 21)$ bestemmes vha. bilaget, hvor $P(X \leq 21) = 0{,}95$ og $P(X \leq 10) = 0{,}35$. Derfor:
$P(10 \leq X \leq 21) = 0{,}95 - 0{,}35 = 0{,}6 = \underline{\underline{60\%}}$

Opgave 2



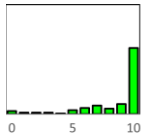
4.3.3 Opgave 3 - Vektorfunktioner

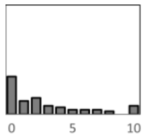
Opgave 3 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 9 \\ t + 6 \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Bestem $\vec{s}(-1)$.

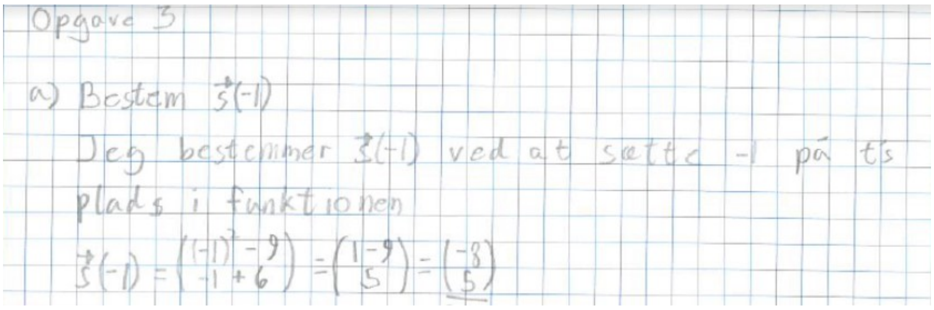
(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til banekurven for $\vec{s}$ i punktet P_0 svarende til parameterværdien $t_0 = -1$.





Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 8,5)
Spørgsmålet går godt for mange. Udfordringen ligger naturligvis i, at det er et negativt tal, der skal indsættes og sættes i anden. Omtrent to tredjedele af eleverne får fuldt point for deres besvarelse af spørgsmålet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 3

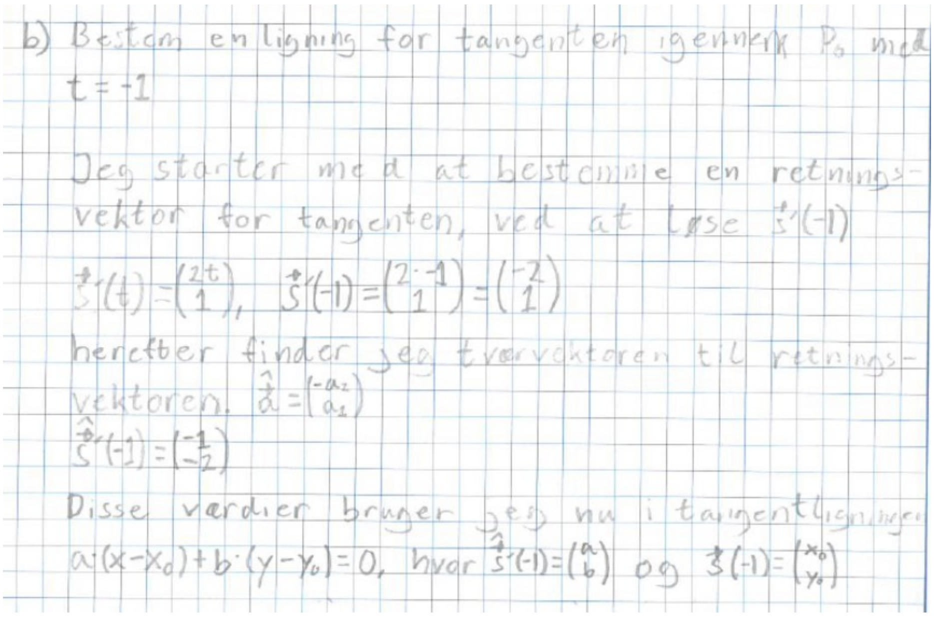
a) Bestem $\vec{s}(-1)$

Jeg bestemmer $\vec{s}(-1)$ ved at sætte -1 på t's plads i funktionen

$\vec{s}(-1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 9 \\ -1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 2,7)
Dette spørgsmål trækker virkelig tænder ud og nedenstående besvarelse kommer heller ikke helt i mål. Første skridt er at forstå, at hastighedsvektoren kan anvendes som retningsvektor for tangenten. Dette er oplagt en standardopgave inden for emnet *Vektorfunktioner*. Problemet for mange elever opstår, når de derefter skal inddrage viden fra emnet *Analytisk geometri og vektorer* fra det underliggende B-niveau. Begrebet tværvektor samt linjens ligning ligger på dette tidspunkt for nogle elever over et år tilbage, og det er de færreste, som kan aktivere denne viden fuldt ud. Et godt råd er at inddrage særligt linjens ligning og parameterfremstilling, vinkler mellem vektorer (herunder parallelitet og ortogonalitet) samt tangenter til cirkler i forbindelse med gennemgangen af emnet *Vektorfunktioner*.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


b) Bestem en ligning for tangenten igennem P_0 med $t=-1$

Jeg starter med at bestemme en retnings-vektor for tangenten, ved at løse $\vec{s}'(-1)$

$\vec{s}'(t)=\begin{pmatrix}2t\\1\end{pmatrix}$, $\vec{s}'(-1)=\begin{pmatrix}2\cdot -1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

herefter finder jeg tværvektoren til retnings-vektoren. $\hat{\vec{a}}=\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\end{pmatrix}$

$\hat{\vec{s}}'(-1)=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

Disse værdier bruger jeg nu i tangentligningen

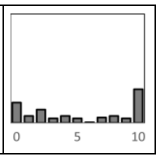
$a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$, hvor $\hat{\vec{s}}'(-1)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ og $\vec{s}(-1)=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$

4.3.4 Opgave 4 - Differentialregning

Opgave 4 En funktion f er givet ved

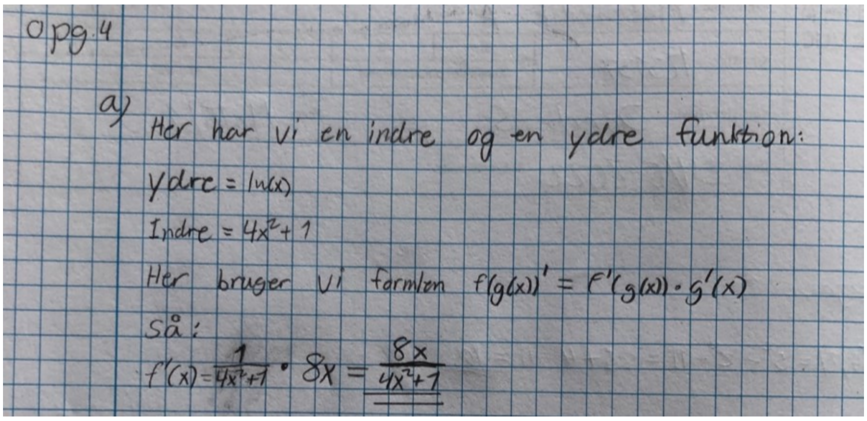
$$f(x) = \ln(4 \cdot x^2 + 1)\,.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 5,3)
Et klassisk spørgsmål i bestemmelse af differentialkvotienten for en sammensat funktion. En del censorer nævner i forbindelse med dette spørgsmål, at de savner mellemregninger. Det er i hvert fald en god ide at tage et par mellemregninger samt en reference til kædereglen/differentiationsregnereglen for sammensatte funktioner med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelig resultat skulle gå hen og være forkert.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opg 4

a) Her har vi en indre og en ydre funktion:

ydre = $\ln(x)$

Indre = $4x^2+1$

Her bruger vi formlen $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Så:

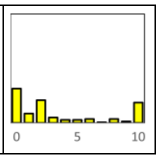
$f'(x) = \frac{1}{4x^2+1} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2+1}$

4.3.5 Opgave 5 - Tal, ligninger og formler

Opgave 5

(10 point)

a) Reducér udtrykket $\dfrac{(a^2-b^2)\cdot 5}{(a+b)\cdot 10}$.



Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 3,5)

Et spørgsmål som er meget uvant for eleverne. Faktisk kan det undre, at omtrent 20% af eleverne faktisk får fuldt point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Et godt råd er at træne sine A-niveau elever i reduktionsopgaver, der indeholder brøker, da disse reduktionsopgaver adskiller sig fra reduktionsopgaverne på B-niveau.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5

a) Reducer $\dfrac{(a^2-b^2)\cdot 5}{(a+b)\cdot 10}$

$$\frac{(a+b)(a-b)\cdot 5}{(a+b)\cdot 10}$$

$$\frac{(a-b)\cdot 5}{10}$$

$$\frac{5a-5b}{10}$$

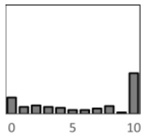
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}}$$

4.3.6 Opgave 6 - Integralregning

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4x^3 - 2x\,.$$

(10 point) a) Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(2,18)$.



Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 5,8)
Et klassisk spørgsmål i integralregning, som det er vigtigt, at man får trænet med sine elever - både med og uden hjælpemidler. En typisk fejl i besvarelsen af dette spørgsmål er, at nogle elever ikke kender opgavetypen og tror, at de skal udregne et bestemt integral med punktets koordinater som grænser.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 6

a) I følgende opgave får vi udleveret en funktion for f: $f(x) = 4x^3 - 2x$.
I opgaven bliver vi bedt om at finde stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(2,18)$.
For at løse opgaven vil jeg først finde stamfunktionen ved at integrere funktion for f. Det ser således ud:

$\int 4x^3 - 2x \, dx = x^4 - x^2 + k$, $\quad F(x) = x^4 - x^2 + k$

Herefter bruger vi punktet P, hvor vi sætter 2 ind på x' plads og lader udtrykket være lig med. Herefter løser ligning i forhold til k. Det ser således ud:

$F(2) = 18$

$\Updownarrow$

$2^4 - 2^2 + k = 18$

$\Updownarrow$

$16 - 4 + k = 18$

$\Updownarrow$ $12 + k = 18$

$\Updownarrow$

$k = 6$

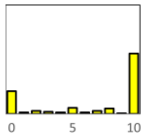
Vi indsætter vores nye k-værdi og kan hermed konkludere:
Stamfunktion til f, hvis graf går igennem punktet $P(2,18)$ er bestemt til at være $F(x) = x^4 - x^2 + 6$.

4.3.7 Opgave 7 - Harmoniske svingninger

Opgave 7 En harmonisk svingning f er givet ved

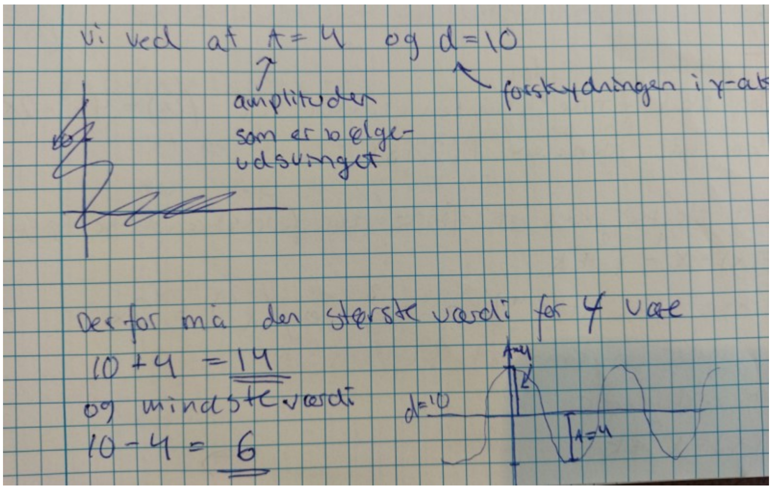
$$f(t) = 4 \cdot \sin(t) + 10 \; .$$

(10 point) a) Bestem størsteværdi og mindsteværdi for f.



Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 6,8)
Et oplagt "knald eller fald"-spørgsmål. De elever, der ved, hvordan de skal anvende amplituden og forskydningskonstanten til at besvare opgaven, kommer fint i mål og får 10 point for deres besvarelse. De resterende får ofte 0 point. Et godt råd (som også gælder mere generelt) er at lære sine elever, at hvis de har svært ved at komme i gang med en opgave, kan de forsøge at finde "de mest matematiske ord" i opgaveformuleringen - her "harmonisk svingning" - og derefter slå dette op i formelsamlingens stikordsregister. Det vil formentlig have hjulpet en del af de over 20%, der fik 0 point i denne opgave.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



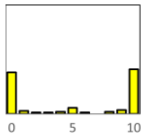
4.3.8 Opgave 8 - Keglesnit (forberedelsesmaterialet)

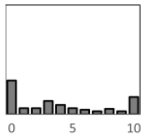
Opgave 8 Der er givet en parabel med ligningen $y^2 = x$.

(10 point) a) Bestem brændpunkt og ledelinje for parablen.

(10 point) b) Tegn parablen i koordinatsystemet på vedlagte bilag.

Bilag vedlagt





Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 5,2)
Sættets første spørgsmål i forberedelsesmaterialet. Opgaven tester elevernes evne til at finde de rigtige formler på et til sættet hørende indstiksark. I den forstand er det en meget nem opgave - selv uden det store kendskab til parabler eller keglesnit i det hele taget. Alligevel er der ca. 40% af eleverne, der får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Igen skal det pointeres, at det er vigtigt at gøre det klart for eleverne, at de skal arbejde meget seriøst med forberedelsesmaterialet. Der er mange points at hente i dette emne, og eksamensopgaverne ligger typisk meget tæt på opgaveeksemplerne i forberedelsesmaterialet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

Parabel med ligning $y^2=x$

a) Bestem brændpunkt og ledelinje for parablen

ledelinjen er givet ved: $x=-\frac{1}{4}\cdot a$

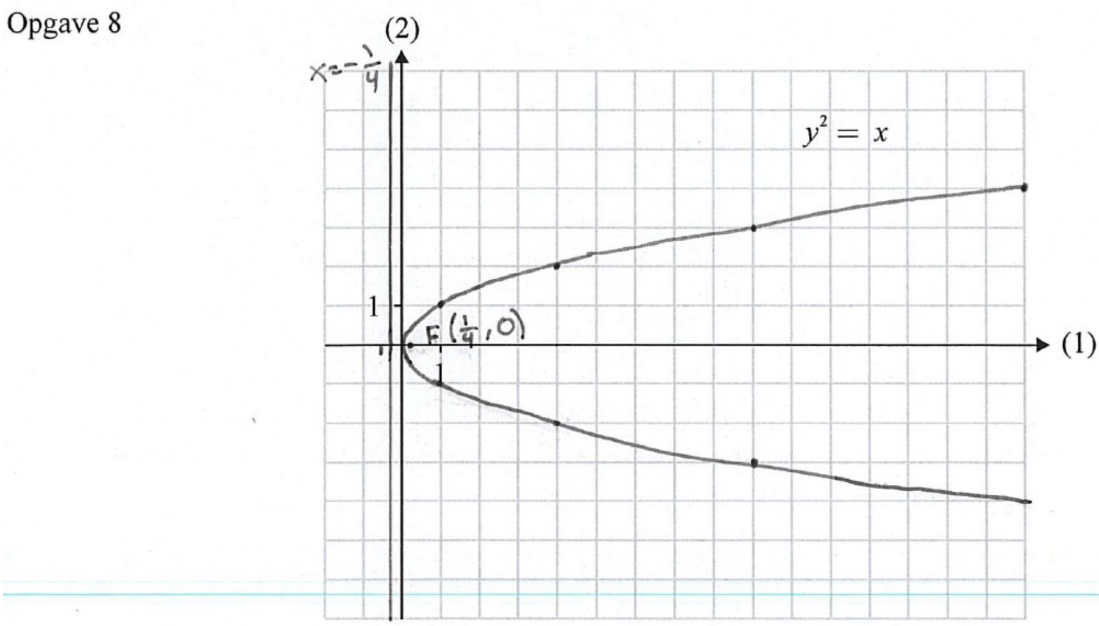
Brændpunktets koordinater er givet ved: $F(\frac{1}{4}a,0)$

Da $a=1$ er ledelinjen $x=-\frac{1}{4}\cdot 1=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$

og brændpunktet er $\underline{\underline{F(\frac{1}{4},0)}}$

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 3,9)
Også dette spørgsmål kræver i princippet ikke det store kendskab til parabler, men disse "sildebensopgaver", hvor eleverne selv skal udregne støttepunkter til deres geometriske konstruktioner, ser ud til at være for uvante for eleverne. Mange har måske ikke tegnet en graf eller lignende uden et geometriprogram siden folkeskolen (hvis overhovedet der heller).

Et eksempel på en elevbesvarelse:

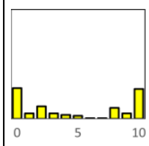


4.3.9 Opgave 9 - Differentialligninger

Opgave 9 I en model kan antallet af en bestemt type bakterier i en madrest beskrives ved en funktion B af tiden t.
Den hastighed, hvormed antallet af bakterier vokser til tidspunktet t (målt i minutter), er proportional med antallet $B(t)$ af bakterier (målt i mio.).
Proportionalitetsfaktoren er $k = 0{,}035$.

(10 point) a) Opskriv en differentialligning, som B må opfylde.

Billedkilde: Colourbox



Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 4,8)
En opgavetype som det er vigtig at få holdt lidt ved lige i ny og næ i undervisningen, da den nemt kan forsvinde blandt de andre mere beregningskrævende opgaver i emnet *Differentialligninger*.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

<u>Opgave 9</u>

a) Opskriv en differentialligning, som B må opfylde

Da B(t) er proportional med den hastighed antallet af bakterier vokser til tiden t, kan differentialligningen skrives på formen:

$y' = k \cdot y$

i dette tilfælde er proportionalitetsfaktoren $k = 0{,}035$

Differentialligningen, som B opfylder er $\underline{\underline{B' = 0{,}035 \cdot B}}$

4.4 Delprøve 2

4.4.1 Opgave 10 - Differentialligninger

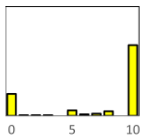
Opgave 10 Der er givet differentialligningen

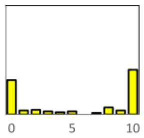
$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}.$$

(10 point) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

En funktion f er løsning til differentialligningen.
Grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

(10 point) b) Bestem $f'(2)$.

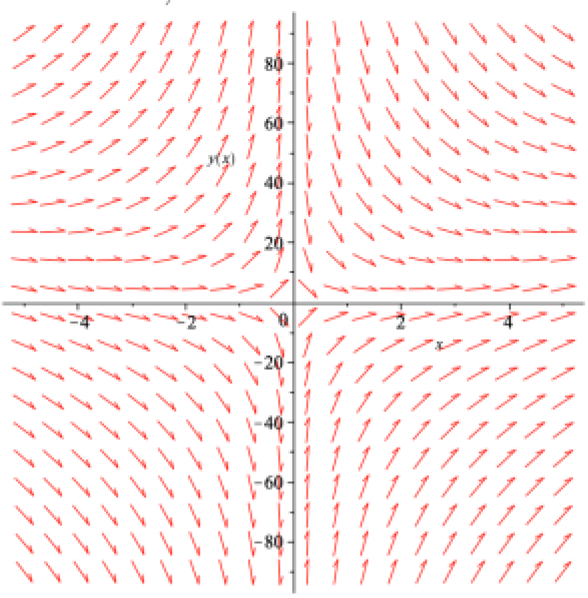




Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 7,4)
Spørgsmålet er meget nemt for de fleste, særligt fordi der ikke er nogle krav til, hvad hældningsfeltet skal vise, herunder hvilket zoom, der bør vælges. Det er oplagt ikke et krav i dette spørgsmål, men hvis der er geometriske objekter, der før eller senere bliver inddraget i opgaven, kan det være en god ide at indstille sit grafvindue ud fra disse.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

$DEplot\left(y'(x) = x - \frac{y(x)}{x}, y(x), x=-5..5, y=-90..90\right)$



Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 5,5)
Dette er et spørgsmål, der lige så godt kunne være stillet i delprøven uden hjælpemidler. Det vurderes også til at være en mindstekravsopgave - alligevel er der omtrent en tredjedel af eleverne, der får 0 point for deres besvarelse af spørgsmålet. Problemet for mange elever består i at forstå koblingen mellem $\frac{dy}{dx}$ og f', men hvis dette ellers er gennemgået i undervisningen, burde spørgsmålet være ligetil. Således opnår også omtrent 40% fuldt point for deres besvarelse.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Jeg indsætter de kendte punkt $P(2,3)$ i differentialligningen.

$$f'(2) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

4.4.2 Opgave 11 - Normalfordelingen

Opgave 11 Nedenstående tabel viser vægten af 200 tilfældigt udvalgte attenårige mænd fra Hongkong.

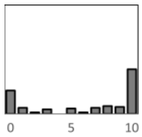
Vægt i kg	51,3	61,9		57,8	58,0

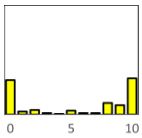
Alle tabellens 200 værdier findes i den vedhæftede fil: Hongkong_vægt

(10 point) a) Gør rede for, at mændenes vægt med god tilnærmelse kan antages at være normalfordelte.

(10 point) b) Bestem intervallet for de normale udfald i denne normalfordeling.

Kilde: SOCR Data





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 6,2)
Et spørgsmål omhandlende dataoverførsel af decimaltal samt konstruktion af normalfordelings-plot/QQ-plot. Spørgsmålet er helt standard og ofte stillet til skriftlig eksamen. Det gælder om at få det øvet med sine elever.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 11

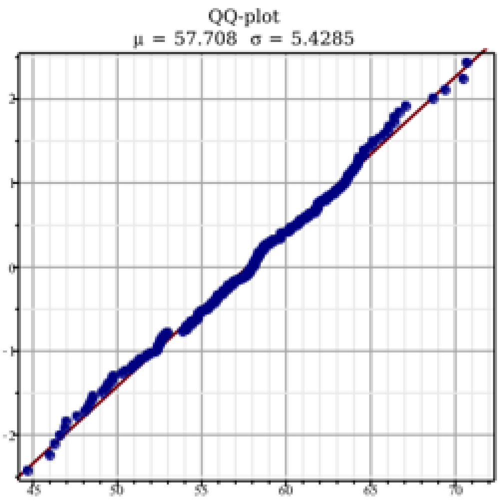
restart
with(Gym) :

En tabel viser vægten af 200 tilfældigt udvalgte 18-årige mænd fra Hongkong.

a) For at kunne redegøre for, om mændenes vægt kan antages at være normalfordelte, laves et fraktilplot over dataene:

$$X := \begin{bmatrix} 51.3 \\ 61.9 \\ 69.4 \\ 64.6 \\ 65.5 \\ 55.9 \\ 64.2 \\ 61.9 \\ 51.0 \\ 54.7 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

200 × 1 Matrix



QQplot(X)

Det ses på fraktilplottet, at dataene lægger sig pænt på den rette linje uden tegn på systematiske afvigelser, hvorfor det må konkluderes, at vægtene af de 18-årige mænd med god tilnærmelse er normalfordelte.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 5,5)

For at kunne besvare dette spørgsmål skal estimaterne for middelværdi og spredning for X bestemmes. Disse fremgår af de fleste CAS-værktøjer i forbindelse med normalfordelingsplottet, men kan i princippet også bestemmes ved hjælp af én-variabel statistik.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) De normale udfald for en normalfordelt stokastisk variabel X $\sim N(\mu, \sigma)$ ligger i intervallet [$\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$]

Denne stokastiske variabel X er i dette tilfælde normalfordelt med $X \sim N(57.7, 5.4)$. Intervallet for de normale udfald er derfor:

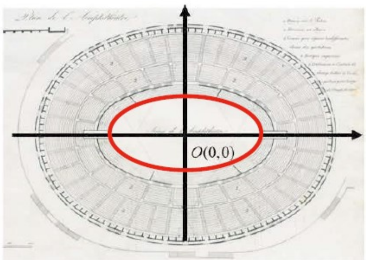
$57.7 - 2 \cdot 5.4 = 46.9$
$57.7 + 2 \cdot 5.4 = 68.5$

Intervallet for normale udfald = $[\mathbf{46.9} ; \mathbf{68.5}]$.

4.4.3 Opgave 12 - Keglesnit (forberedelsesmateriale)

Opgave 12

Figur 1.
Billedkilde: Khanacademy

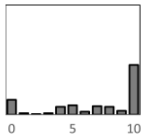


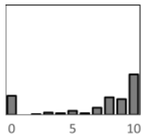
Figur 2.
Billedkilde: Antiqueprints

Fotoet på figur 1 viser det ældste bevarede romerske amfiteater, som ligger i Pompeji. Figur 2 viser en model af amfiteatret. Randen på arenaen beskrives i modellen ved en ellipse med en storakse på 67 meter og en lilleakse på 34 meter.
I modellen antages ellipsen at have centrum i (0, 0).

(10 point) a) Bestem en ligning for denne ellipse.

(10 point) b) Bestem arealet af Pompejis arena ifølge modellen.





Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 6,9)
Endnu et spørgsmål fra forberedelsesmaterialet som ikke kræver det store dybdekendskab til keglesnit eller mere specifikt ellipser. En del elever glemmer at dividere med 2, når *a* og *b* skal bestemmes, men ellers et spørgsmål som går godt for mange.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 12

I en model af et amfiteater kan randen på arenaen tegnes med en ellipse.

a) Bestem en ligning for denne ellipse.

For at bestemme ligningen for ellipsen skal vi kende den generelle ligning på normalform og vide at storaksen og lilleaksen skal halveres for at finde halvakserne a og b:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi ved at vores storakse er $a = \frac{67}{2} = 33,5$ og vores lilleakse er $b = \frac{34}{2} = 17$ og at vores centrum er C (0,0). Derfor kan vi indsætte vores tal i den generelle formel:

$$\frac{x^2}{33,5^2} + \frac{y^2}{17^2} = 1$$

Dette er altså ligningen for ellipsen.

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 7,1)
Her bør forkerte bestemte *a*- og *b*-værdier i spørgsmål a) i princippet ikke koste point i forbindelse med arealbestemmelsen i dette spørgsmål. Dog bør elever, der bruger *a*- og *b*-værdier, der giver åbenlyst forkerte svar, kommentere på dette.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem arealet af arenaens ellipse.

I følge formelsamlingen kan arealet af en ellipse med halvakser a og b findes ved

$A = \pi \cdot a \cdot b$

Vi kan indsætte vores værdier for halvakserne i den generelle formel:

$A = \pi \cdot 33.5 \cdot 17 = A = 1789.137016$

Arealet for ellipsen er altså cirka 1789 m2.

4.4.4 Opgave 13 - Funktioner af to variable

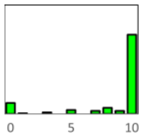
Opgave 13 En funktion f af to variable er givet ved

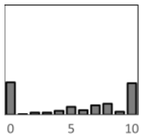
$$f(x,y)=x^2+2y^2+x+2y+1.$$

(10 point) a) Tegn grafen for f.

Funktionen har minimum i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

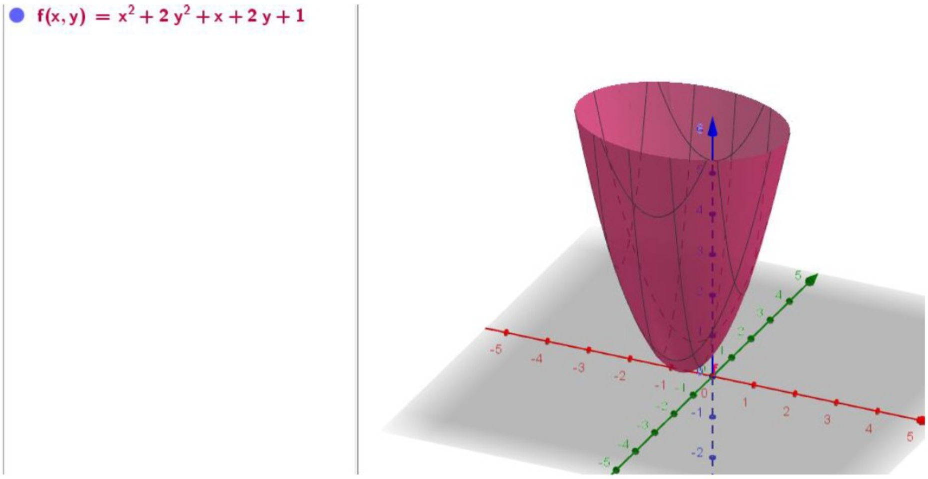
(10 point) b) Bestem koordinatsættet til punktet P.





Spørgsmål 13a (pointgennemsnit: 8,4)
Et spørgsmål som eleverne klarer rigtig fint. Generelt er det en god idé at lære sine elever altid at tegne graferne (og banekurverne) for de funktioner, de arbejder med.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Spørgsmål 13b (pointgennemsnit: 5,4)

Spørgsmålet er en klassiker indenfor emnet funktioner af to variable i delprøven med hjælpemidler. Så meget at flere værktøjsprogrammer nærmest kan løse opgaven med passende forklarende og konkluderende tekst. Hvorvidt man vil lære sine elever at anvende disse automatiserede løsningsmetoder eller insistere på at bestemme stationære punkter ved hjælp af egen udregning af de partielt afledte, må være op til den enkelte lærer, men hvis ellers eleven konkluderer præcist på det stillede spørgsmål, er der ikke noget i spørgsmålsformuleringen, der forhindrer eleven i at anvende sådanne hjælpemidler.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem koordinatsættet til punktet P.

vi skal altså finde det stationære punkt og det gør vi ved at finde gradienten og sætte den lig med nulvektoren:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 1 \\ 4 \cdot y + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x + 1 \\ 4 \cdot y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. WordMat.*

$$x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad y = -\frac{1}{2}$$

Nu mangler vi bare vores z-koordinat i punktet P, den finder vi ved at sætte de 2 x og y-værdier ind i funktionen:

$$f\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Så punktet P har altså koordinaterne $P(-0{,}5; -0{,}5; 0{,}25)$

4.4.5 Opgave 14 - Differentialligninger

Opgave 14 I en model kan vægten af en hund af racen Basset Hound beskrives ved differentialligningen

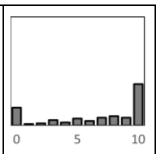
$$y' = 0{,}0069 \cdot y \cdot (26{,}6 - y) \; ,$$

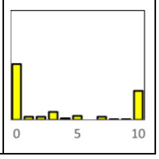
hvor $y = f(x)$ er hundens vægt i kg x uger efter fødslen.
Hundens vægt 6 uger efter fødslen er 1,3 kg.

(10 point) a) Bestem en forskrift for $f(x)$.

(10 point) b) Hvor gammel er hunden ifølge modellen, når dens vægt vokser hurtigst?

Billedkilde: hundeo.com





Spørgsmål 14a (pointgennemsnit: 6,6)
Et spørgsmål der er helt ligetil, hvis man kan anvende sit CAS-værktøj. Det eneste, der er en smule anderledes ved denne opgave, er, at initialbetingelsen ikke har $x = 0$. Det er derfor en rigtig god idé at sætte en del tid af til at træne sine elever i at løse differentialligninger med hjælpemidler med forskelligt formulerede initialbetingelser.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 14
Givet:
$y' = 0{,}0069 \cdot y \cdot (26{,}6 - y)$
$P(6; 1{,}3)$

a) Udregner differentialligningen med punktet P:

$$y' = 0{,}0069 \cdot y \cdot (26{,}6 - y)$$

Differentialligningen løses vha. WordMat's 'Løs differentialligning' funktion med startbetingelsen y(6)=1,3

$$y = \frac{26{,}6}{58{,}53823504573818 \cdot e^{-(0{,}18354 \cdot x)} + 1}$$

Altså forskriften for f, hvis hunden, 6 uger efter fødslen vejer 1,3 kg, er:

$$\underline{\underline{f(x) := \frac{26{,}6}{1 + 58{,}54 \cdot e^{-0{,}18x}}}}$$

Spørgsmål 14b (pointgennemsnit: 3,5)
Dette spørgsmål er en klassiker indenfor logistisk vækst. Men selv uden kendskab til de karakteristiske egenskaber ved denne vækstform, er der flere løsningsmuligheder - f.eks. oplagt ved at finde maksimumsstedet for f'. Desværre er det et spørgsmål, som mange elever finder særdeles svært, og halvdelen af eleverne opnår 0 point.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Det er en logistisk vækst, $M = 26{,}6$, som svarer til den øvre grænse. Væksten er hurtigst når $y = \frac{M}{2} = \frac{26{,}6}{2} = 13{,}3$.
Bestemmer hvornår vægten af hunden stiger hurtigst:

$$f(x) = 13{,}3$$

$$\Updownarrow \quad \text{Ligningen løses for x vha. WordMat.}$$

$$x = 22{,}6095$$

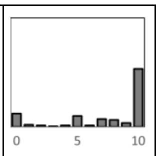
Dvs. at <u>når hunden er 22 uger og 4 dage gammel, stiger dens vægt hurtigst</u>, hvis det er en Basset Hound.

4.4.6 Opgave 15 - Integralregning

Opgave 15 En funktion f er givet ved

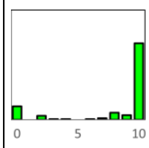
$$f(x) = 4x^2 - x^3 .$$

(10 point) a) Bestem nulpunkterne for f.



Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M_1 i første kvadrant.

(10 point) b) Bestem arealet af M_1.

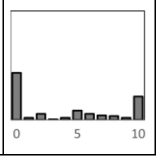


En anden funktion g er givet ved

$$g(x) = k \cdot x^2 - x^3 \quad , \text{ hvor } k \text{ er et positivt tal.}$$

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for g et område M_2 i første kvadrant.

(10 point) c) Bestem tallet k, så M_2 får arealet 44.



Spørgsmål 15a (pointgennemsnit: 7,4)
Over halvdelen af eleverne får fuldt point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Måske er der endda elever, der mister nogle nemme point her, fordi de simpelthen ikke når frem til denne sidste opgave 15. Et godt råd er derfor at lære eleverne at kigge sættet igennem - særligt efter grønne spørgsmål, så alle nemme spørgsmål nås.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

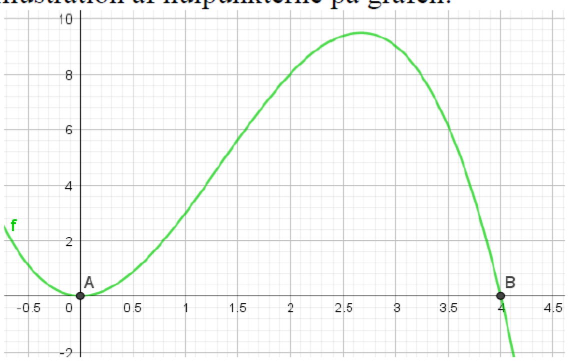
a)

Funktionen defineres:

$$f_{15}(x) := 4x^2 - x^3 :$$

$$solve(f_{15}(x) = 0) = 4, 0, 0$$

Illustration af nulpunkterne på grafen:



$f_{15}(x)$ har nulpunkterne (0,0) og (0,4)

Spørgsmål 15b (pointgennemsnit: 8,2)

En meget stor andel af eleverne får fuldt point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Det kan anbefales at lære sin elever altid at tegne grafen i disse opgaver, så området, hvis areal skal bestemmes, tydeligt fremgår.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)

Arealet M_1 udregnes ved hjælp af integralregning. Da arealet for M_1 afgrænses i første kvadrant, kan nulpunktet 4 bruges til at bestemme arealet. Derudover bruges afgrænsningen $x = 0$, da arealet for M_1 afgrænses i første kvadrant.

$$M_1 = \int_0^{4.} f(x)\,dx \;=\; M_1 = 21.33333333$$

Spørgsmål 15c (pointgennemsnit: 4,0)

Dette sidste spørgsmål er tænkt som sættets ræsonnementkrævende spørgsmål. Det overraskende for mange elever er, at også det bestemte integrals øvre grænse afhænger af *k*. Man kan nok ikke forvente, at særligt mange elever vil kunne løse disse opgavetyper, men det er en god idé at have regnet mindst én af disse inden eksamen, så eleverne kan se, at solve-kommandoen godt kan håndtere ubekendte grænser i integralet.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c)

Funktionen $g(x)$, hvor $k > 0$ defineres

$g(x) := k \cdot x^2 - x^3$:

Nulpunkterne undersøges

$solve(g(x) = 0, x) = k, 0, 0$

Da k er et nulpunkt, kan det udregnes ved hjælp af at løse ligningen for integralet af $g(x) = 44$ i intervallet $[0; k]$ for k.

$$fsolve\left(\int_0^k g(x)\,\mathrm{d}x = 44, k\right) = -4.793563454, 4.793563454$$

Da $k > 0$, er $k = 4.793563454$

5 Opsamling på elevbesvarelserne af stx A-sættene

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i sættene er det værd at fremhæve særligt to forhold.

For det første er der mange af spørgsmålene, hvor en ikke ubetydelig andel af eleverne får 0 point. Tendensen er dog ikke lige så udbredt, som det er tilfældet ved stx B–prøverne (se senere kapitler), hvor mange elever formodentlig giver op undervejs og derfor ikke opnår point i f.eks. grønne spørgsmål, der ligger sent i sættet. Det er værd at bemærke, at det ofte er de samme to emner, som en relativt stor andel af eleverne har svært ved. Det drejer sig om emnet *Differentialligninger* (se spørgsmål 6b) og spørgsmål 13a) fra den 20. maj) samt spørgsmål i forberedelsesmaterialet (se spørgsmål 4a) og 4b) fra den 20. maj og spørgsmål 8a) og 8b) fra den 24. maj).

Der er nok ikke noget at sige til, at en stor andel af eleverne finder emnet *Differentialligninger* svært Det er kulminationen på to i forvejen komplekse emner - *Differentialregning* og *Integralregning*, og opgaverne er endda ofte kontekstbaserede. Med de gennemgåede pointgennemsnit in mente er der i hvert fald ingen tvivl om, at mange elever mangler træning i at regne opgaver i dette emne. Ved at kigge de seneste års eksamenssæt igennem kan man forholdsvis hurtigt danne sig et overblik over hvilke opgaver, der ofte har været stillet i emnet.

- I første delprøve drejer det sig f.eks. om spørgsmål omhandlende tangentligningsbestemmelse, "gøre prøve", linjeelementer (også grafisk) samt udregning af konkrete løsninger til givne begyndelsesværdiproblemer.

- I anden delprøve er det spørgsmål i bestemmelse af vækshastighed direkte ud fra en given differentialligning, løsning af begyndelsesværdiproblemer samt tegning af hældningsfelt med eller uden løsningskurve.

Med hensyn til spørgsmålene i forberedelsesmaterialet er det tydeligt, at arbejdet med materialet har været utilstrækkeligt grundigt for en ikke ubetydelig andel af eleverne. Det giver et formodentlig unødvendigt pointtab, da disse spørgsmål ofte er ganske overkommelige, hvis man har fået regnet opgaverne fra det udleverede materiale, og man har øvet sig i at anvende det dertilhørende "indstiksark".

For det andet er det værd at fremhæve det overraskende lave pointgennemsnit på 2,7 point i spørgsmål 3b) i 24. maj-sættet. Spørgsmålet omhandler en ligning for en tangent til en banekurve og trækker derfor på basal kernestof fra B-niveauets *Analytisk geometri og vektorregning*. Det er derfor et godt råd, at man på A-niveauet husker at inddrage særligt linjens ligning og parameterfremstilling, vinkler mellem vektorer (herunder parallelitet og ortogonalitet) samt tangenter til cirkler i forbindelse med gennemgangen af emnet *Vektorfunktioner*.

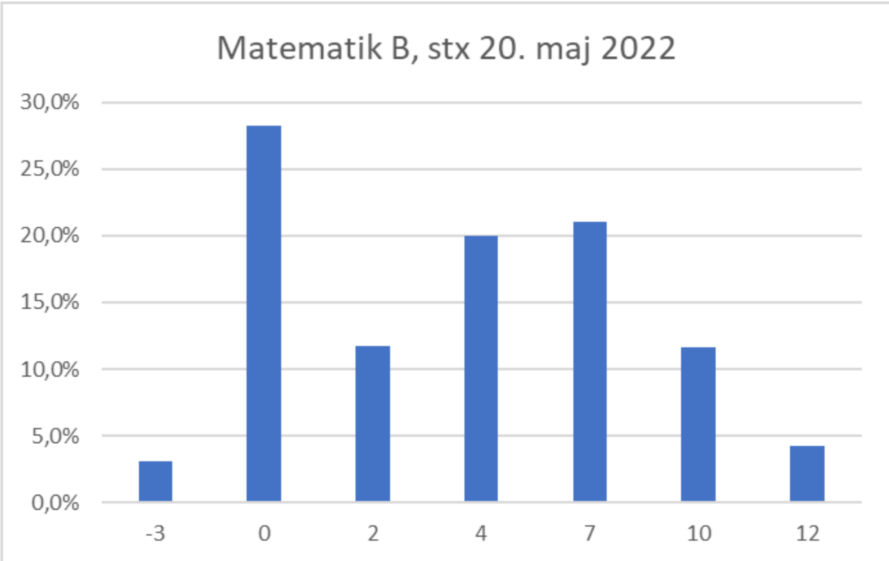
6 Stx B-niveau 20. maj 2022

Prøveresultat matematik B, stx 20. maj 2022[3]

Antal eksaminander til prøve	**872**
Karaktergennnemsnit	**4,09**
Andel ikke-beståede	**31,3 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	3,1%	28,2%	11,8%	20,0%	21,1%	11,6%	4,2%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-71	66-85	80-117	112-157	152-185	180-200

[3] Der er en restgruppe på 22 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

6.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 286 elever i forcensuren for denne prøve. Bemærk at det er så få observationer, at en statistisk behandling er af tvivlsom værdi - der blev også eksamineret i STX-B 24. maj, og her er populationen betydeligt større.

Der er stillet 11 opgaver med i alt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

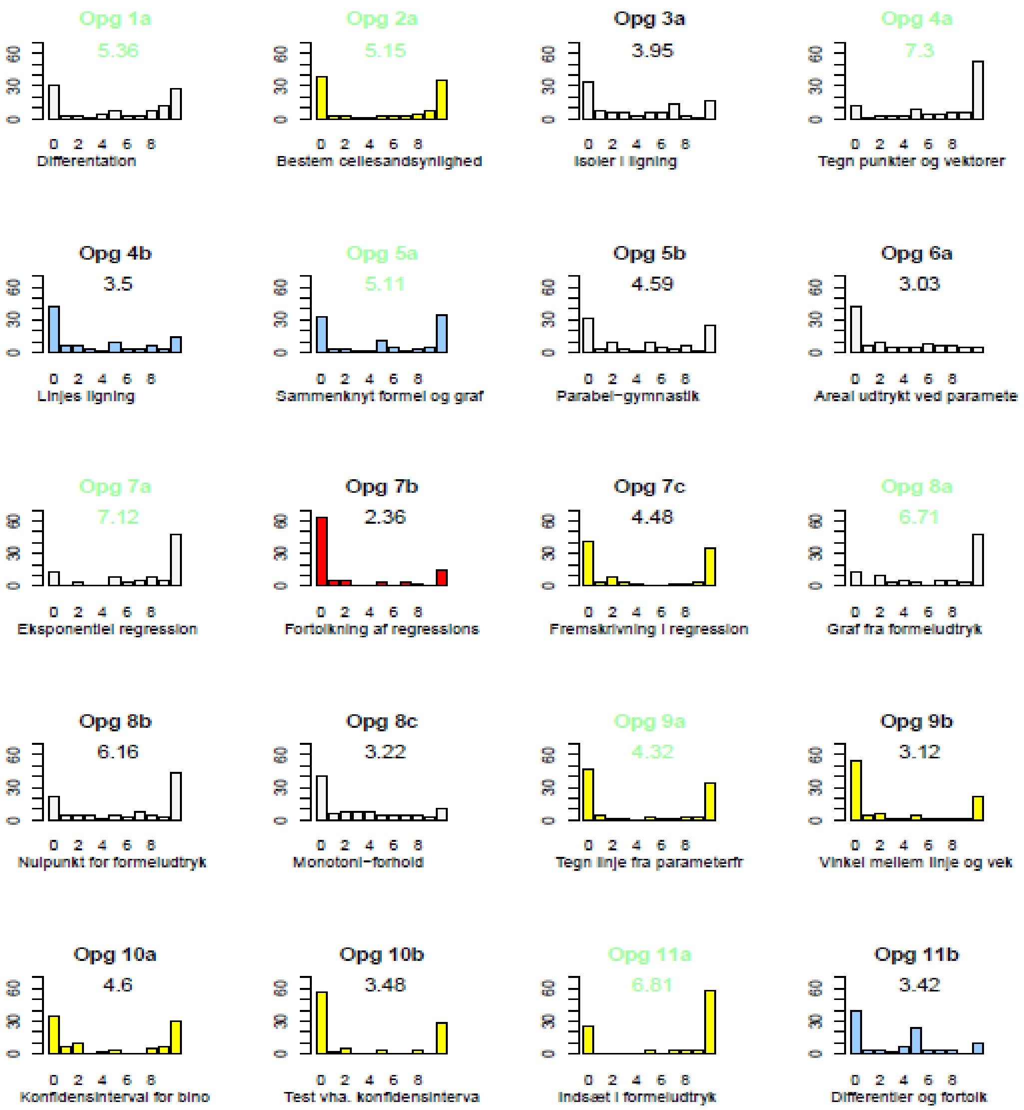
	Antal
Mindstekrav (grøn)	8
Ikke-mindstekrav (hvid)	12

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes, at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 8.

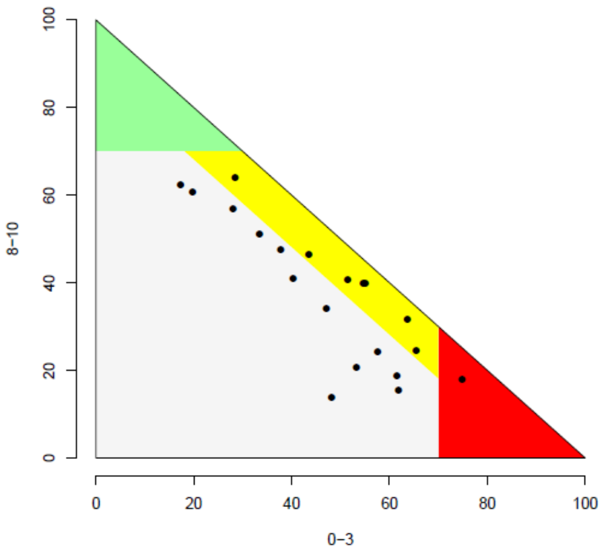


Figur 8: *Resultater for spørgsmålene for STX-B 20. maj 2022. Overskriften er farvet grøn for mindstekravs-spørgsmål. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Midtertop	Standard
0	1	7	3	9

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

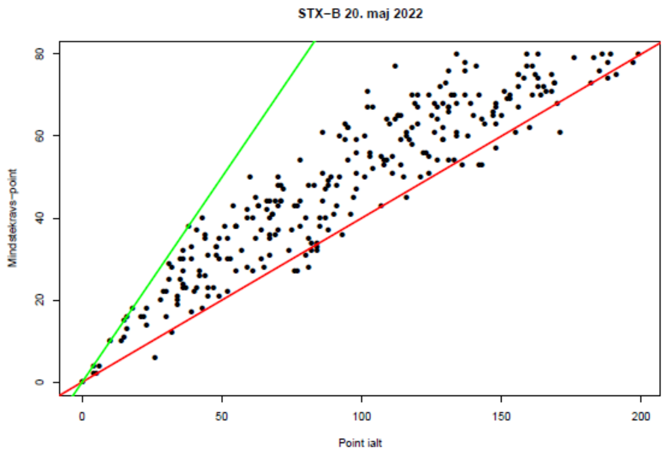


Figur 9: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-B 20. maj 2022. Spørgsmål der klassificeres som 'midtertop' (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
4a	Tegn punkter og vektorer	7.3
7a	Eksponentiel regression	7.12
11a	Indsæt i formeludtryk	6.81
8a	Graf fra formeludtryk	6.71
8b	Nulpunkt for formeludtryk	6.16
1a	Differentation	5.36
2a	Bestem cellesandsynlighed	5.15
5a	Sammenknyt formel og graf	5.11
10a	Konfidensinterval for binom	4.6
5b	Parabel-gymnastik	4.59
7c	Fremskrivning i regressionsmodel	4.48
9a	Tegn linje fra parameterfremst.	4.32
3a	Isoler i ligning	3.95
4b	Linjes ligning	3.5
10b	Test vha. konfidensinterval	3.48
11b	Differentier og fortolk	3.42
8c	Monotoni-forhold	3.22
9b	Vinkel mellem linje og vektor	3.12
6a	Areal udtrykt ved parameter	3.03
7b	Fortolkning af regressionsmodel	2.36

Tabel 3: *Spørgsmålene for STX-B 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* **mindstekrav** *er farvet grønne.*



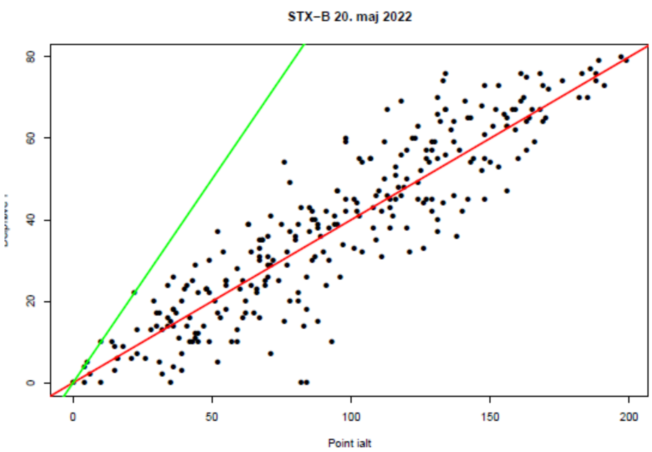
Figur 10: *STX-B 20. maj 2022, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at eleverne får en god del af de indledende point i mindstekravsopgaverne. Men den viser også, at kun de dygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne - disse opgaver har altså indbyggede vanskeligheder, eller også er der kun ganske få elever, der har overblik over hele kernestoffet.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
4a	Tegn punkter og vektorer	7.3
7a	Eksponentiel regression	7.12
11a	Indsæt i formeludtryk	6.81
8a	Graf fra formeludtryk	6.71
8b	Nulpunkt for formeludtryk	6.16
1a	Differentation	5.36
2a	Bestem cellesandsynlighed	5.15
5a	Sammenknyt formel og graf	5.11
10a	Konfidensinterval for binom	4.6
5b	Parabel-gymnastik	4.59
7c	Fremskrivning i regressionsmodel	4.48
9a	Tegn linje fra parameterfremst.	4.32
3a	Isoler i ligning	3.95
4b	Linjes ligning	3.5
10b	Test vha. konfidensinterval	3.48
11b	Differentier og fortolk	3.42
8c	Monotoni-forhold	3.22
9b	Vinkel mellem linje og vektor	3.12
6a	Areal udtrykt ved parameter	3.03
7b	Fortolkning af regressionsmodel	2.36

Tabel 4: *Spørgsmålene for STX-B 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* **uden adgang til CAS** *er farvet lilla.*



Figur 11: *STX-B 20. maj 2022. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende ret præcist får samme udbytte af de to delprøver.

6.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx B - sættet fra den 20. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

6.3 Delprøve 1

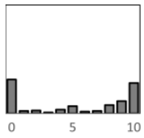
6.3.1 Opgave 1 - Differentialregning

Opgave 1 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 5x^2 + 3.$$

(10 point)

a) Bestem $f'(x)$.



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 5,4)
Et klassisk spørgsmål om bestemmelse af differentialkvotienten for en simpel funktion. Alligevel er der over en fjerdedel af eleverne, der får 0 point for deres besvarelse. En typisk fejl er, at konstanten ikke differentieres væk.
En del censorer nævner i forbindelse med dette spørgsmål, at de savner mellemregninger. Det er ikke et krav for at opnå det maksimale antal point for denne spørgsmålstype, at der refereres til differentiationsregneregler, eller at der angives (mange) mellemregninger, men det kan alligevel være fornuftigt for en del elever at tage et par mellemregninger med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelig resultat skulle gå hen og være forkert.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 1

$$f(x) = 5x^2 + 3$$

$$f'(x) = (5x^2)' + (3)'$$

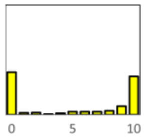
$$5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} \qquad 0$$

$$f'(x) = 10x$$

6.3.2 Opgave 2 - Sandsynlighedsregning

Opgave 2 Tabellen viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X.

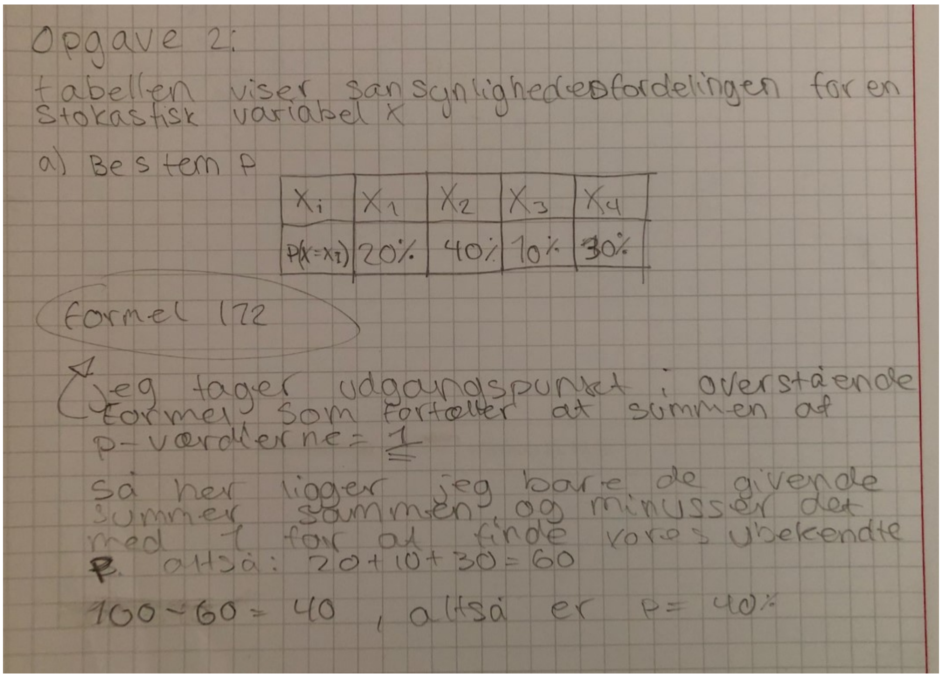
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	20 %	p %	10 %	30 %



(10 point) a) Bestem p.

Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 5,1)
Et spørgsmål der tester en grundlæggende forståelse af, hvad der forstås ved en sandsynlighedsfordeling. Når ca. en tredjedel af eleverne får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål, skyldes det formentlig, at mange elever føler sig utrygge ved emnet sandsynlighedsregning og derfor giver op på forhånd. Et godt råd er derfor at huske sine elever på, at nogle spørgsmål i emnet kan klares ved blot at bruge sin sunde fornuft.
En del censorer påpeger, at notationen kan virke forvirrende, idet det korrekte svar er 40 og ikke 40%. Det bør dog vurderes som en fejl i den absolut milde ende.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 2:
tabellen viser sansynlighedesfordelingen for en stokastisk variabel X
a) Bestem P

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
$P(X=X_i)$	20%	40%	10%	30%

formel 172

Jeg tager udgangspunkt i overstående formel som fortæller at summen af p-værdierne = 1

Så her ligger jeg bare de givende summer sammen og minusser det med 1 for at finde vores ubekendte P. altså: 20+10+30=60

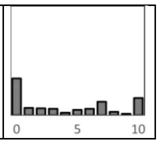
100-60=40, altså er p=40%

6.3.3 Opgave 3 - Tal, ligninger og formler

Opgave 3 (10 point)

a) Isolér T i formlen

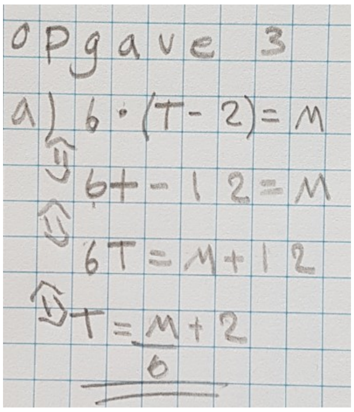
$$6 \cdot (T - 2) = M.$$



Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 4,0)

For den erfarne lærer er det nok ikke en overraskelse, at dette spørgsmål volder de fleste elever særdeles store vanskeligheder. Det kræver træning at beherske regneartemes hierarki og simpel bogstavmanipulation.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

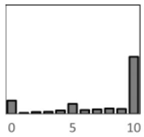


6.3.4 Opgave 4 - Analytisk geometri og vektorer

Opgave 4 I et koordinatsystem er der givet punkterne

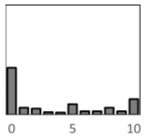
Bilag vedlagt $A(2,1)$, $B(6,3)$ og $C(0,2)$.

(10 point) a) Tegn vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ på vedlagte bilag.



En linje l går gennem punktet C og er parallel med vektoren $\overrightarrow{AB}$.

(10 point) b) Bestem en ligning for linjen l.



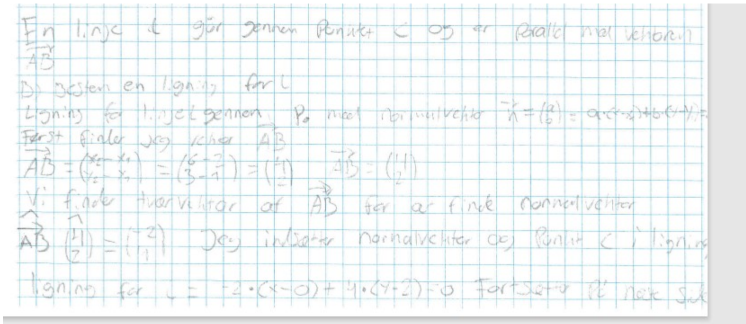
Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 7,3)
Dette er et spørgsmål, som rigtig mange elever klarer fint. Over halvdelen af eleverne får 10 point, og der hvor der trækkes point, drejer det sig hovedsageligt om sjuskefejl eller manglende "pilehoveder" på de indtegnede vektorer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Ikke indsendt af rettegrupperne.

Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 3,5)
I modsætning til foregående spørgsmål er dette spørgsmål særdeles svært for rigtig mange elever - 40% får 0 point. Det er særligt koblingen mellem den simple vektorregning og den analytiske geometri, som volder problemer. Emnet *Analytisk geometri og vektorer* indeholder utallige opgavetyper, og det er ikke nemt for eleverne at nå at oparbejde de nødvendige rutiner til at løse disse opgaver.
Bemærk at det ikke er et krav for at opnå det maksimale antal point i denne spørgsmålstype, at den fundne ligning reduceres, men det kan tælle op i helhedsbedømmelsen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



En linje l går gennem punkt C og er parallel med vektor $\overrightarrow{AB}$

b) Bestem en ligning for l

Ligning for linje gennem P_0 med normalvektor $\vec{n} = \binom{a}{b} = a(x-x_0)+b(y-y_0)$

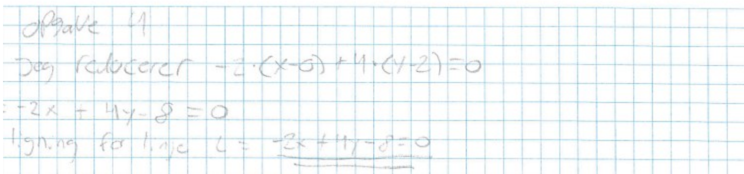
Først finder jeg vektor $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \binom{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \binom{6-2}{3-1} = \binom{4}{2}$ $\overrightarrow{AB} = \binom{4}{2}$

Vi finder tværvektor af $\overrightarrow{AB}$ for at finde normalvektor

$\widehat{\overrightarrow{AB}}\ \binom{4}{2} = \binom{-2}{4}$ Jeg indsætter normalvektor og punkt C i ligning

ligning for l = $-2\cdot(x-0)+4\cdot(y-2)=0$ fortsætter på næste side



opgave 4

Jeg reducerer $-2\cdot(x-0)+4\cdot(y-2)=0$

$-2x+4y-8=0$

ligning for linje l = $-2x+4y-8=0$

6.3.5 Opgave 5 - Andengradspolynomier

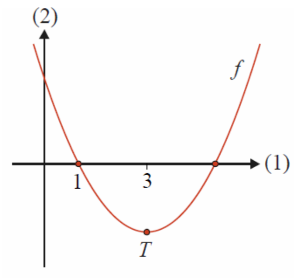
Opgave 5 Figuren viser grafen for et andengradspolynomium f givet ved

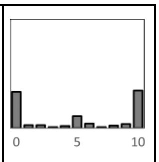
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

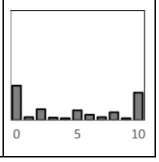
(10 point) a) Bestem fortegnet for hvert af tallene a og c. Begrund svarene.

Grafens toppunkt T har førstekoordinaten 3. Det ene af nulpunkterne er $x = 1$.

(10 point) b) Bestem det andet nulpunkt.







Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 5,1)
Pointene for besvarelserne af dette spørgsmål fordeler sig i udpræget grad ud på 0, 5 og 10 point. 0 point til de ca. 30%, som ikke har basal viden om emnet, 5 point til dem, der kender betydningen af enten *a* eller *c*, og endelig 10 point til dem, der kender betydningen af både *a* og *c*. Dette tyder også på en vis velvillighed hos censorerne i forhold til ofte anvendte, men lidt upræcise formuleringer som "parablen er glad" eller "skæringspunktet med y-aksen er positiv".

Et eksempel på en elevbesvarelse:

OPg.5

a) Bestem fortegnene for a og c

a er Positiv da grenene vender oPad

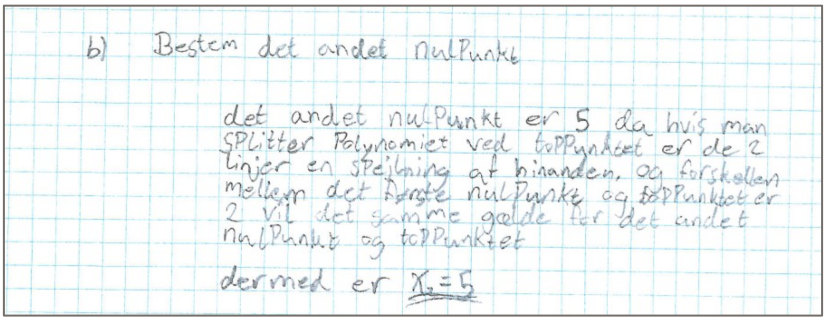
c er Positiv da skæringsPunktet med y-aksen er Positiv

dermed er både a og c Positive

Spørgsmål 5b (pointgennemsnit: 4,6)

Denne spørgsmålsformulering foranlediger mange elever til blot at "aflæse" funktionens andet nulpunkt uden at komme ind på symmetriargumentet. Et godt råd er her at lære sine elever, at de som hovedregel kun skal aflæse værdier i et koordinatsystem i en opgave, hvis der optræder gitterlinjer i det angivne koordinatsystem, eller hvis der er angivet en talværdi, der kan aflæses (f.eks. at toppunktets førstekoordinat er lig 3, hvilket her også fremgår af opgaveteksten).

Et eksempel på en elevbesvarelse:


b) Bestem det andet nulPunkt

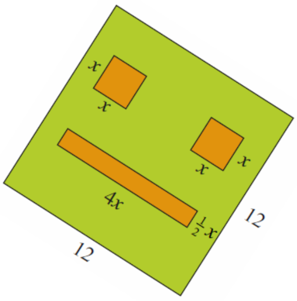
det andet nulPunkt er 5 da hvis man SPLitter Polynomiet ved toPPunktet er de 2 linjer en sPejlning af hinanden, og forskellen mellem det første nulPunkt og toPPunktet er 2 vil det samme gælde for det andet nulPunkt og toPPunktet

dermed er $\underline{\underline{x_2 = 5}}$

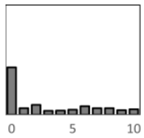
6.3.6 Opgave 6 - Tal, ligninger og formler

Opgave 6

Figur 1. Logo til videospillet Geometry Dash



Figur 2



Figur 2 viser en model af logoet til videospillet *Geometry Dash*. Modellen består af kvadrater og et rektangel. Sidelængderne fremgår af figuren. Alle målene er angivet i cm. Arealet af det grønne område på figur 2 betegnes $A(x)$.

(10 point) a) Bestem en forskrift for $A(x)$.

Billedkilde: gameforge.com

Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 3,0)

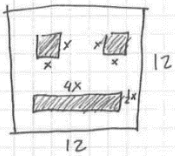
Dette spørgsmål har til formål at udfordrer også de mere fagligt robuste elever, og halvdelen af eleverne får også 0 eller 1 point for deres besvarelse af spørgsmålet. Til gengæld vidner den jævne fordeling af de resterende pointtildelinger om, at censorkorpset her er villigt til at give point for det gode, man får med i sin besvarelse, f.eks. at man kan finde det samlede areal af det store kvadrat eller angive arealerne af de små kvadrater som x^2. Et godt råd er derfor at lære sine elever altid at forsøge at få noget ned på papiret til hvert spørgsmål. Selv små fornuftige overvejelser kan give point.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg 6

a) Bestem en forskrift for $A(x)$

12^2 [Det ydre kvadrat kan skrives som 12^2



$2x^2$ [De to mindre ~~kvdater~~ kan skrives som x^2 altså er der $2x^2$

$2x^2$ [Rektanglet kan berkrives ved $4x \cdot \frac{1}{2}x = 2x^2$

Derfor har vi den ydre (12^2) og trækker det indre orange fra $(4x^2)$

$A(x) = 12^2 - 4x^2$

dette kan reduceres til $\underline{\underline{A(x) = 144 - 4x^2}}$

6.4 Delprøve 2

6.4.1 Opgave 7 - Lineær regression

Opgave 7

Nedenstående tabel viser udviklingen i børnedødeligheden for Bangladesh i perioden 2000-2019.
Børnedødeligheden måles i antal dødsfald for børn under 5 år pr. tusinde levendefødte.

Antal år efter 2000	0	1	…	18	19
Børnedødelighed	87	82	…	32	31

Alle tabellens 20 datapunkter findes i den vedhæftede fil: Bangladesh.xlsx

I en model kan børnedødeligheden $f(x)$ beskrives ved en funktion

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor x er antal år efter 2000.

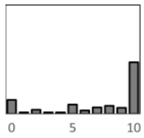
(10 point) a) Bestem tallene a og b ved eksponentiel regression på alle tabellens data.

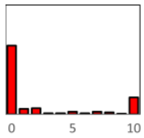
(10 point) b) Hvor mange procent falder børnedødeligheden med om året ifølge modellen?

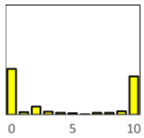
Et af FN's verdensmål er, at børnedødeligheden i 2030 skal være under 25.

(10 point) c) Vil Bangladesh ifølge modellen nå dette mål?

Kilde: unstats.un.org

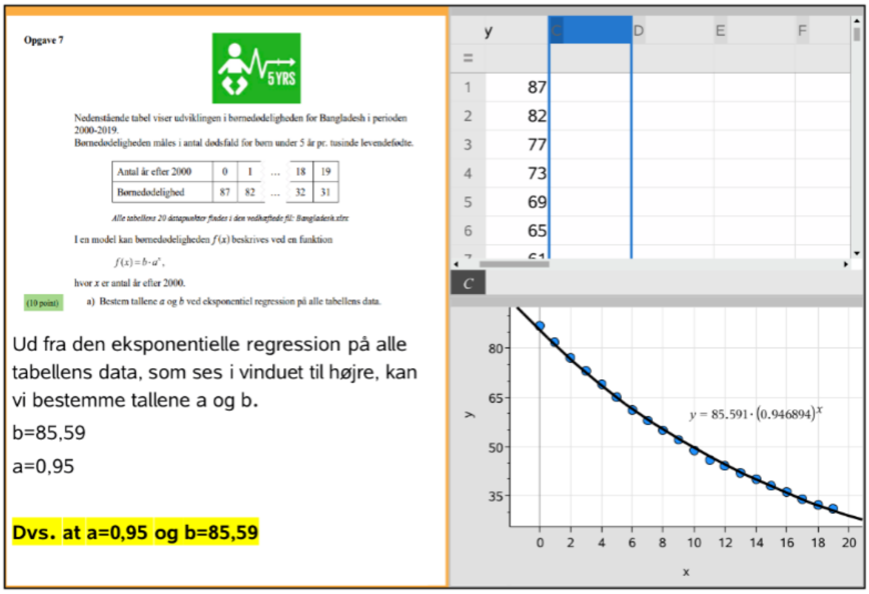






Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 7,1)
Dette spørgsmål går rigtig godt for mange - omkring 50% får fuldt point. Af typiske fejl og mangler kan nævnes, at der byttes om på *a* og *b* i konklusionen (en fejl der som hovedregel opstår i forbindelse med regressionsoutputtet i TI-Nspire), manglende konkluderende tekst (bemærk at der eksplicit spørges til *a* og *b*), og så er der elever, der ikke kan dataimport og derfor nøjes med at lave regression på de fire punkter, der fremgår af tabellen i opgaven.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 2,4)
Begrebet fremskrivningsfaktor er en central del af emnet eksponentielle udviklinger, der som udgangspunkt hører til på det underliggende C-niveau. Derfor er det måske overraskende, at dette meget simple fortolkningsspørgsmål er det, der i hele sættet volder eleverne størst problemer. Det er derfor vigtigt, at man bliver ved med at repetere de mest centrale dele af kernestoffet fra underliggende niveauer hele vejen frem til den afsluttende eksamen.
En klassisk fejl, som hører til i den milde ende, ses nedenfor, idet eleven konkluderer, at der har været et negativt fald.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Hvor mange procent falder børnedødeligheden med om året ifølge modellen?

a=0,95

Vi bestemmer vækstraten r:

r=a−1

$0.95-1 \blacktriangleright {}^{-}0.05$

${}^{-}0.05\cdot 100 \blacktriangleright {}^{-}5.\ \%$

Dvs. at børnedødeligheden falder med −5% om året ifølge modellen.

Spørgsmål 7c (pointgennemsnit: 4,5)
Et spørgsmål som ligesom det foregående trækker på viden fra det underliggende C-niveau. Ca. 40% af eleverne får 0 point i dette spørgsmål, hvilket måske kan skyldes, at nogle elever har givet op på b) spørgsmålet og derfor ikke forsøger sig med c) spørgsmålet. Et godt råd er derfor at fortælle sine elever, at de skal læse alle spørgsmål grundigt igennem og gerne forsøge at skrive noget fornuftigt, selvom de ikke har et færdigt svar på spørgsmålet. Typiske fejl, blandt dem der får svaret på spørgsmålet, er udokumenterede aflæsninger samt konklusioner, der ikke tager forbehold for, at der arbejdes med en model

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Et af FN's verdensmål er, at børnedødeligheden i 2030 skal være under 25.

c) Vil Bangladesh ifølge modellen nå dette mål?

Jeg definere funktionen:

$f(x):=85.59\cdot(0.95)^x$ ▸ *Udført*

Indsætter 30 på x´s plads, da x er antal år efter 2000:

$f(30)$ ▸ 18.3709

18,37<25

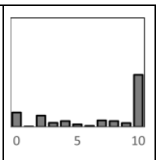
Dvs. at Bangladesh ifølge modellen vil nå deres mål om at børnedødeligheden i 2030 skal være under 25, da 18,37<25.

6.4.2 Opgave 8 - Funktioner og differentialregning

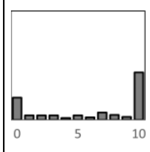
Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3).$$

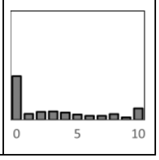
(10 point) a) Tegn grafen for f.



(10 point) b) Bestem nulpunkterne for f.



(10 point) c) Bestem ved hjælp af $f'(x)$ monotoniforholdene for f.



Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 6,7)

Et klassisk "Tegn grafen"-spørgsmål. Da definitionsmængden for funktionen ikke er begrænset, er det en del af spørgsmålet, at eleven vælger et passende grafvindue at vise grafen i, således at grafens to skæringer med *x*-aksen samt skæringen med *y*-aksen fremgår tydeligt.

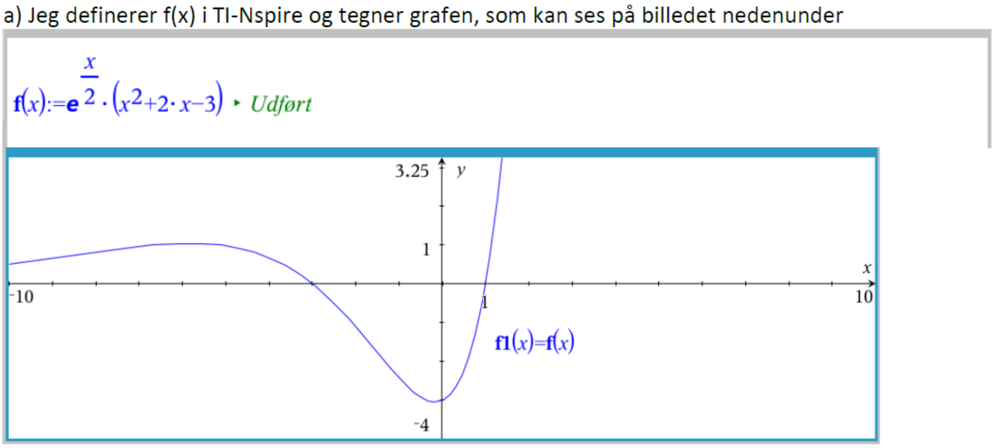
Det volder særligt en del TI-Nspire brugere problemer at vælge det korrekte *e*, når forskriften skal skrives ind. Konsekvenser ved dette er ikke bare tabte point i dette spørgsmål, men i hele opgave 8. Det er derfor en rigtig god idé at sikre sig, at alle ens elever har prøvet at arbejde med funktioner indeholdende den naturlige eksponential funktion på deres respektive CAS-værktøjer inden eksamen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

Funktionen f er givet ved: $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3)$

a) Jeg definerer f(x) i TI-Nspire og tegner grafen, som kan ses på billedet nedenunder



Grafen er tegnet ved brug af TI-Nspire

Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 6,2)
Da nulpunkterne for *f* fremstår som pæne hele tal ved aflæsning af grafen, angiver mange elever disse uden yderligere argument. Ved en sådan grafisk løsning bør man naturligvis angive at koordinaterne til hvert af skæringspunkterne er bestemt ved hjælp af CAS-værktøjets skæringspunktsværktøj. Bemærk dog endvidere at idet funktionen ikke er begrænset, vil det ikke være muligt at få det maksimale antal point for besvarelsen, hvis denne alene indeholder et grafisk argument. En mere sikker løsningsprocedure er at besvare disse spørgsmål ved at løse en ligning.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Ikke indsendt af rettegrupperne.

Spørgsmål 8c (pointgennemsnit: 3,2)
Et klassisk spørgsmål i differentialregning som omkring 40% opnår 0 point i. Det kan muligvis have forvirret nogle elever, at man i spørgsmål b) spørger til nulpunkter for f, når det er f', der skal sættes lig nul i en monotoniundersøgelse. Men da monotoniundersøgelse sammen med tangentligningsbestemmelse er blandt de absolut mest stillede spørgsmål i emnet, bør dette være en spørgsmålstype, man prioriterer at terpe med sine elever, indtil de opnår en rimelig robusthed overfor små variationer i den kontekst, opgaven stilles i.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Jeg definerer f(x) i TI-Nspire

$\mathbf{f}(x):=\mathbf{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\left(x^2+2\cdot x-3\right)$ ▸ *Udført*

Efter differentierer jeg i TI-Nspire, og kalder f'(x) for df(x)

$df(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*

Herefter bruger jeg kommandoen solve i TI-Nspire til at løse ligningen f'(x)=0

$\text{solve}(\mathbf{df}(x)=0,x)$ ▸ $x=-5.82843$ or $x=-0.171573$

Jeg undersøger f'(x) på begge sider af de fundende punkter, og laver en monotonilinje

$\mathbf{df}(-7)$ ▸ 0.12079 $\mathbf{df}(-3)$ ▸ -0.892521 $\mathbf{df}(2)$ ▸ 23.1054

$$\begin{bmatrix} x & \square & -5.83 & \square & -0.17 & \square \\ \mathbf{df} & + & 0 & - & 0 & + \\ \mathbf{f} & / & - & \backslash & - & / \end{bmatrix}$$

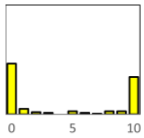
Altså: f(x) er voksende i]-∞;-5,83] og [-0,17;∞[
f(x) er aftagende i [-5,83;-0,17]

6.4.3 Opgave 9 - Analytisk geometri og vektorer

Opgave 9 En linje l er givet ved parameterfremstillingen

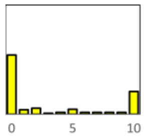
$$l:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Tegn linjen l.



Der er givet punkterne $P(5,-1)$ og $Q(11,1)$. Punktet P ligger på linjen l.

(10 point) b) Bestem den spidse vinkel mellem $\overrightarrow{PQ}$ og linjen l.



Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 4,3)

Endnu et "tegne"-spørgsmål, men her er det en linje givet ved en parameterfremstilling, der skal indtegnes, hvilket volder eleverne en del flere problemer. Det er en god idé at øve sine elever i at tegne: grafer for funktioner (både med og uden begrænset definitionsmængde), linjer givet ved parameterfremstillinger, linjer givet ved ligninger, lodrette og vandrette linjer samt cirkler givet ved ligninger.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Ikke indsendt af rettegrupperne.

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 3,1)

Elevernes besvarelse af dette spørgsmål viser igen, hvor store problemer emnet *Analytisk geometri og vektorer* volder eleverne. De fleste af de elever, der ikke har fået tegnet linjen i spørgsmål a), får også 0 point i spørgsmål b), selvom spørgsmålene i princippet er uafhængige. Dette skyldes formentlig, at mange elever som en form for overlevelsesstrategi har besluttet sig for, at spørgsmål indenfor dette emne i delprøve 2 skal løses grafisk. Et godt råd er at repetere vektorvinkelformlen og afstandsformlen punkt-linje med sin elever i ny og næ.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Der er givet punkterne P(5,−1) og Q(11,1). Punktet ligger på linjen l.

b) Bestem den spidse vinkel mellem $\overrightarrow{PQ}$ og linjen l.

Jeg starter med at udregne koordinaterne til vektoren $\overrightarrow{PQ}$, jeg bruger formlen

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}, \text{ hvor } P(x_1,y_1) \text{ og } Q(x_2,y_2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 11-5 \\ 1--1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nu ved vi at retningsvektoren for linjen l er $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ og retningsvektoren for $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem $\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{r}$ er

dotP=prikprodukt norm=længde

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\cdot \text{norm}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)}\right) = 52.125° \approx 52{,}1°$$

Den spidse vinkel mellem $\overrightarrow{PQ}$ og l er bestemt ved 52,1°

6.4.4 Opgave 10 - Konfidensintervaller

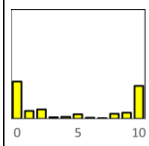
Opgave 10 I 2015 var andelen af hvide biler 20,3 % af alle nye biler i Danmark.
I 2020 undersøgte man, om andelen af hvide biler havde ændret sig. I en tilfældigt udvalgt stikprøve på 412 nye biler var 89 hvide.

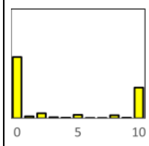
(10 point) a) Bestem et 95 %-konfidensinterval for andelen af hvide biler i 2020.

(10 point) b) Anvend konfidensintervallet til at afgøre, om andelen af hvide biler har ændret sig signifikant fra 2015 til 2020.

Kilde: hvilkenbil.dk

Billedkilde: vejhjælpudenabonnement.dk





Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 4,6)
Et klassisk spørgsmål omhandlende konstruktion af konfidensintervaller. Spørgsmålet kunne gøres nemmere ved at vente med at give oplysningen om de 20,3% hvide biler i 2015 til efter spørgsmål a), men med denne formulering er det en selvstændig pointe, at eleverne skal kunne udvælge hvilken andel, der skal anvendes hvornår. Da det overordnede emne *Kombinatorik og sandsynlighedsregning* kan være særdeles udfordrende for mange elever, kan det være en god idé i et repetitionsforløb i emnet at give særlig vægt til opgaver omhandlende fx konfidensintervaller, tosidet binomialtest, binomialkoefficienter samt (kumulerede) sandsynligheder i binomialfordelingen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) bestem et 95%−konfidensinterval for andelen af hvide biler.

$\mathbf{nsucces}:=89 \blacktriangleright 89$

$\mathbf{n}:=412 \blacktriangleright 412$

$\hat{p}:=\frac{\mathbf{nsucces}}{\mathbf{n}}\cdot 1. \blacktriangleright 0.216019$

$\hat{p}-1.96\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{\mathbf{n}}} \blacktriangleright 0.176281$

$\hat{p}+1.96\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{\mathbf{n}}} \blacktriangleright 0.255757$

95%−konfidensintervallet er altså [0.176281;0.255757]

dette betyder at vi med 95% sikkerhed kan sige at sandsynligheden for at en ny bil i Danmark er hvid ligger i dette interval.

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 3,5)
Det er erfaringsmæssigt ikke overraskende, at over halvdelen af eleverne får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål, men det er ærgerligt, idet eleverne selv med et forkert udregnet konfidensinterval i spørgsmål a) ofte vil få mange point ved blot at forholde sig til, om den angivne andel ligger i det udregnede interval. Formentlig skyldes det lave pointgennemsnit, at en del elever har givet op på emnet og afleverer blankt til hele opgave 10.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Ikke indsendt af rettegrupperne.

6.4.5 Opgave 11 - Funktioner og differentialregning

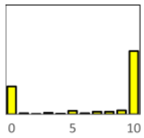
Opgave 11 Jan graver en lang rende i løbet af 4 timer.
I en model er længden $f(x)$ af den rende, Jan har gravet efter x timers arbejde, givet ved

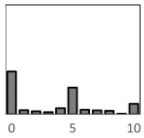
$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x \text{, hvor } 0 \le x \le 4.$$

Længden $f(x)$ måles i meter.

(10 point) a) Hvor lang er renden efter 2 timers arbejde?

(10 point) b) Bestem $f'(3)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om Jans arbejde.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 6,8)
Over halvdelen af eleverne får fuldt point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Måske er der endda elever, der mister nogle nemme point her, fordi de simpelthen ikke når frem til denne sidste opgave 11. Et godt råd er derfor at lære sine elever at kigge sættet igennem - særligt efter grønne spørgsmål, så alle nemme spørgsmål nås.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

opg.11

I en model er længden *f(x)* af en rende Jan har gravet på 4 timer efter x timers arbejde, givet ved:

$f(x):=-x^3+6\cdot x^2+15\cdot x|0\le x\le 4$ ▸ *Udført*

længden *f(x)* måles i meter

a) Hvor lang er renden efter 2 timer?

$f(2)$ ▸ 46

dvs. at efter to timers arbejde for Jan vil renden være 46 meter lang.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 3,4)
Dette sidste spørgsmål i sættet tester elevernes forståelse af sammenhængen mellem f' og væksthastigheden for den afhængige variabel. Opgavetypen er tit svær for eleverne, men den hører til blandt de spørgsmål, der oftest stilles i emnet - og endda ikke altid som den sidste i et sæt. Det kan derfor være værd at tage denne opgavetype med i et repetitionsforløb sammen med monotoniundersøgelse og tangentligningsbestemmelse.
Som det fremgår af pointfordelingen, er der mange elever, der får 5 point for opgaven, idet de bestemmer $f'(3)$ korrekt. Til gengæld kniber det med fortolkningen, hvilket også fremgår af den ellers fine besvarelse nedenfor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) *f´(x)* bestmmes og der gøres rede for hvad resulatet fortæller om Jans arbejde:
Vi finder den afledte funktion:

$\mathbf{fm}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*

$\mathbf{fm}(3)$ ▸ 24

f(x) er længden af renden (målt i meter) til x antal timers arbejde. Så er f´(x) den hastighed som længden af renden ændres med tiden x. At f´(x) = 24 betyder derfor at efter 3 timers arbejde er længden af renden vokset med en hastighed på 24 meter pr. time.

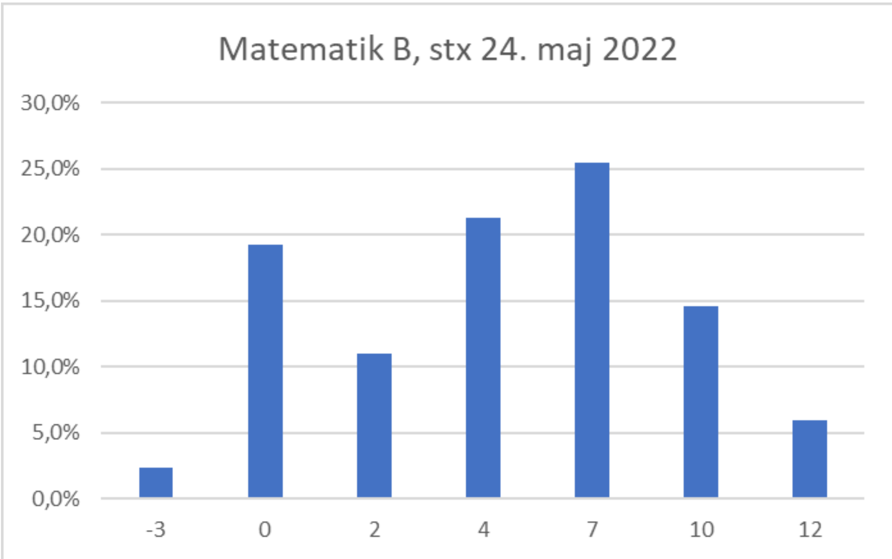
7 Stx B-niveau 24. maj 2022

Prøveresultat matematik B, stx 24. maj 2022[4]

Antal eksaminander til prøve	**8114**
Karaktergennemsnit	**4,96**
Andel ikke-beståede	**21,6 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	2,4%	19,3%	11,0%	21,3%	25,5%	14,6%	6,0%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-71	66-85	80-117	112-157	152-185	180-200

[4] Der er en restgruppe på 250 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

7.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 2058 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 11 opgaver med i alt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

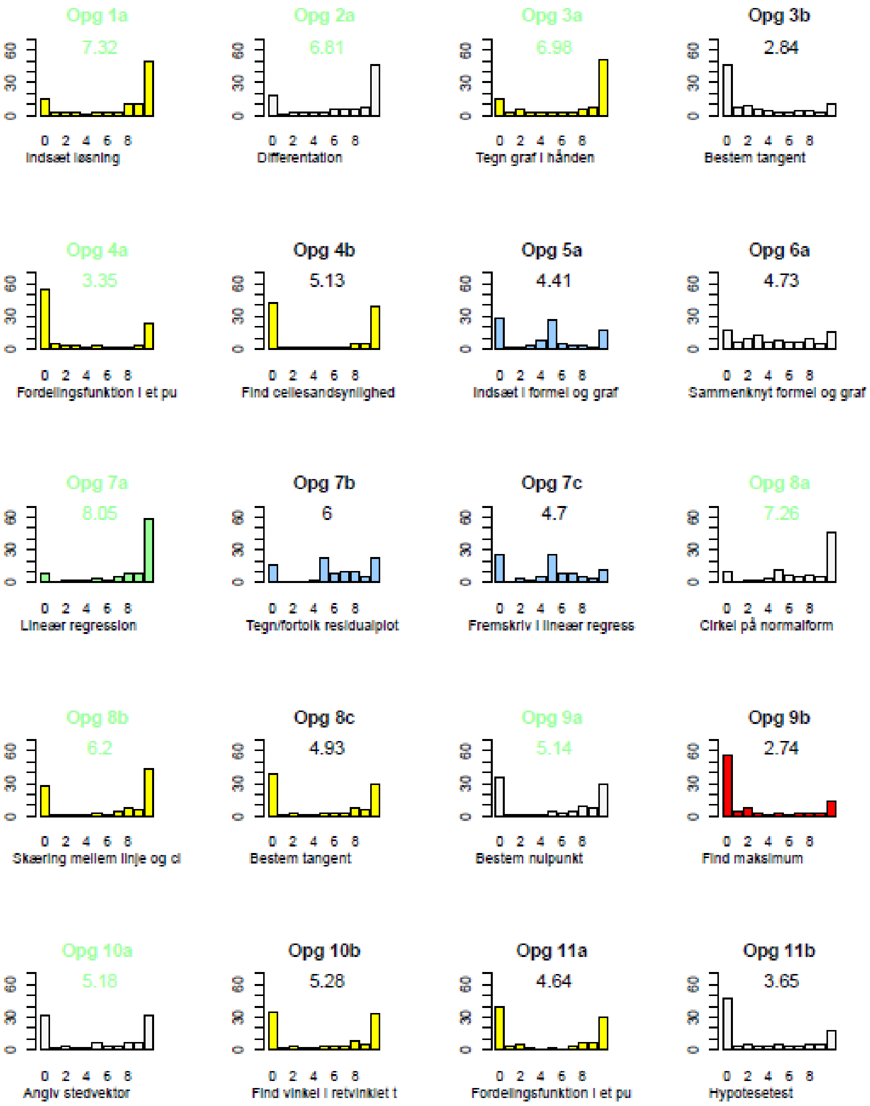
	Antal
Mindstekrav (grøn)	9
Ikke-mindstekrav (hvid)	11

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 12.

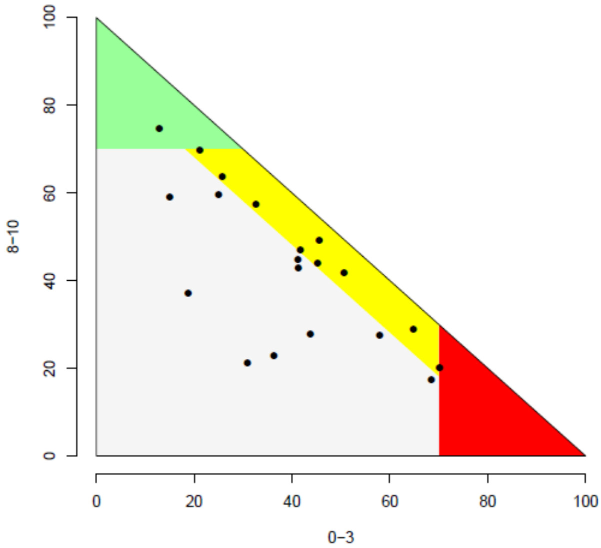


Figur 12: *Resultater for spørgsmålene for STX-B 24. maj 2022. Overskriften er farvet grøn for mindste-kravsspørgsmål. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Midtertop	Standard
1	1	8	3	7

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

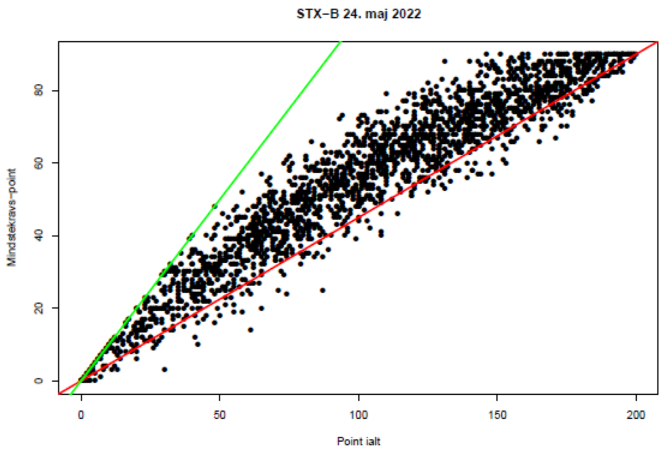


Figur 13: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for STX-B 24. maj 2022. Spørgsmål der klassificeres som 'midtertop' (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
7a	Lineær regression	8.05
1a	Indsæt løsning	7.32
8a	Cirkel på normalform	7.26
3a	Tegn graf i hånden	6.98
2a	Differentation	6.81
8b	Skæring mellem linje og cirkel	6.2
7b	Tegn/fortolk residualplot	6
10b	Find vinkel i retvinklet trekant	5.28
10a	Angiv stedvektor	5.18
9a	Bestem nulpunkt	5.14
4b	Find cellesandsynlighed	5.13
8c	Bestem tangent	4.93
6a	Sammenknyt formel og graf	4.73
7c	Fremskriv i lineær regression	4.7
11a	Fordelingsfunktion i et punkt	4.64
5a	Indsæt i formel og graf	4.41
11b	Hypotesetest	3.65
4a	Fordelingsfunktion i et punkt	3.35
3b	Bestem tangent	2.84
9b	Find maksimum	2.74

Tabel 5: *Spørgsmålene for STX-B 24. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* **mindstekrav** *er farvet grønne.*



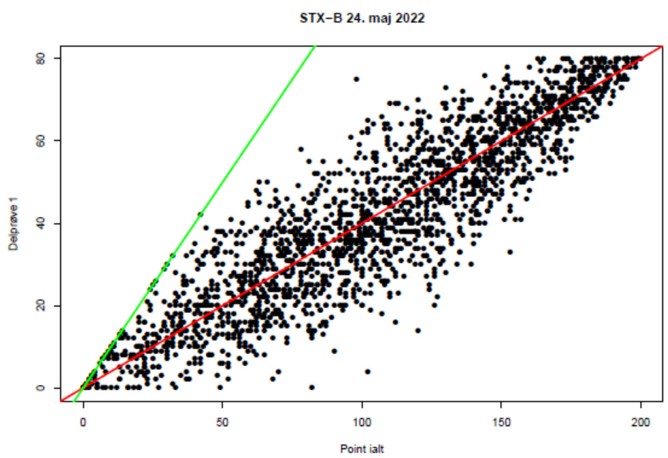
Figur 14: *STX-B 24. maj 2022, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 45 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får en god del af de indledende point i mindstekravsopgaverne. Men den viser også, at kun de dygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne - disse opgaver har altså indbyggede vanskeligheder, eller også er der kun ganske få elever, der har overblik over hele kernestoffet.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
7a	Lineær regression	8.05
1a	Indsæt løsning	7.32
8a	Cirkel på normalform	7.26
3a	Tegn graf i hånden	6.98
2a	Differentation	6.81
8b	Skæring mellem linje og cirkel	6.2
7b	Tegn/fortolk residualplot	6
10b	Find vinkel i retvinklet trekant	5.28
10a	Angiv stedvektor	5.18
9a	Bestem nulpunkt	5.14
4b	Find cellesandsynlighed	5.13
8c	Bestem tangent	4.93
6a	Sammenknyt formel og graf	4.73
7c	Fremskriv i lineær regression	4.7
11a	Fordelingsfunktion i et punkt	4.64
5a	Indsæt i formel og graf	4.41
11b	Hypotesetest	3.65
4a	Fordelingsfunktion i et punkt	3.35
3b	Bestem tangent	2.84
9b	Find maksimum	2.74

Tabel 8: *Spørgsmålene for STX-B 24. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* **uden adgang til CAS** *er farvet lilla.*



Figur 15: *STX-B 24. maj 2022. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende ret præcist får samme udbytte af de to delprøver.

7.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra stx B - sættet fra den 24. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

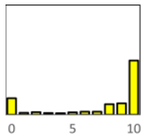
7.3 Delprøve 1

7.3.1 Opgave 1 - Tal, ligninger og formler

Opgave 1 (10 point)

a) Gør rede for, at $x = 2$ er en løsning til ligningen

$$x^3 + x - 10 = 0.$$



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 7,3)
Et klassisk spørgsmål som omtrent halvdelen af eleverne får fuldt point for. Af typiske fejl kan nævnes manglende konklusion, uhensigtsmæssig opskrivning samt simple regnefejl. Der er også en ca. 15% af eleverne, der får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål, måske fordi de ikke genkender spørgsmålstypen. Et godt råd er derfor at huske eleverne på, hvad det vil sige, at vi løser f.eks. en andengradsligning - nemlig at de fundne løsninger får ligningen til at gå op (venstresiden bliver lig højresiden ved indsættelse af en løsning på *x*'s plads).

Et eksempel på en elevbesvarelse:

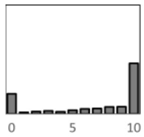
Ikke indsendt af rettegrupperne.

7.3.2 Opgave 2 - Differentialregning

Opgave 2 En funktion f er givet ved

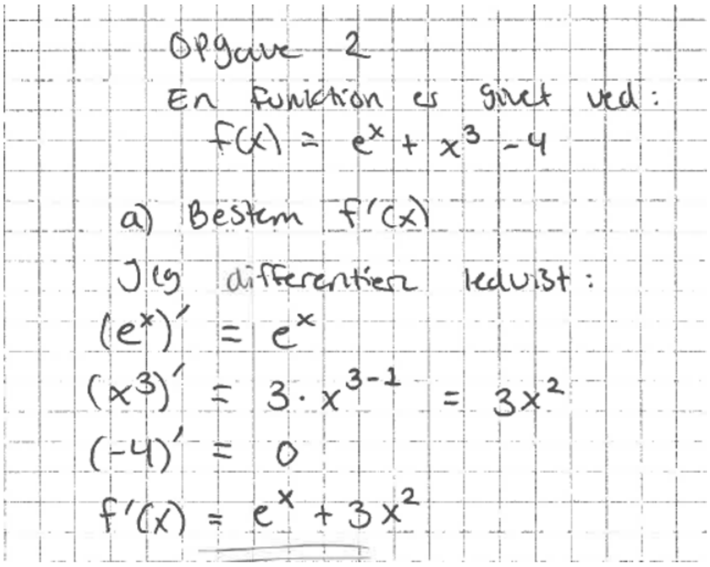
$$f(x) = e^x + x^3 - 4.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 6,8)
Et klassisk spørgsmål om bestemmelse af differentialkvotienten for en simpel funktion. Alligevel er der ca. en femtedel af eleverne, der får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål. En typisk fejl er, at konstanten ikke differentieres væk.
En del censorer nævner i forbindelse med dette spørgsmål, at de savner mellemregninger. Det er i hvert fald en god ide at tage et par mellemregninger med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelig resultat skulle gå hen og være forkert.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opgave 2
En funktion er givet ved:
$f(x) = e^x + x^3 - 4$

a) Bestem $f'(x)$
Jeg differentierer ledvist:
$(e^x)' = e^x$
$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$
$(-4)' = 0$
$f'(x) = e^x + 3x^2$

7.3.3 Opgave 3 - Andengradspolynomier

Opgave 3 Et andengradspolynomium f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

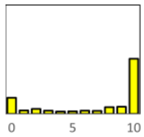
Nedenstående tabel viser nogle funktionsværdier for f.

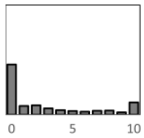
Bilag vedlagt

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	0	−3	−4	−3	0	5

(10 point) a) Tegn grafen for f.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 4.



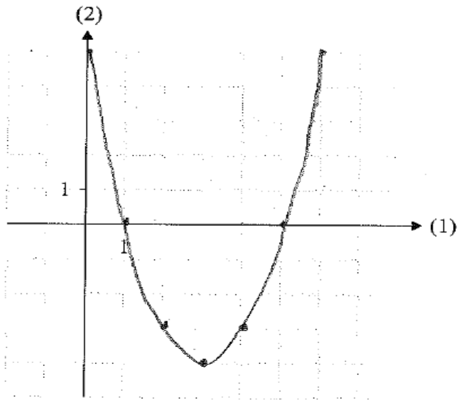


Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 7,0)

Dette er ikke et klassisk spørgsmål i en gymnasial sammenhæng, da de fleste grafer her tegnes ved hjælp af CAS, men rigtig mange elever besvarer spørgsmålet fint og får tegnet en "blød" kurve gennem støttepunkterne. En del elever udregner både rødderne samt koordinatsættet til toppunktet, hvilket også ofte er fornuftigt i lignende spørgsmål, hvor der skal tegnes en parabel, men i dette spørgsmål er det naturligvis overflødigt, da disse størrelser fremgår direkte af tabellen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 3



Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 2,8)

Et klassisk spørgsmål i emnet *Differentialregning* som over 40% af eleverne opnår 0 point i. Det kan muligvis skyldes, at spørgsmålet optræder i en anden kontekst end eleverne er vant til, men da tangentligningsbestemmelse sammen med monotoniundersøgelse er blandt de absolut mest stillede spørgsmål i emnet differentialregning, bør dette være en spørgsmålstype, man prioriterer at terpe med sine elever, indtil de opnår en rimelig robusthed overfor variationer i den kontekst, spørgsmålet stilles i.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 4.

ligningen for tangenten t til grafen for f i $P(x_0, f(x_0))$:

$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0).$

Vi differentierer $f(x)$ med kendte regneregler:

$f(x) = x^2-6x+5$

$f'(x^2) = 2\cdot x$

$f'(-6x+5) = -6$

$f'(x) = 2\cdot x-6.$

Vi kender nu formlen for både $f'(x)$ og $f(x)$. Vi indsætter 4 på x_0's plads og finder ligningen for tangenten i punktet med førstekoordinaten 4:

$y=(2\cdot 4-6)\cdot(x-4)+4^2-6\cdot 4+5$ | beregner første parentes

$y = 2\cdot(x-4)+4^2-6\cdot 4+5$ | ganger ind i parentes

$y = 2x-8+4^2-6\cdot 4+5$ | beregner potens og gangestykket

$y = 2x-8+16-24+5$ | reducerer

$y = 2x-16+5$ | reducerer

$y = 2x-11$

ligningen for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinaten 4: $\underline{y=2x-11}$

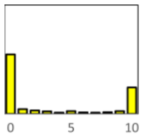
7.3.4 Opgave 4 - Sandsynlighedsregning

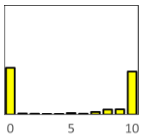
Opgave 4 Nedenstående tabel viser sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X.

t	1	2	3	4	5
$P(X=t)$	0,10	0,20	0,10	a	0,25

(10 point) a) Bestem $P(X \leq 3)$.

(10 point) b) Bestem tallet a.





Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 3,3)

Spørgsmålet er naturligvis tænkt som en simpel test i brugen af additionsprincippet, men uligheden volder utroligt mange elever store problemer, og over halvdelen af eleverne får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

opg.4

a): $P(X\leq 3) = P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)$

$= 0{,}10+0{,}20+0{,}10$

$P(X\leq 3) = 0{,}40$

Spørgsmål 4b (pointgennemsnit: 5,1)
Et spørgsmål der tester en grundlæggende forståelse af, hvad der forstås ved en sandsynlighedsfordeling. Når ca. 40% af eleverne får 0 point for deres besvarelse af dette spørgsmål, skyldes det formentlig to faktorer. For det første er der mange, der nok har givet op efter ikke at have kunnet svare på spørgsmål a). For det andet føler mange elever sig utrygge ved emnet *Kombinatorik og sandsynlighedsregning* og overkomplicerer tingene ved f.eks. at inddrage binomialfordelingen. Et godt råd er derfor at huske sine elever på, at nogle spørgsmål i emnet kan klares ved blot at bruge sin sunde fornuft, og at det er vigtigt at læse alle spørgsmålene i opgaven igennem, selvom man f.eks. ikke har kunnet besvare spørgsmål a).

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b): $a \underset{\text{II}}{=} 1-P(X\leq 3)-P(X=5)$

$1-0{,}40-0{,}25=0{,}35$ $\quad \underline{\underline{a=0{,}35}}$

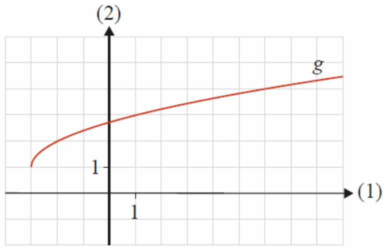
7.3.5 Opgave 5 - Funktioner

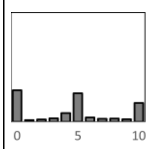
Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x + 2.$$

Bilag vedlagt Figuren viser grafen for en anden funktion g.

(10 point) a) Bestem $f(1)$ og $g(f(1))$.





Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 4,4)
Første del af spørgsmålet går fint for mange elever (der er dog stadig ca. en fjerdedel, der får 0 point for deres besvarelse af spørgsmålet). Anden halvdel af spørgsmålet er til gengæld vanskeligt for mange. Det, at der i spørgsmålet betragtes en sammensat funktion, der er sat sammen af en funktion *f*, som vi kender forskriften for, og en funktion *g*, som vi kender grafen for, forvirrer en stor del af eleverne. Da det er umuligt at nå at give alle elever en robusthed indenfor alle emner, må det gode råd i denne forbindelse nok indskrænke sig til at anbefale, at man i ny og næ præsenterer sin elever for grafopgaver i aflæsning eller indtegning uden brug af CAS.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

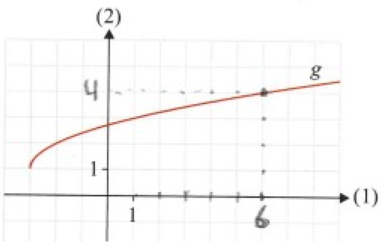
Opgave 5

a) $f(1) = 4 \cdot 1 + 2 = 6$

$g(f(1))$ er det samme som $g(6)$. Jeg afløser $g(6)$ på det vedlagte bilag

$g(6) = 4$

Opgave 5



7.3.6 Opgave 6 - Funktioner

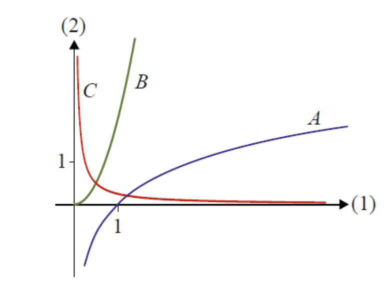
Opgave 6 Figuren viser for $x > 0$ graferne for funktionerne f, g og h givet ved

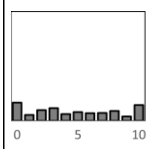
$$f(x) = 2 \cdot x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{4 \cdot x}$$

$$h(x) = \ln(x).$$

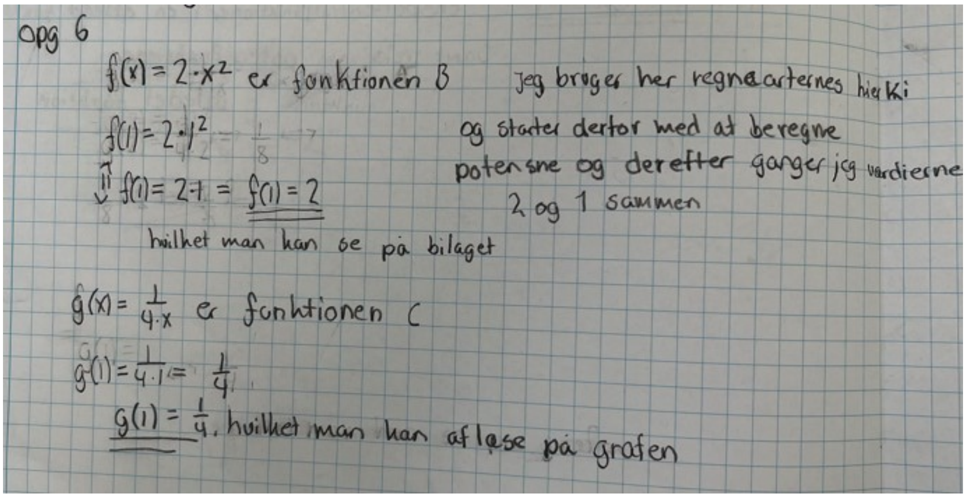
(10 point) a) Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.





Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 4,7)
Mange elever får faktisk parret graferne og funktionerne korrekt, men kun meget få er i stand til at argumentere for denne parring. En stor del af eleverne tror fejlagtigt, at *B* og *C* er grafer for eksponentielle udviklinger, hvilket naturligvis umuliggøre en korrekt argumentation. Et godt tip til disse spørgsmål er at øve eleverne i, hvis muligt, at udregne *y*-værdien hørende til en nogenlunde aflæselig *x*-værdi. I dette spørgsmål er det oplagt at vælge $x = 1$, idet $f(1) = 2$, $g(1) = \frac{1}{4}$ og $h(1) = 0$, hvorefter graferne og funktionerne nemt lader sig parre. Et andet godt råd er at lære eleverne at argumentere for alle tre parringer fremfor at bruge udelukkelsesmetode som argument for den sidste parring. Nedenstående besvarelse kunne således med fordel have indeholdt en beregning af $h(1)$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Opg 6

$f(x) = 2 \cdot x^2$ er fonkfionen B

Jeg bruger her regnearternes hierKi og starter derfor med at beregne potensne og derefter ganger jeg værdierne 2 og 1 sammen

$f(1) = 2 \cdot 1^2$

$\Updownarrow$ $f(1) = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{f(1) = 2}}$

hvilket man kan se på bilaget

$g(x) = \frac{1}{4 \cdot x}$ er fonktionen C

$g(1) = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$

$\underline{\underline{g(1) = \frac{1}{4}}}$. hvilket man kan aflæse på grafen

7.4 Delprøve 2

7.4.1 Opgave 7 - Lineær regression

Opgave 7 Nedenstående tabel viser udviklingen i benzinforbruget (målt i mia. gallon) i USA i årene 1992-2004.

Antal år efter 1992	0	1	11	12
Benzinforbrug (mia. gallon)	110	111	133	136

Alle tabellens 13 datapunkter findes i den vedhæftede fil: Gallon.xlsx

I en model kan udviklingen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b \ ,$$

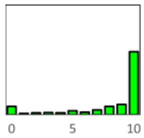
hvor $f(x)$ er benzinforbruget i USA (målt i mia. gallon), og x er antal år efter 1992.

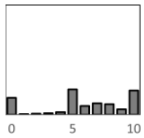
(10 point) a) Bestem tallene a og b ved lineær regression på alle tabellens data.

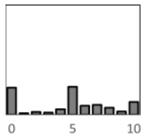
(10 point) b) Tegn et residualplot. Benyt residualplottet til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen i perioden 1992-2004.

I 2019 var benzinforbruget i USA 142 mia. gallon.

(10 point) c) Bestem $f(27)$, og kommentér resultatet.







Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 8,1)

Generelt et spørgsmål som går rigtig godt for de fleste elever - over halvdelen får 10 point for deres besvarelse. Af typiske fejl kan nævnes, at en mindre andel af eleverne bytter om på *a* og *b* eller bytter om på *x* og *y*. Mange besvarelser kunne med fordel indeholde lidt mere forklarende og konkluderende tekst, f.eks. bør det eksplicciteres hvilken regression, der anvendes på hvilken data, og ikke bare lade det være op til læseren at aflæse det fra CAS-outputtet. Tilsvarende med konklusionen hvor eleven bør formulere en konkluderende tekst indeholdende svaret på opgaven - her værdierne af *a* og *b*.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

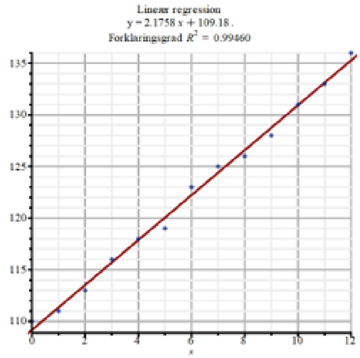
For at lave en lineær regression benytter jeg mig af 'import data' hjælpemidlet, og angiver dermed alle tabellens værdier.

Første liste angiver x-værdier.

$$data := \begin{bmatrix} 0. & 110.0 \\ 1.0 & 111.0 \\ 2.0 & 113.0 \\ 3.0 & 116.0 \\ 4.0 & 118.0 \\ 5.0 & 119.0 \\ 6.0 & 123.0 \\ 7.0 & 125.0 \\ 8.0 & 126.0 \\ 9.0 & 128.0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Ud fra denne dataopsætning, kan jeg lave en lineær regression ved hjælp af LinReg kommandoen.

$LinReg(data)$



Ved aflæsning af de informationer den lineære regression giver mig, kan jeg konkluderer, at $a = 2.1758$ og $b = 109.18$.

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 6,0)

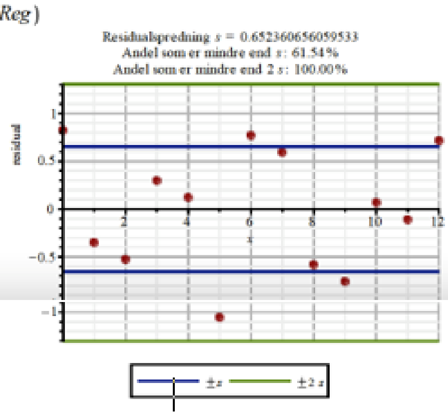
De fleste elever kan tegne residualplottet, men det kniber lidt med at sige noget fornuftigt om punkternes beliggenhed - en standard formulering kunne her være "at punkterne i residualplottet ikke afviger systematisk fra nullinjen", og at "residualerne er forholdsvis små i forhold til størrelsen og spændet af *y*-værdierne fra datasættet".

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Tegn et residualplot. Benyt residualplottet til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen i perioden 1992-2004.

Jeg tegner et residualplot ved at benytte mig af ovenstående lineære regression, dataopsætning og residualplot kommandoen.

plotResidualer(*data*, *LinReg*)



Ift. modellens anvendelighed kigger jeg efter systematiske afvigelser, hvor store og små de er, samt spredningen.

Det lader til at der er lidt af en tendens ift. tilfældigheden af punkterne, idet at de på modellen særligt

forekommer i par. Jeg vil dog ikke vurdere modellen som upassende på baggrund af dette, da det ikke giver mkg indtrykket af at en anden model ville passe bedre. Størrelsen på afvigelserne vurderer jeg er passende, på baggrund af at andelen indenfor 1. spredning ligger meget tæt på de 65% og andelen indenfor 2. spredning ligger indenfor de 100%. Min overordnede vurdering af modellen er altså at den godt kan anvendes til at modellere denne sammenhæng.

I 2019 var benzinforbruget i USA 142 mia. gallon.

Spørgsmål 7c (pointgennemsnit: 4,7)
En stor andel af eleverne får udregnet $f(27)$, men der er mange, der efterfølgende ikke får afkodet formuleringen "kommentér resultatet" korrekt. Ofte forstår eleverne det som "fortolk resultatet", og de inddrager derfor ikke oplysningen om det faktiske forbrug i året som i besvarelsen nedenfor. En bedre besvarelse havde afsluttet med en beregning af den procentvise afvigelse mellem modellens værdi for året 2019 og det faktiske forbrug.
I det hele taget vil der som hovedregel ikke optræde oplysninger i opgaveformuleringen, som ikke skal benyttes. Et godt tip er derfor at få eleverne til at læse opgaveteksten igennem efter de har svaret på opgaven for at kontrollere, at de har fået inddraget alle oplysninger.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Bestem f (27), og kommentér resultatet.

Jeg bestemmer $f(27)$ ved at definere funktionen og indsætte 27 på x's plads.

$f(x) := 2.1758\,x + 109.18$

$$f := x \mapsto 2.1758 \cdot x + 109.18 \qquad \textbf{(1.1)}$$

$f(27)$

$$167.9266 \qquad \textbf{(1.2)}$$

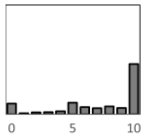
Dette vil altså sige, at benzinforbruget i USA i 2019, 27 år efter 1992, ligger på 167.9266 mia. gallon. Modellen virker altså også anvendelig efter bare de 12 år, idet at vi i tidligere opgave vurderede at der ikke forekom de store afvigelser. Det kan dog selvfølgelig være, at der vil forekomme en hændelse i de senere år tabellen ikke dækker, som vil øge benzinforbruget, og der vil man så skulle genoverveje om modellen stadig er anvendelig.

7.4.2 Opgave 8 - Analytisk geometri

Opgave 8 I et koordinatsystem er en cirkel givet ved ligningen

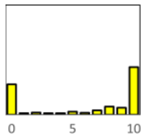
$$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2.$$

(10 point) a) Bestem radius og koordinatsættet til centrum for cirklen.

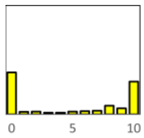


En linje er givet ved ligningen $x+y-12=0$.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen.



(10 point) c) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet $P(7,7)$.



Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 7,3)

Omtrent halvdelen af eleverne får 10 point for deres besvarelse af dette spørgsmål. Af typiske fejl kan nævnes at koordinatsættet til cirklens centrum aflæses til $(-3,\ -4)$ og at radius aflæses til 25.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

I et koordinatsystem er en cirkel givet ved ligningen: $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

a) Jeg bestemmer radius og koordinatsættet til centrum for cirklen, ved at aflæse på ligningen for cirklen. En ligning for en cirkel med centrum i C (a,b) og radius r er givet ved:
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Heraf kan jeg konkludere at cirklen har centrum i punktet: c (3,4) og radius $r=5$

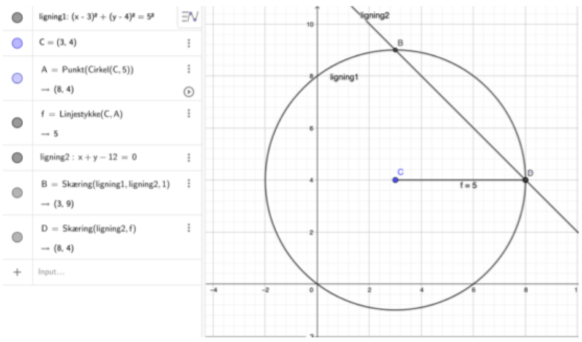
Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 6,2)

Mange censorer ærgrer sig over, at denne opgavetype kan løses grafisk og stadig give fuldt point, men hvis konstruktionerne af de geometriske objekter er korrekte og velbeskrevne, skæringspunkterne fundet med et passende værktøj (hvilket også bør nævnes eksplicit i besvarelsen) og der konkluderes på svaret i den konkluderende tekst, er spørgsmålet fuldt ud besvaret.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

En linje er givet ved ligningen: $x + y - 12 = 0$

b) Jeg bestemmer koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen: $x + y - 12 = 0$ og cirklen: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$, ved at tegne cirklen og linjen i GeoGebra.



Jeg har nu fundet frem til koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen, som er: $skæring_1 = (3{,}9)$ og $skæring_2 = (8{,}4)$

Spørgsmål 8c (pointgennemsnit: 4,9)

Endnu et spørgsmål som i flere geometriprogrammer nemt lader sig løse grafisk. Bemærk dog at man med rette kan forvente, at eleverne refererer til brugen af et særligt "tangenttegningsværktøj" i værktøjsprogrammet, således at det ikke fremstår som om, at eleven i "løs hånd" har tegnet en linje, der ligner en tangent i det pågældende punkt. Alternativt kan opgaven naturligvis besvares algebraisk som i besvarelsen nedenfor.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Jeg bestemmer en ligning for tangenten til cirklen i punktet $P(7,7)$ ved følgende formel:
$\overrightarrow{AB} = \binom{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ - fordi en normal vektor vil beskrive tangentens linje.

Jeg ved at cirklen har centrum i punktet: $c\ (3,4)$. En normal vektor til tangenten i punktet $P(7,7)$ bliver så: $\overrightarrow{CP} = \binom{7-3}{7-4} = \binom{4}{3}$

Jeg ved at formlen for linjens ligning giver os tangentens ligning:
$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Nu indsætter jeg cirklens centrum og normalvektoren til tangenten i punktet $P(7,7)$:
$4(x-7)+3(y-7)=0$
$4x-28+3y-21=0$
$4x+3y-49=0$
$4x+3y=49$

Jeg har nu bestemt ligning for tangenten til cirklen i punktet $P(7,7)$ til: $\underline{\underline{4x+3y=49}}$

7.4.3 Opgave 9 - Differentialregning

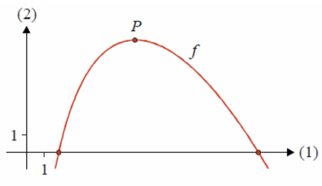
Opgave 9 Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

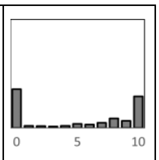
$$f(x) = 10 \cdot \ln(x) - 0{,}05 \cdot x^2 - x - 4\ , \quad x > 0.$$

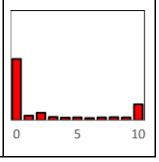
(10 point) a) Bestem nulpunkterne for f.

Punktet P på grafen svarer til funktionens maksimum.

(10 point) b) Benyt differentialregning til at bestemme koordinatsættet til punktet P.







Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 5,1)
Da funktionens definitionsmængde ikke er afgrænset opadtil, er en grafisk løsning i princippet ikke nok. Men med figuren fra opgaven in mente bør man dog her se med milde øjne på sådanne løsningsforsøg. Desværre foranledninger grafens parabellignende udseende en del elever til at se bort fra leddet $10 \cdot \ln(x)$ i forskriften, og de forsøger derfor at løse ligningen som en andengradsligning med bestemmelse af diskriminant mm. Endvidere viser det sig også, at forbløffende mange elever læser $\ln(x)$ som $in(x)$, hvilket jo umuliggør en løsning af begge spørgsmål i opgaven. Da udvalget af funktionstyper i pensum er stærkt begrænset, vil både den naturlige logaritme og den naturlige eksponentialfunktion ofte indgå i funktionsudtryk til skriftlig eksamen. Det er derfor nødvendigt, at eleverne i den daglige undervisning ofte præsenteres for disse funktioner i opgaver med hjælpemidler, og at de får øvet sig i at indtaste disse funktioner korrekt.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 9

Figuren viser grafen for funktionen f givet ved $f(x) = 10 \cdot \ln(x) - 0{,}05 \cdot x^2 - x - 4,\ x > 0.$

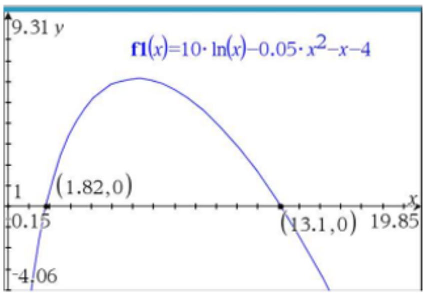
a) Bestem nulpunkterne for f.

Nulpunkterne for f bestemmes ved at løse $f(x) = 0$:

$f(x):=10\cdot \ln(x)-0.05\cdot x^2-x-4$	*Udført*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=1.81936$ or $x=13.1295$

Nulpunkterne for f bestemmes til $x = 1{,}81936$ og $x = 13{,}1295$

Nulpunkterne for f kan også bestemmes ved hjælp af 'grafer vinduet' i *nspire* som vist nedenunder:



Også her bestemmes nulpunkterne for f til $x = 1{,}82$ eller $x = 13{,}1$.

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 2,7)
Metodekravet i dette spørgsmål afslører et lidt bekymrende forhold - nemlig at over halvdelen af eleverne ikke kan anvende differentialregning til at bestemme et maksimum. Det er muligt, at det havde gået bedre, hvis man havde spurgt til en monotoniundersøgelse ved hjælp af f', da dette måske kunne have ledt flere i den rigtige retning. Under alle omstændigheder er det en central del af kernestoffet inden for differentialregning, at man kan bestemme ekstremumssteder ved at løse ligningen $f'(x) = 0$.
Som beskrevet i forbindelse med det foregående spørgsmål er der elever, som ikke er vant til den naturlige logaritmefunktion. Der er ligeledes mange elever, som har svært ved at håndtere den begrænsede definitionsmængde (se den ellers udmærkede besvarelse nedenfor). Det er derfor en god idé, at man gør en del ud af at præsentere eleverne for f.eks. udtrykket $x > 0$ i forbindelse med funktioner, og træner dem i hvordan de skal forholde sig til det i forhold til graftegning og ligningsløsning.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Benyt differentialregning til at bestemme koordinatsættet til punktet *P*.

Først defineres $f'(x)$ og $f'(x) = 0$ løses for at finde mulige toppunkter:

$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
solve$(fm(x)=0,x)$	$x=-16.1803$ or $x=6.18034$

$f'(x) = 0$ viser, at der er toppunkt i $x = -16{,}18$ og $x = 6{,}18$.

Derefter undersøges det, hvilket af toppunkterne, der er et maksimum ved at finde $f'(x)$ for udvalgte $x - værdier$ rundt om toppunkterne:

solve$(fm(x)=0,x)$	$x=-16.1803$ or $x=6.18034$
$fm(-15)$	-0.166667
$fm(-17)$	0.111765
$fm(5)$	0.5
$fm(7)$	-0.271429

Det kan altså konkluderes, at toppunktet $x = 6{,}18$ er funktionens maksimum, da $f'(5)$ er positiv og $f'(7)$ er negativ.

Førstekoordinaten til koordinatsættet til punktet P er $x = 6{,}18034$. Anden koordinaten bestemmes:

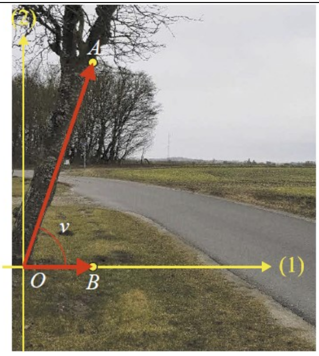
$f(6.18034)$	6.12356

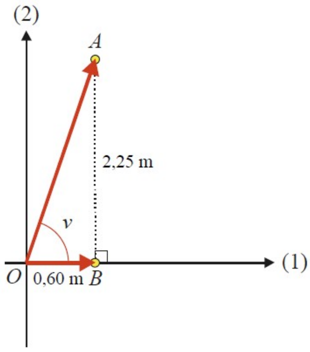
Anden koordinaten er bestemt til $y = 6{,}12356$

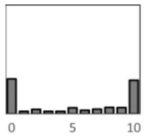
Koordinatsættet til punktet P er altså $P(6.18\,, 6.12)$

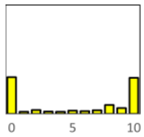
7.4.4 Opgave 10 - Vektorer

Opgave 10









Fotoet viser et træ, som vinden har fået til at hælde.
Der er indlagt et koordinatsystem på fotoet.
Den vandrette afstand fra O til punktet B på jorden er 0,60 m.
Den lodrette afstand fra B til punktet A på træet er 2,25 m.

(10 point) a) Bestem koordinatsættene til vektorerne $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$.

(10 point) b) Bestem vinkel v.

Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 5,2)
Spørgsmålet tester en hel grundlæggende forståelse af en vektors to repræsentationsformer, alligevel får næsten en tredjedel af eleverne 0 point i denne mindstekravsopgave. Endvidere er der mange af dem, der får point, som løser opgaven ved at tegne punkterne ind i et geometriprogram, afsætte de to vektorer og lade programmet aflæse koordinatsættet. Der er også mange, der misforstår ordet "koordinatsættene" og angiver vektorernes koordinater på punktform.
En mulig forklaring på, hvorfor dette spørgsmål falder så svært ud, er måske, at der er mange elever, der føler, at emnet *Analytisk geometri og vektorer* er så omfangsrigt, at de fokuserer på at kunne besvare spørgsmålene ved hjælp af et geometriprogram. De bliver således rimelig godt trænet i at besvare spørgsmål grafisk, men giver helt op på den algebraiske del.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

jeg bestemmer koordinatsættene til vekoterene ved at trække startpunktets koordinater fra endepunktets koordinater $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0.60 - 0 \\ 2.25 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0.60 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hermed har jeg bestemt vektorene $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 5,3)
Eleverne klarer sig faktisk en lille smule bedre i dette spørgsmål end i den foregående - formentlig fordi de er trænede i at besvare spørgsmål i emnet *Analytisk geometri og vektorer* grafisk. Der er imidlertid mange, der ikke får konstrueret de to vektorer præcist eller ikke anvender vinkelmålingsredskabet korrekt. I den forstand illustrerer opgave 10 samlet set et didaktisk dilemma indenfor emnet: Skal man fokusere sin undervisning på, at eleverne opnår algebraiske færdigheder - vel vidende, at eleverne finder det meget svært, eller skal man ofre mange lektioner på at træne elevernes kompetencer i korrekt anvendelse af et geometriprogram, så konstruktionerne bliver korrekte og forklaringerne fyldestgørende? Et lille råd i den forbindelse er at gøre de elever, der ensidigt vælger den grafiske tilgang, opmærksomme på, at mange censorer rimeligvis netop stiller krav til præcision og et vist forklaringsniveau, således at eleverne ikke bare opfatter disse spørgsmål som 10 gratis point.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) jeg skal bestemme vinkel v

Vinklen, v mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ er givet ved:

$$Cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

eller med kommandoen $vinkel(\vec{a}, \vec{b})$

jeg indlæser de to vektorer og finder vinklen ved hjælp af kommandoen $vinkel(\vec{a}, \vec{b})$

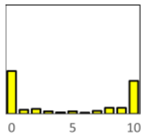
$$\overrightarrow{OA} := \langle 0.60, 2.25 \rangle = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 2.25 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \langle 0.60, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$vinkel(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 75.06858281$$

7.4.5 Opgave 11 - Binomialtest

Opgave 11 Ifølge hjemmesiden frivillighed.dk deltager 40 % af befolkningen i frivilligt arbejde.
Der udvælges på tilfældig måde en stikprøve på 100 personer.
Den stokastiske variabel X angiver antallet af personer i denne stikprøve, der deltager i frivilligt arbejde.
Det antages, at X er binomialfordelt med antalsparameter 100 og sandsynligheds-parameter 0,4.

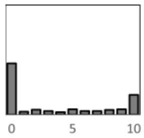


(10 point) a) Bestem sandsynligheden $P(X \leq 30)$ for, at der højst er 30 personer i stikprøven, der deltager i frivilligt arbejde.

I en bestemt by ønsker man at teste hypotesen

H_0: 40 % af indbyggerne deltager i frivilligt arbejde.

Der udvælges på tilfældig måde 300 af byens indbyggere.
Det viser sig, at 140 af dem deltager i frivilligt arbejde.



(10 point) b) Undersøg med et dobbeltsidet binomialtest, om man på 5 % signifikansniveau kan forkaste hypotesen H_0.

Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 4,6)
Spørgsmålet er et klassisk spørgsmål i kumulerede sandsynligheder i binomialfordelingen. Opgavetypen udgør sammen med opgaver i konfidensintervaller, tosidet binomialtest og binomialkoefficienter en stor del af kernestoffet i emnet *Kombinatorik og sandsynlighedsregning*, og eleverne bør derfor trænes i standardiserede løsningsprocedurer i disse fire opgavetyper op mod eksamen.
Af dem, der faktisk kommer lidt i gang med opgaven, er der en del, der udregner punktsandsynligheden $P(X = 30)$ i stedet for den kumulerede sandsynlighed.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Vi får oplys at:

antalsparameter n= 100

sandsynlighedsparameter p= 40% – 0,40

Løser den vha. af npsires binomCdf funktion:

$P(X \leq 30) = \text{binomCdf}(100,0.4,30)$ ▸ 0.024783

$0.024783 \cdot 100$ ▸ 2.4783 – ganger med 100 for at gå det i %

Sandsynligheden for at der højest er 30 personer i stikprøven, der deltager i frivilligt arbejde er **2,4%**

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 3,6)
Spørgsmålet er et klassisk spørgsmål i tosidet binomialtest. Opgavetypen udgør sammen med opgaver i konfidensintervaller, (kumulerede) sandsynligheder i binomialfordelingen og binomialkoefficienter en stor del af kernestoffet i emnet *Kombinatorik og sandsynlighedsregning*, og eleverne bør derfor trænes i standardiserede løsningsprocedurer i disse fire opgavetyper op mod eksamen. Hvis eleverne kender deres CAS-værktøj, burde denne opgave ikke volde problemer.
Det er ikke et krav i spørgsmålsformuleringen, at eleverne skal inddrage den konkrete kontekst i konklusionen, men det vil naturligvis tælle positivt i en helhedsvurdering, hvis eleven forholder sig til betydningen af, at nulhypotesen forkastes.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Vi får oplyst at:

Antalparameter n= 300 (byen indbygger)

sandsynlighedsparamter p = 40% – 0,40 i decimaltal

Vi bestemmer 2,5%–fraktilen (nedre grænse) 97,5%–fraktilen (øvre grænse) med Nspire.

nedre_grænse:=invBinom(0.025,300,0.4) ▸ 103

øvre_grænse:=invBinom(0.975,300,0.4) ▸ 137

Acceptmængden i vores binomialtest er altså

$\{103,104,105,...,135,136,137\}$

Da observationen **140** ikke ligger i acceptmængden forkastes nulhypotesen H0

8 Opsamling på elevbesvarelserne af stx B-sættene

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i sættene er det værd at fremhæve særligt tre forhold.

For det første er der mange af spørgsmålene, hvor en forholdsvis stor andel af eleverne får 0 point. Det er synd, især hvis det skyldes, at elever opgiver undervejs i sættet, og ikke forsøger sig med de sidste opgaver. Et eksempel på dette kunne være spørgsmål 11a) i 20. maj-sættet. Et godt råd til eleverne er at læse alle opgaverne igennem (særligt de grønne), også selvom de står langt henne i sættet, så tilgængelige point ikke mistes. Derudover bør eleverne også rådes til at forsøge at skrive lidt fornuftigt til alle spørgsmålene, også selvom de ikke har et fuldendt svar.

For det andet er det interessant, at der i de to sæt tilsammen kun er et enkelt spørgsmål, der falder "let" ud for eleverne (jf. klassifikationskriteriet hvor et let spørgsmål er karakteriseret ved, at 70% af eleverne opnår 8-10 point) Det er spørgsmål 7a) i 24. maj-sættet omhandlende lineær regression.

For det tredje er det værd at fremhæve det overraskende lave pointgennemsnit på 2,36 i spørgsmålet 7b) i 20. maj-sættet. Spørgsmålet omhandler en fortolkning af en fremskrivningsfaktor og trækker derfor på basal kernestof fra C-niveauet. Elementer af kernestoffet fra underliggende niveauer kan indgå både ved den skriftlige eksamen på B- og A-niveau. Det er derfor et godt råd, at man på B-niveauet husker at repetere særligt de grundlæggende egenskaber ved lineære og eksponentielle udviklinger samt anvendelse af modeller i det hele taget. Modelopgaver til den skriftlige prøve på B-niveau har desuden ofte indeholdt en udregning og fortolkning af en given differentialkvotient.

Ved at kigge de seneste års eksamenssæt igennem kan man danne sig et overblik over hvilke opgaver, der ofte har været stillet i de forskellige emner på stx B-niveau. Det kan måske være gavnligt at træne navnlig disse opgavetyper særligt. Det drejer sig fx om

- Simple differentiationsregneregler, tangentligningsbestemmelse, monotoniforhold og udregning og fortolkning af en given differentialkvotient i en modelsammenhæng - og husk at inddrage den naturlige eksponentialfunktion og den naturlige logaritme i den daglige undervisning.

- Inden for vektorregning og analytisk geometri er det vanskeligere entydigt at identificere opgaver, der forekommer tydeligt hyppigere end andre. Opgaver omhandler ofte normalvektorer og retningsvektorer for rette linjer, opstilling af ligninger og parameterfremstillinger for rette linjer, indtegning af rette linjer givet ved ligninger og parameterfremstillinger, grafisk bestemmelse af vinkler og skæringspunkter, bestemmelse af afstande mellem punkter og rette linjer, cirklens ligning og tangenter til cirkler. Det er en lang liste. Alle emnerne forudsætter dog en robust grundlagsforståelse hos eleven af fx normalvektor og retningsvektor i fremstillingerne af linjer og konstanterne i cirklens ligning. Derfor kan det måske være en overvejelse værd at fokusere repetitionen i området på disse helt grundlæggende begreber. I delprøve 2 kan eleverne ofte hente mange point i spørgsmål i dette emne, hvis de har træning i at anvende et dynamisk geometriprogram og på fornuftig måde kan redegøre for, hvordan de har anvendt dette til at besvare spørgsmålet.

- Konfidensintervaller, tosidet binomialtest, binomialkoefficienter samt (kumulerede) sandsynligheder i binomialfordelingen.

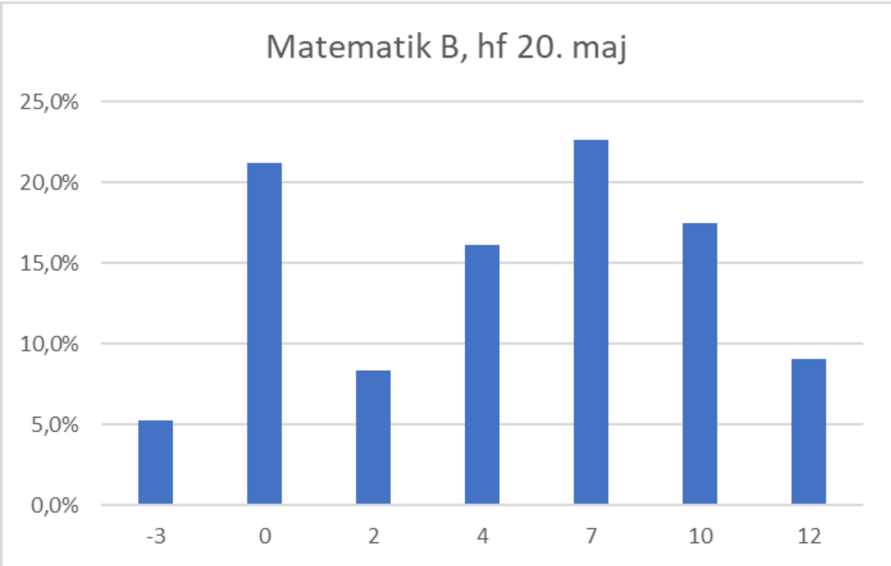
9 Hf B-niveau

Prøveresultat matematik B, hf 20. maj 2022[5]

Antal eksaminander til prøve	**3044**
Karaktergennnemsnit	**5,06**
Andel ikke-beståede	**26,5 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	5,3%	21,3%	8,4%	16,1%	22,6%	17,4%	9,0%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-17	12-71	66-85	80-117	112-157	152-185	180-200

[5] Der er en restgruppe på 531 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

9.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 1090 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 13 opgaver med i alt 20 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

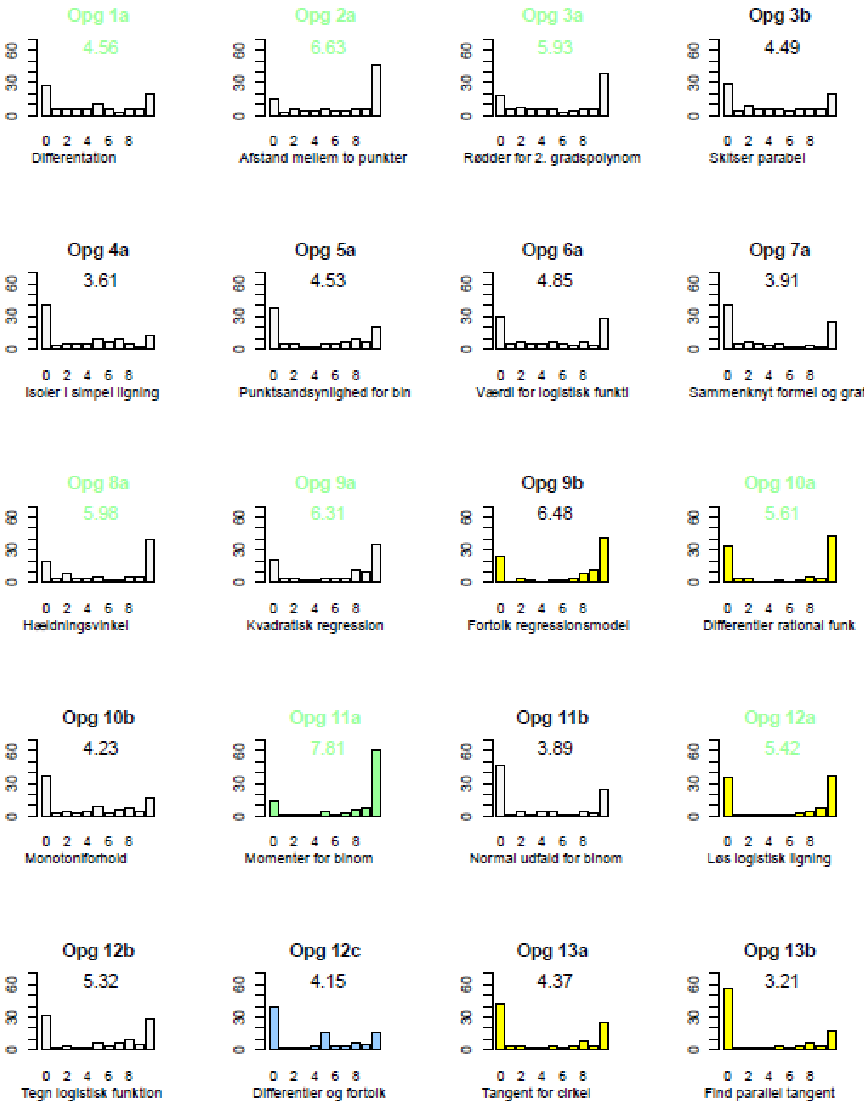
	Antal
Mindstekrav (grøn)	8
Ikke-mindstekrav (hvid)	12

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	8
Delprøve 2	12

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 23.

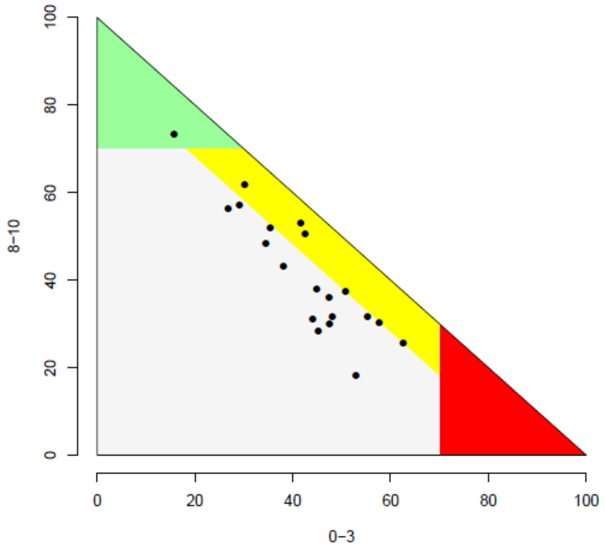


Figur 23: *Resultater for spørgsmålene for HF-B 20. maj 2022. Overskriften er farvet grøn for* **mindste-kravsspørgsmål***. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Midtertop	Standard
1	0	5	1	13

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

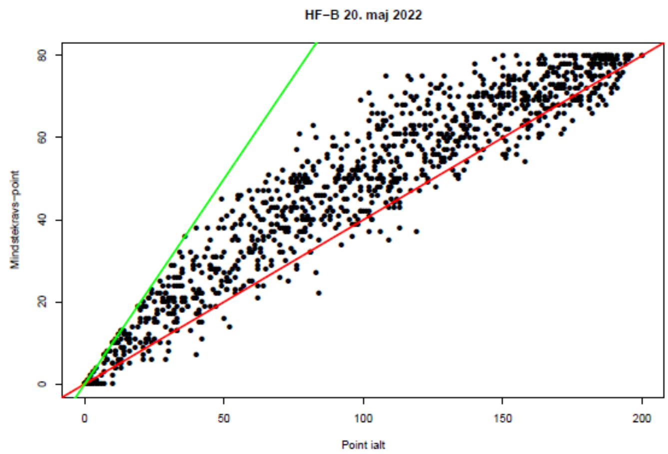


Figur 24: Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for HF-B 20. maj 2022. Spørgsmål der klassificeres som 'midtertop' (blå) befinder sig i det grå område.

Mindstekravsopgaverne

Opgave	Tema	Gennemsnit
11a	Momenter for binom	7.81
2a	Afstand mellem to punkter	6.63
9b	Fortolk regressionsmodel	6.48
9a	Kvadratisk regression	6.31
8a	Hældningsvinkel	5.98
3a	Rødder for 2. gradspolynom	5.93
10a	Differentier rational funktion	5.61
12a	Løs logistisk ligning	5.42
12b	Tegn logistisk funktion	5.32
6a	Værdi for logistisk funktion	4.85
1a	Differentation	4.56
5a	Punktsandsynlighed for binom	4.53
3b	Skitser parabel	4.49
13a	Tangent for cirkel	4.37
10b	Monotoniforhold	4.23
12c	Differentier og fortolk	4.15
7a	Sammenknyt formel og graf	3.91
11b	Normal udfald for binom	3.89
4a	Isoler i simpel ligning	3.61
13b	Find parallel tangent	3.21

Tabel 11: *Spørgsmålene for HF-B 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* **mindstekrav** *er farvet grønne.*



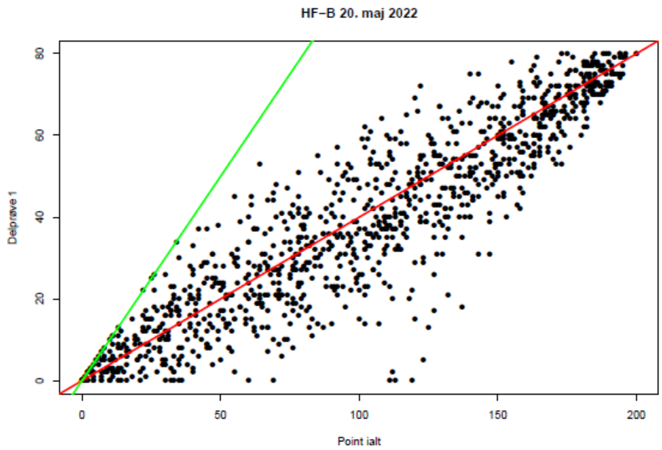
Figur 25: *HF-B 20. maj 2022, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.*

Tegningen viser at de studerende får en god del af de indledende point i mindstekravsopgaverne. Men den viser også at kun de dygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne - disse opgaver har altså indbyggede vanskeligheder, eller også er der kun ganske få elever, der har overblik over hele kernestoffet.k

De to prøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
11a	Momenter for binom	7.81
2a	Afstand mellem to punkter	6.63
9b	Fortolk regressionsmodel	6.48
9a	Kvadratisk regression	6.31
8a	Hældningsvinkel	5.98
3a	Rødder for 2. gradspolynom	5.93
10a	Differentier rational funktion	5.61
12a	Løs logistisk ligning	5.42
12b	Tegn logistisk funktion	5.32
6a	Værdi for logistisk funktion	4.85
1a	Differentation	4.56
5a	Punktsandsynlighed for binom	4.53
3b	Skitser parabel	4.49
13a	Tangent for cirkel	4.37
10b	Monotoniforhold	4.23
12c	Differentier og fortolk	4.15
7a	Sammenknyt formel og graf	3.91
11b	Normal udfald for binom	3.89
4a	Isoler i simpel ligning	3.61
13b	Find parallel tangent	3.21

Tabel 12: *Spørgsmålene for HF-B 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* **uden adgang til CAS** *er farvet lilla.*



Figur 26: *HF-B 20. maj 2022. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende ret præcist får samme udbytte af de to delprøver.

Man kan dog bemærket det lidt aparte fænomen at enkelte studerende får nul point (eller næsten nul) i delprøve 1, men nærmest fuldt point i delprøve 2.

9.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra hf B - sættet fra den 20. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* ses som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

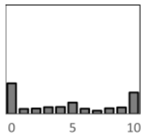
9.3 Delprøve 1

9.3.1 Opgave 1 - Differentialregning

Opgave 1 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^5 - 7 \cdot x^2 \; .$$

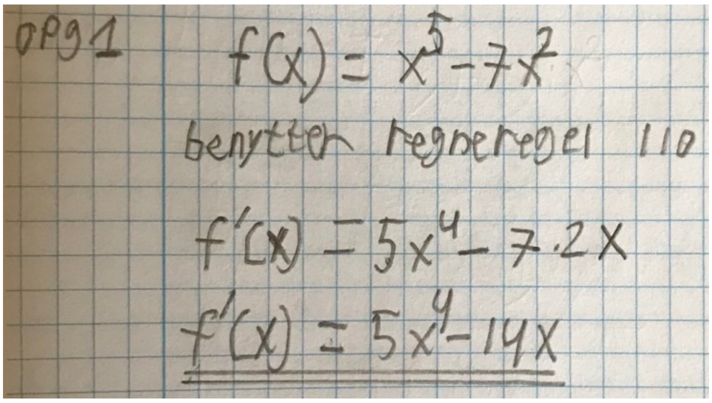
(10 point) a) Bestem $f'(x)$.



Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 4,6)
Mange elever differentierer funktionen korrekt i få trin. Ikke ret mange reducerer forskriften for den afledede funktion.
Nogle elever benytter produktreglen på det sidste led, måske fordi gangetegnet efter 7-tallet er skrevet.

En del censorer nævner i forbindelse med denne type spørgsmål, at de savner mellemregninger. Det er i hvert fald en god ide at tage et par mellemregninger med, da korrekte mellemregninger vil tælle positivt, selvom det endelig resultat skulle gå hen og være forkert.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

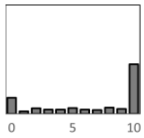

Opg 1
$f(x) = x^5 - 7x^2$
benytter regneregel 110
$f'(x) = 5x^4 - 7 \cdot 2x$
$f'(x) = 5x^4 - 14x$

9.3.2 Opgave 2 - Geometri (Afstand mellem to punkter)

Opgave 2 Der er givet to punkter $A(1, 4)$ og $B(9, 10)$.

(10 point)

a) Bestem afstanden $|AB|$ mellem de to punkter.



Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 6,6)

En opgave, som mange løser fint.

Nogle elever benytter meget omstændeligt kvadratsætningerne i udregningen.

De typiske fejl er ombytning af x- og y-koordinaterne, og at kvadratroden ophæver potenserne i de to parenteser.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 2

Jeg får givet 2 punkter

$A(\underset{x_1}{1},\underset{y_1}{4})$ og $B(\underset{x_2}{9},\underset{y_2}{10})$

a) Jeg skal bestemme afstanden $|AB|$ mellem de to punkter

Det vil jeg gøre ved at bruge FM49

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Jeg vil sætte mine kendte værdier ind i formlen og udregne den

$$|AB| = \sqrt{(9-1)^2+(10-4)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{64+36}$$

$$|AB| = \sqrt{100}$$

$$|AB| = 10$$

Afstanden $|AB|$ er 10

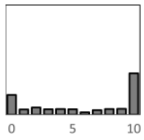
9.3.3 Opgave 3 - Andengradspolynomier

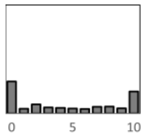
Opgave 3 Et andengradspolynomium f er givet ved

Bilag vedlagt $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

(10 point) a) Bestem diskriminanten d, og bestem andengradspolynomiets rødder.

(10 point) b) Tegn en skitse af grafen for f. Brug bilaget.

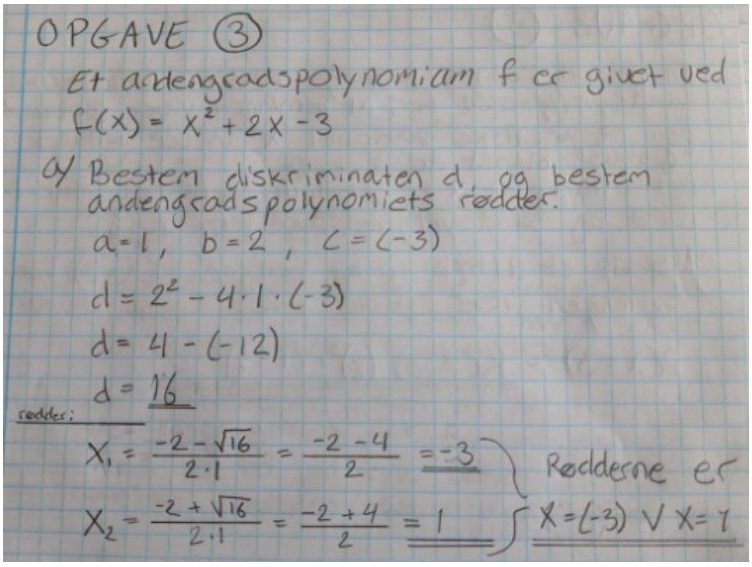




Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 5,9)
Spørgsmålet lægger op til, at rodformlen benyttes, og det gør de gode elever typisk.
En del elever kan ikke bestemme rødderne, og en del har problemer med fortegn.

Nedenfor ses et eksempel på en besvarelse, hvor opgavetekstens relevante oplysninger præsenteres, og diskriminant og rødder beregnes med et passende antal mellemregninger.
Rodformlen og formlen for diskriminanten mangler dog.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



OPGAVE 3

Et andengradspolynomium f er givet ved

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

a) Bestem diskriminaten d, og bestem andengradspolynomiets rødder.

$a = 1, \quad b = 2, \quad c = (-3)$

$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$

$d = 4 - (-12)$

$d = \underline{16}$

rødder:

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2-4}{2} = \underline{\underline{-3}}$

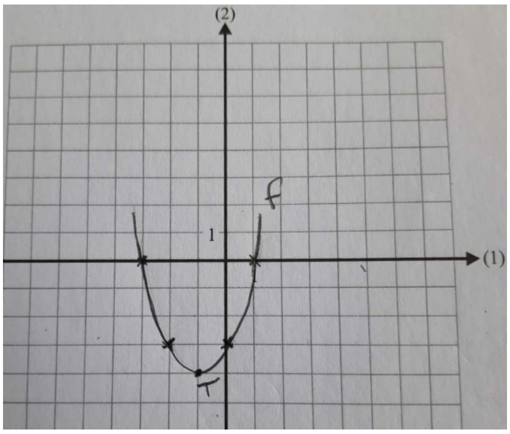
$x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+4}{2} = \underline{\underline{1}}$

Rødderne er $\underline{\underline{x = (-3) \vee x = 1}}$

Spørgsmål 3b (pointgennemsnit: 4,5)
Mange elever beregner toppunktet samt skæring med y-aksen og benytter disse som støttepunkter. En typisk fejl er, at grafen ikke er symmetrisk om $x = -1$.

Nedenfor ses en besvarelse, hvor rødderne (fundet i 3a)), toppunkt, skæring med y-aksen samt $(-2, -3)$ er afsat. Der er en tydelig symmetri. Det er dog ønskeligt, at parablen tegnes i et større interval.
Det ville også tælle positivt i en helhedsvurdering, hvis beregningen af toppunktets andenkoordinat vises.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

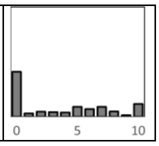


9.3.4 Opgave 4 - Tal og formler (Isolér variabel)

Opgave 4

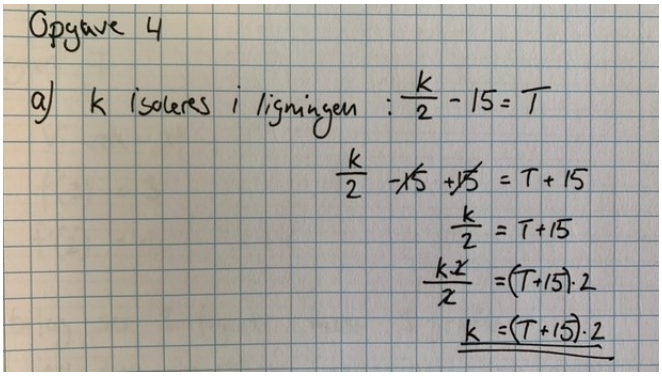
(10 point) a) Isolér k i ligningen

$$\frac{k}{2} - 15 = T\,.$$



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 3,6)
Den opgave i delprøve 1, som eleverne har sværest ved.
En del elever forsøger sig slet ikke med opgaven.
Mange elever har problemer med regneartернes hierarki.
Der sættes ikke parentes om $T + 15$, før der ganges med 2 (enten ganges T med 2 eller også ganges 15 med 2).
Nogle elever fjerner T til slut.

Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 4

a) k isoleres i ligningen : $\frac{k}{2} - 15 = T$

$$\frac{k}{2} \cancel{-15} \cancel{+15} = T + 15$$

$$\frac{k}{2} = T + 15$$

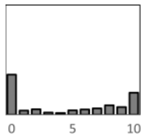
$$\frac{k \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = (T+15) \cdot 2$$

$$\underline{k = (T+15) \cdot 2}$$

9.3.5 Opgave 5 - Binomialfordeling

Opgave 5

Ludoterning, der viser "globus"



En person kaster 8 gange med en ludoterning.

Sandsynligheden for, at terningen viser "globus", er $\frac{1}{6}$.

Den stokastiske variabel X angiver antallet af "globus" blandt de 8 kast. Det antages, at X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 8$ og sandsynlighedsparameter $p = \frac{1}{6}$.

(10 point) a) Opstil et udtryk til at beregne sandsynligheden $P(X = 3)$ for, at terningen viser "globus" præcis 3 gange blandt de 8 kast.

Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 4,5)
Opgaven løses ved finde formlen for sandsynlighedsfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel og indsætte de givne værdier for n og p.
Mange elever forsøger sig slet ikke med opgaven.
En typisk fejl hos selv gode elever (og i eksemplet nedenfor) er en manglende parentes om brøken $\frac{1}{6}$, når den opløftes i tredje potens.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 5
Jeg skal opstille et udtryk, der beregner sandsynligheden for, at terningen viser "globus" 3 gange ud af 8 kast, med sandsynlighedsparameteret $p=\frac{1}{6}$.

Dette vil jeg gøre vha. formel (165) fra formelsamlingen. Her skal jeg bruge $K(n,r)$, så den finder jeg først i Pascals trekant (170) i formelsamlingen

$K(8,3)=56$
Jeg indsætter i formel (165)
$P(X=3)=56\cdot\frac{1}{6}^3\cdot(1-\frac{1}{6})^{8-3}$

9.3.6 Opgave 6 - Logistisk vækst (forberedelsesmaterialet)

Opgave 6

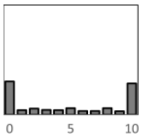
Majsplanter
Billedkilde: colourbox

I et forsøg måles højden af en majsplante. Udviklingen i majsplantens højde kan beskrives ved den logistiske vækstfunktion

$$f(x)=\frac{240}{1+79\cdot e^{-0{,}104\cdot x}}\ ,$$

hvor $f(x)$ er majsplantens højde, målt i cm, og x er antal døgn efter målingernes start.

(10 point) a) Bestem $f(0)$. Hvad fortæller dette tal om højden af majsplanten?



Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 4,9)
En stor del af eleverne løser opgaven helt rigtigt.
En typisk fejl er, at resultatet af e^0 angives som 0.
En del elever har problemer med at reducere $\frac{240}{80}$.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 6:

a) $f(x) = \frac{240}{1+79\cdot e^{-0{,}104\cdot x}}$

$f(0) = \frac{240}{1+79\cdot e^{-0{,}104\cdot 0}}$

$f(0) = \frac{240}{1+79\cdot e^{0}}$

$f(0) = \frac{240}{1+79}$

$f(0) = \frac{240}{80} = 3$

$f(0) = 3$

Det fortæller at masjplantens højde 0 dø efter målingens start er 3 cm. Med andre fortæller det at majsplantens starthøjde / begyndelsesvardi = 3 cm.

Fundet ved at insætte 0 på x plads og reducere udtrykket.

9.3.7 Opgave 7 - Differentialregning

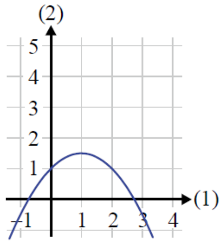
Opgave 7 Om funktionen f oplyses følgende

$$f(2)=3$$
$$f'(2)=-1\,.$$

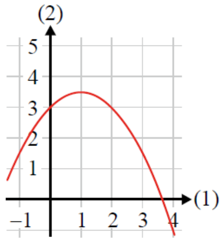
Netop én af de nedenstående figurer viser grafen for f.

(10 point) a) Forklar, hvilken af de tre figurer, der viser grafen for f, og forklar, hvorfor det ikke kan være de to andre.

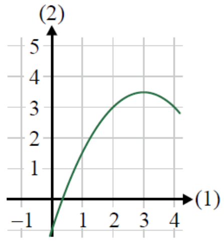
Bilag vedlagt



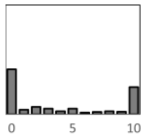
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 3,9)
En opgave hvor de fleste kan afkode, at $(2,3)$ skal ligge på grafen (og dermed udelukke Figur 1), men hvor fortolkningen af differentialkvotienten som tangenthældning er svært for mange.
Mange vælger Figur 3 som den rette med den forkerte begrundelse, at grafen skærer y-aksen i -1.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 7

om funktionen f oplyses følgende

f(2) = 3

f'(2) = -1

Netop én af de nedestående figurer viser grafen for f, og forklar hvorfor det ikke kan være de to andre

f(2) = 3 viser at grafen har et skaringspunkt i (2,3), og af den grund kan figur 1 udelukkes

f'(2) = -1, viser at grafen har en negativ haldning når den skære x-aksen i 2, og af den grund kan det ikke være figur 3

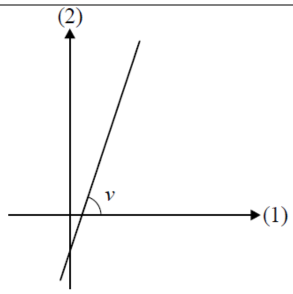
figur 2 viser grafen for f

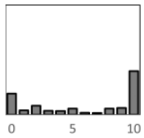
Se bilag til opgave 7

9.4 Delprøve 2

9.4.1 Opgave 8 - Geometri (Hældningsvinkel ved brug af formel)

Opgave 8





Figuren viser linjen med ligningen $y = 3 \cdot x - 2$.

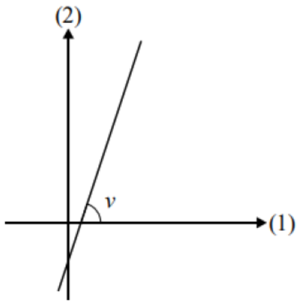
(10 point) a) Benyt en formel til at bestemme hældningsvinklen v for linjen.

Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 6,0)
En opgave, hvor en del elever ikke forsøger at besvare spørgsmålet eller overser metodekravet og løser opgaven ved at måle vinklen.

Nedenfor ses en fin besvarelse, der dog mangler en konklusion.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8



Figuren viser linjen med ligningen $y = 3 \cdot x - 2$.

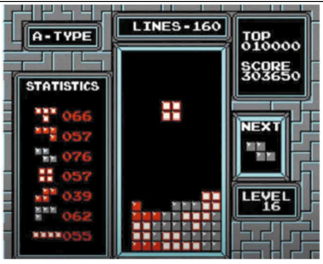
(10 point) a) Benyt en formel til at bestemme hældningsvinklen v for linjen.

Man bruger formlen $a = \tan(v)$ hvor v er vinklen og a er hældningskoefficienten i vores tilfælde 3 og beregner det med geogebra

l1 = NBeregn(3 = tan(x))
≈{x = 71.56505°}

9.4.2 Opgave 9 - Kvadratisk regression

Opgave 9



Computerspillet Tetris
Billedkilde: youtube.com

Tabellen viser sammenhængen mellem spilletid og antal point for en dygtig Tetris-spiller.

Spilletid (minutter)	1	2	…	13	14
Antal point	5192	8955	…	802121	938062

Alle tabellens 14 datapunkter findes i vedhæftede fil: Bilag_2_tetris_data

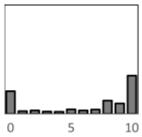
I en model beskrives sammenhængen ved et andengradspolynomium

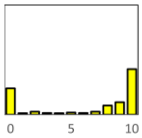
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \ ,$$

hvor $f(x)$ er antal point, og x er spilletiden, målt i minutter.

(10 point) a) Benyt regression til at bestemme konstanterne a, b og c.

(10 point) b) Hvor mange point har spilleren ifølge modellen efter 7,5 minutter?





Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 6,3)

En opgave, som mange klarer fint. Der er ikke store problemer med at importere data fra Excel-arket. De mest typiske fejl er brug af en forkert regressionstype, manglende fortegn på konstanten c samt ombytning af x og y. Nogle elever skriver x^2 og x efter henholdsvis a og b, og nogle elever skriver blot funktionsforskriften i konklusionen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Delprøve 2, opgave 9

I en model beskrives sammenhængen ved et andengradspolynomium $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, hvor $f(x)$ er antal point og x er spilletiden, målt i minutter.

a) Benyt regression til at bestemme konstanterne a, b og c:

Jeg har indsat mit datasæt i et regneark, valgt Statistik → Statistiske Beregninger → Andengradsregression, og Nspire har fået:

$a=4751.98$, $b=1783.56$ og $c=-11935$

	B antalp...	C	D	E
=			=QuadReg	
1	5192.	Titel	Andengr...	
2	_	RegEqn	a*x^2+b...	
3	8955.	a	4751.98	
4	_	b	1783.56	
5	43052.	c	-11935.	
6	_	R²	0.997312	
7	67072.	Resid	{10591.4..	
8				

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 6,5)
En simpel opgave, hvor de fleste benytter modellen fra 9a). Alternativt løses opgaven grafisk. Mange angiver ikke et helt tal i konklusionen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Hvor mange point har spilleren ifølge modellen efter 7,5 minutter?

Jeg definerer først min funktion med Nspire:

$\mathbf{f}(x):=4751.98\cdot x^2+1783.56\cdot x-11935$ ▸ *Udført*

Så indsætter jeg $x=7.5$ i $\mathbf{f}(x)$, og Nspire udregner det:

$\mathbf{f}(7.5)$ ▸ $268741.$

Det vil sige, at Tetris–spilleren har 268741 point efter 7.5 minutter.

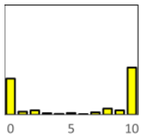
9.4.3 Opgave 10 - Differentialregning

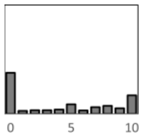
Opgave 10 Der er givet funktionen

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x^2)}{(x^2 + 1)} .$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f.





Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 5,6)
En let opgave, hvis eleven har styr på sit CAS-værktøj.
Nogle elever forsøger uden held at differentiere funktionen i hånden: Tæller og nævner differentieres hver for sig.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10

a) Bestem f'(x).

Så definerer vi funktionen i systemet. $\mathbf{f}(x):=\frac{x^3-2\cdot x^2}{x^2+1}$ ▸ *Udført*

Derefter differentierer vi funktionen $\mathbf{fm}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*

$\mathbf{fm}(x)$ ▸ $\frac{x\cdot\left(x^3+3.\cdot x-4.\right)}{\left(x^2+1.\right)^2}$ ⚠

Spørgsmål 10b (pointgennemsnit: 4,2)
En helt central og meget typisk opgavetype i kernestoffet, hvor mange elever desværre får 0 point.
En del elever laver en monotonilinje, men skriver ikke monotoniintervallerne op.

I spørgsmålet står eksplicit, at ligningen $f'(x) = 0$ skal løses. Dette er for at undgå, at eleverne bestemmer monotoniforholdene grafisk. Da funktionens definitionsmængde ikke er begrænset, kan en grafisk løsning aldrig stå alene. Et grafisk argument, understøttet af løsningen af ligningen $f'(x) = 0$ vil dog give fuldt point. Det mest naturlige i en opgave som denne er dog at bestemme fortegnsvariationen for f'.

Nedenfor ses en besvarelse, hvor der savnes lidt tekstforklaring samt fremhævning af, at fm$(-1) > 0$ osv. Grafen tegnes som kontrol, hvilket giver et godt helhedsindtryk.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)

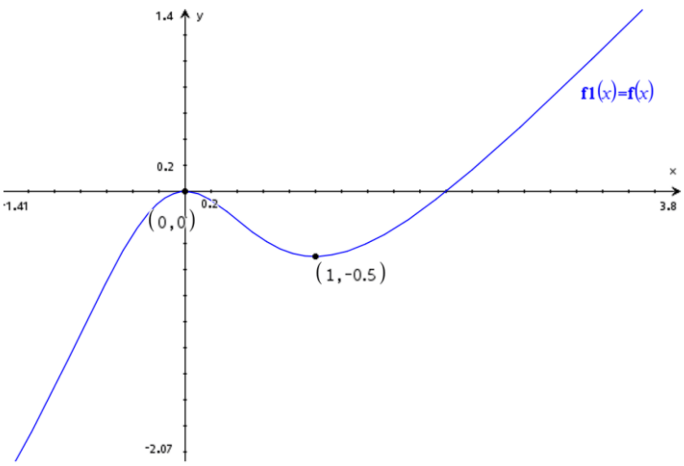
Løs ligningen f'(x) = 0, og bestem monotoni forholdende for f.

solve(**fm**(x)=0,x) ▸ x=0 or x=1⚠

så siger vi **fm**(-1) ▸ 2⚠,

fm(0.5) ▸ -0.76⚠ og

fm(2) ▸ $\frac{4}{5}$⚠ dvs at f(x) er voksende i]−∞,0] og [1,∞[og aftagende i [0,1].

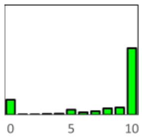


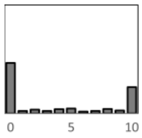
9.4.4 Opgave 11 - Binomialfordeling og normale udfald

Opgave 11 Den stokastiske variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 1000$ og sandsynlighedsparameter $p = 0,435$.

(10 point) a) Bestem middelværdien μ og spredningen σ af X.

(10 point) b) Afgør, om 400 er et normalt udfald for X.





Spørgsmål 11a (pointgennemsnit: 7,8)
De fleste elever klarer ikke overraskende denne opgave fint. De angiver hvilke formler, der skal bruges, sætter ind og konkluderer.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a)

Middelværdien for den stokastiske variabel $X \sim b(1000,0.435)$ kan findes med formlen $\mu = n \cdot p$, hvor n er antalsparameteren og p er sandsynlighedsparameteren.

$\mu = 1000 \cdot 0.435 \blacktriangleright 435.$

Så middelværdien for X er 435.

Spredningen kan findes med formlen $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$, hvor n og p er de samme værdier som før.

$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0.435 \cdot (1-0.435)} \blacktriangleright 15.6772$

Derfor er spredningen lig med 15.7.

Spørgsmål 11b (pointgennemsnit: 3,9)
Pointgennemsnitter er meget lavt i denne opgave. En væsentlig grund til dette er formentlig, at spørgsmål formuleret som dette har ikke været standard i tidligere eksamenssæt, så mange elever har været i tvivl om, hvad der menes med "et normalt udfald for X".
Nogle forsøger sig med beregning af $P(X = 400)$, andre laver et binomialtest, men kan ikke relatere kritiske værdier til ikke-normale udfald.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)

Normale udfald defineres som at ligge indenfor $\mu \pm 2 \cdot \sigma$, hvilket for denne binomialfordeling ligger normale udfald mellem

$435+2 \cdot 15.7 \blacktriangleright 466.4$

og

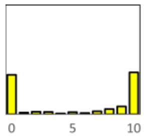
$435-2 \cdot 15.7 \blacktriangleright 403.6$

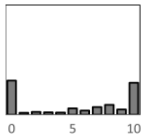
og derfor kan det konkluderes at 400 **ikke** er normalt udfald for X.

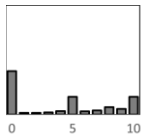
9.4.5 Opgave 12 - Logistisk vækst (forberedelsesmaterialet)

Opgave 12

Bagekartofler
Billedkilde: dagens.dk







En bagekartoffel sættes i ovnen. Udviklingen i bagekartoflens temperatur kan beskrives ved den logistiske vækstmodel

$$f(x) = \frac{99{,}8}{1+11\cdot e^{-0{,}083x}} \,,$$

hvor $f(x)$ er temperaturen (målt i °C) af kartoflen efter x minutter i ovnen.
Kartoflen skal have en temperatur på 82 °C, før den er færdig.

(10 point) a) Hvor lang tid går der, før kartoflen er færdig?

(10 point) b) Tegn grafen for f.

(10 point) c) Bestem $f'(25)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Spørgsmål 12a (pointgennemsnit: 5,4)
En knald-eller-fald-opgave.
Mange elever kommer dog slet ikke i gang med opgaven, måske fordi den virker afskrækkende, hvis man ikke har læst forberedelsesmaterialet tilstrækkeligt grundigt.
Et godt råd er at gøre det klart for eleverne, at de skal arbejde meget seriøst med forberedelsesmaterialet. Der er mange points at hente i dette emne, og eksamensopgaverne ligger typisk meget tæt på opgaveeksemplerne i forberedelsesmaterialet.

Den gode elev definerer typisk funktionen, da forskriften skal benyttes flere gange.
En typisk fejl er at beregne $f(82)$ i stedet for at løse ligningen $f(x) = 82$.
Nogle elever konkluderer ikke i opgaven, og atter nogle afrunder ikke i konklusionen.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 12
En bagekartoffel sættes i ovnen. Udviklingen i bagekartoflens temperatur kan beskrives ved den logistiske vækstmodel $f(x) = \frac{99.8}{1+11\cdot e^{-0.083\cdot x}}$
hvor f (x) er temperaturen (målt i °C) af kartoflen efter x minutter i ovnen. Kartoflen skal have en temperatur på 82 °C, før den er færdig.
a) Hvor lang tid går der, før kartoflen er færdig?

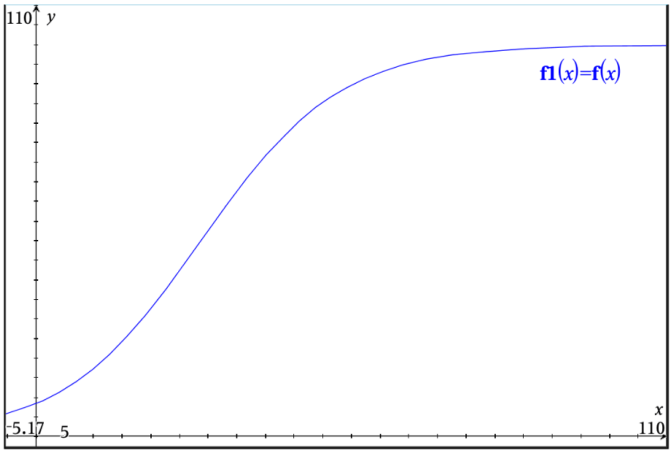
$f(x) := \frac{99.8}{1+11\cdot e^{-0.083\cdot x}}$ ▸ *Udført*

$\mathrm{solve}(f(x)=82, x)$ ▸ $x=47.2942$

Når vi bruger kommandoen ovenfor kan vi altså se at kartoflen skal bages i ovnen i ca. 47.3 minutter for at opnå en temperatur på 82 °C

Spørgsmål 12b (pointgennemsnit: 5,3)
En del elever får ikke point i denne opgave, selvom den logistiske veksttype og dens graf er velkendt fra forberedelsesmaterialet.
En typisk fejl er, at standardgrafvinduet benyttes, så hele den relevante del af grafen ikke vises. Desuden tegnes grafen også ofte for $x < 0$, hvilket ikke giver mening i konteksten.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



Spørgsmål 12c (pointgennemsnit: 4,2)
En del kan beregne $f'(25)$, men der er mange, der har problemer med at fortolke tallet. Nogle skriver kun, at f' er tangenthældningen. En del skriver, at enheden for $f'(25)$ er grader.

I nedenstående besvarelse beregnes $f'(25)$, og der konkluderes med korrekt enhed. Væksthastigheden angives dog med alt for mange betydende cifre, og formuleringen "ifølge modellen" kunne med fordel inddrages i konklusionen (måske kunne det oven i købet få eleven til at overveje den nøjagtighed, svaret angives med!).

Et eksempel på en elevbesvarelse:

c) Bestem f'(25), og giv en fortolkning af dette tal.

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright \frac{91.1174\cdot(1.08654)^x}{\left((1.08654)^x+11.\right)^2}$$

$$\mathbf{fm}(x)=\mathbf{f}\,'(x)\ \ \mathbf{fm}(x):=\frac{91.1174\cdot(1.08654)^x}{\left((1.08654)^x+11.\right)^2} \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\mathbf{fm}(25) \blacktriangleright 2.01778$$

Tallet 2.01778 betyder at efter 25 minutter i ovnen, har kartoflens temperatur en væksthastighed på 2.01778 °C i minuttet

9.4.6 Opgave 13 - Geometri (Cirkeltangenter)

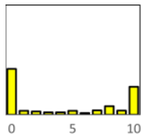
Opgave 13 En cirkel er givet ved ligningen

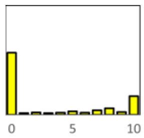
$$(x-5)^2+(y+1)^2=13\,.$$

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten t_1 til cirklen i punktet $P(2,1)$.

Cirklen har en anden tangent t_2, der er parallel med t_1.

(10 point) b) Bestem en ligning for tangenten t_2.





Spørgsmål 13a (pointgennemsnit: 4,4)
Opgaven kan løses både grafisk og analytisk.
De fleste løser opgaven grafisk. En typisk mangel er her, at konstruktionen ikke beskrives.
Løses opgaven analytisk er en typisk fejl, at koordinaterne aflæses forkert.

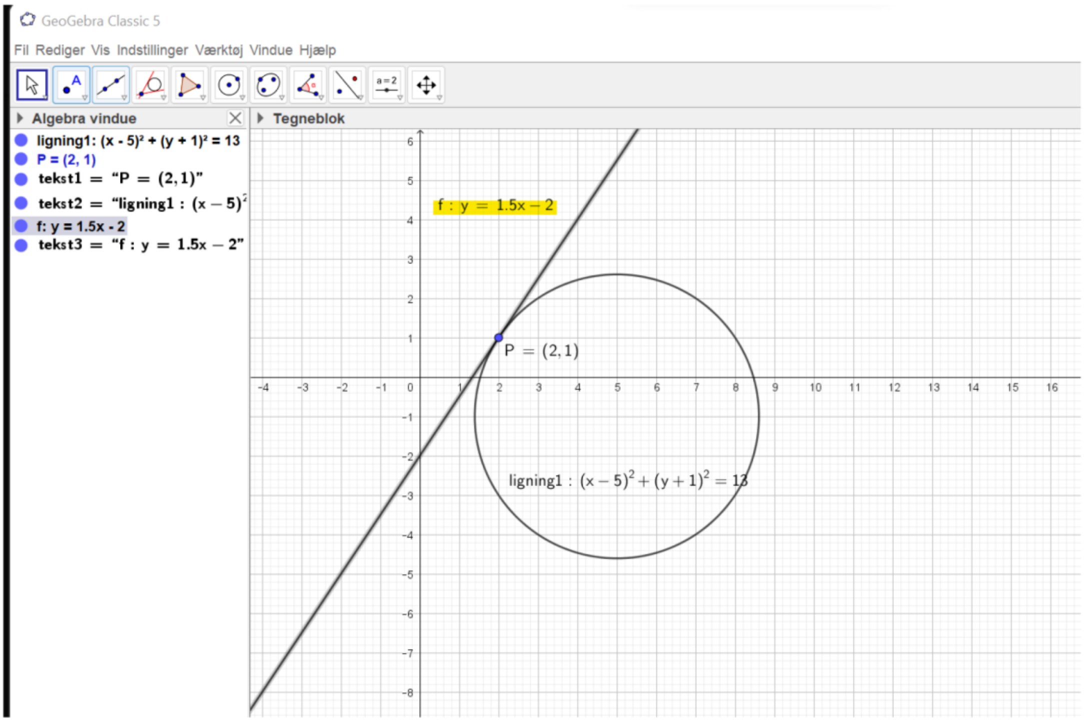
Nedenfor ses et eksempel på en god besvarelse, løst ved konstruktion.
Det havde dog været godt, hvis opgavetekstens relevante oplysninger var blevet præsenteret, ligesom det skæmmer indtrykket, at tangentens ligning skrives på formen f(x) = ...

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 13

a) Bestem en ligning for tangenten t_1 til cirklen i punktet P(2,1)

Cirkel og punkt tegnes i GeoGebra og jeg bruger derefter værktøjet tangenter.

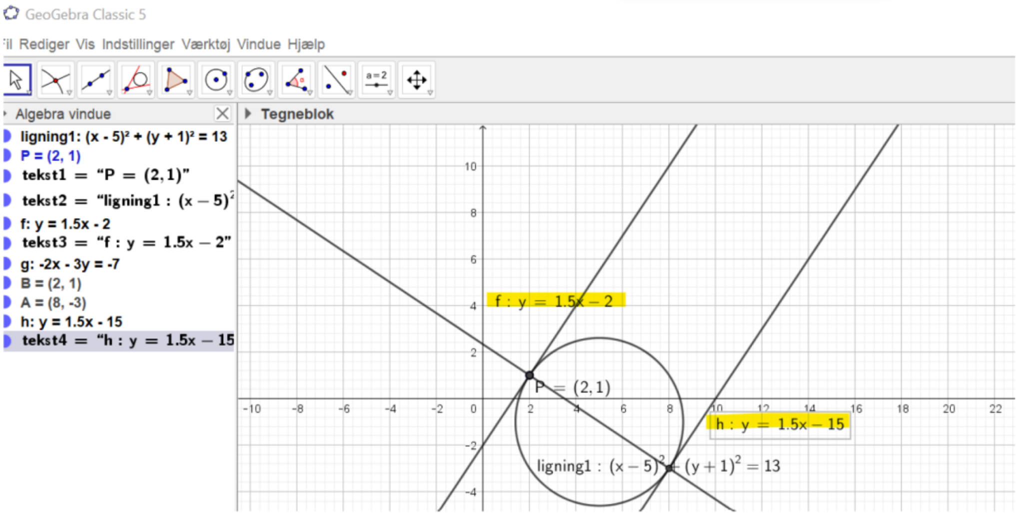


Ligningen for tangenten t_1 til cirklen i punktet P(2,1) er $f(x)=1{,}5x-2$

Spørgsmål 13b (pointgennemsnit: 3,2)
Sættets sidste og sværeste spørgsmål, der både kan løses analytisk og ved konstruktion.
De fleste elever, der når frem til det korrekte resultat, løser opgaven ved konstruktion. Mange mangler dog både at forklare deres tankegang og at skrive en konstruktionsforklaring.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem en ligning for tangenten t_2.
Brug af GeoGebra og værktøjerne vinkelret linje, skæringsværktøj og tangenter



Ved brug af Geogebra har jeg bestemt, at ligningen til den parallelle tangent t_2 er $y = 1{,}5x - 15$

10 Opsamling på elevbesvarelserne af hf B-sættet

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i sættene er det værd at fremhæve særligt fem forhold.

For det første er det interessant, at mange elever slet ikke får point i differentialregningsopgaverne, og bortset fra opgave 10a), hvor en given funktion blot skal differentieres med mulighed for at anvende CAS, er der heller ikke mange, der får fuldt point i disse opgaver. Endvidere er den af mindstekravsopgaverne, som eleverne klarer dårligst, spørgsmål 1a), hvor en simpel funktion skal differentieres. I 10b) skal man løse ligningen $f'(x) = 0$ og bestemme monotoniforhold, og i 12c) skal man fortolke en differentialkvotient. Alle disse opgaver er typiske opgaver for emnet, men de færreste elever kan honorere alle kravene. En anbefaling kan være at træne relativt flere opgaver, hvor monotoniforhold og ekstrema skal bestemmes, både med og uden hjælpemidler, og opgaver, hvor en differentialkvotient skal fortolkes i en modelsammenhæng.

For det andet er der en del elever, der taber points, fordi de ikke efterlever metodekrav, og det kan derfor være relevant at gøre eleverne opmærksom på dette. Skal et spørgsmål i trigonometri løses ved hjælp af en formel, er en konstruktionsbesvarelse ikke fyldestgørende. Skal en acceptmængde angives, vil en beregning af et konfidensinterval ikke være svar på spørgsmålet, osv. Det er således nødvendigt at træne eleverne i at kunne benytte forskellige løsningsmetoder. Det har også den bonus, at eleverne opnår en dybere forståelse af stoffet og bliver mere robuste overfor "ustabile" CAS-værktøjer.

For det tredje er der mange elever, der slet ikke kommer i gang med opgaverne i forberedelsesmaterialet. Opgaverne kan måske ved første øjekast virke skræmmende, men hvis man har regnet opgaverne i materialet grundigt igennem, er der mange nemme points at hente i disse spørgsmål, fordi opgaverne til prøven og opgaverne i forberedelsesmaterialet minder om hinanden.

For det fjerde er det vigtigt at gøre klart for sine elever, at hvis man løser en opgave i analytisk geometri ved konstruktion er det nødvendigt, at man på fornuftig måde redegør for, hvordan konstruktionen er udført, og hvilke værktøjer der er anvendt.

For det femte viser det lave pointresultat for spørgsmål 4a), hvor der skal isoleres i en lineær ligning, som indeholder en variabel, endnu engang, at grundlæggende algebra volder eleverne problemer. Det er derfor meget vigtigt, at man også på B-niveau gør meget ud af at træne de algebraiske færdigheder som ligningsløsning (inkl. ligninger, der indeholder variable) samt reduktion af bogstavudtryk løbende i undervisningen.

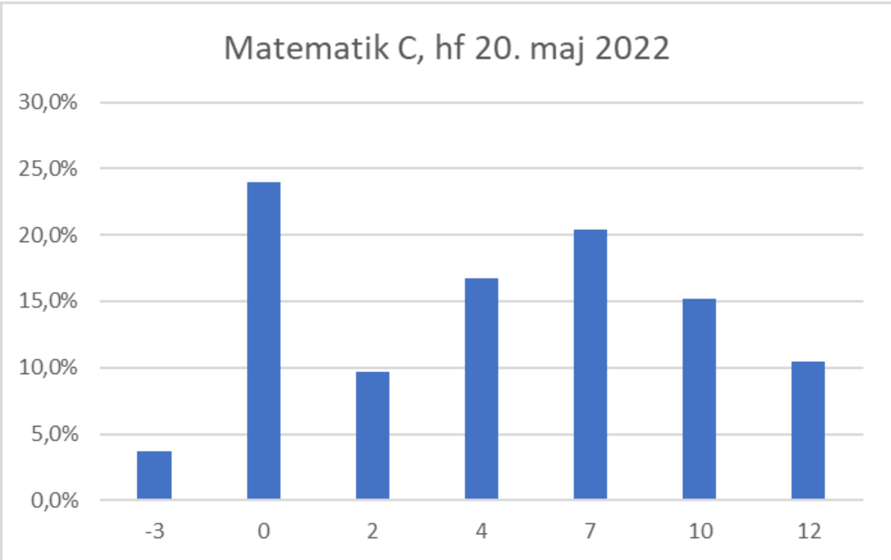
11 Hf C-niveau

Prøveresultat matematik C, hf 20. maj 2022[6]

Antal eksaminander til prøve	**8712**
Karaktergennemsnit	**4,95**
Andel ikke-beståede	**27,6 %**

Karakterfordeling

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	3,7%	23,9%	9,7%	16,7%	20,4%	15,1%	10,4%



Oversættelsesskala

Ved karakterfastsættelsen blev anvendt nedenstående standard-oversættelsesskala samt individuelle helhedsvurderinger.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Pointinterval	0-12	9-53	49-63	60-87	84-117	114-138	135-150

[6] Der er en restgruppe på 670 elever, som af tekniske årsager ikke er medtaget i statistikken.

11.1 Klassificering af underspørgsmål

Der er 2448 elever i forcensuren for denne prøve. Der er stillet 10 opgaver med i alt 15 spørgsmål.

Spørgsmålene kan klassificeres efter om de er knyttet til **mindstekravene** (og i så fald markeret med en grøn farve i opgavesættet):

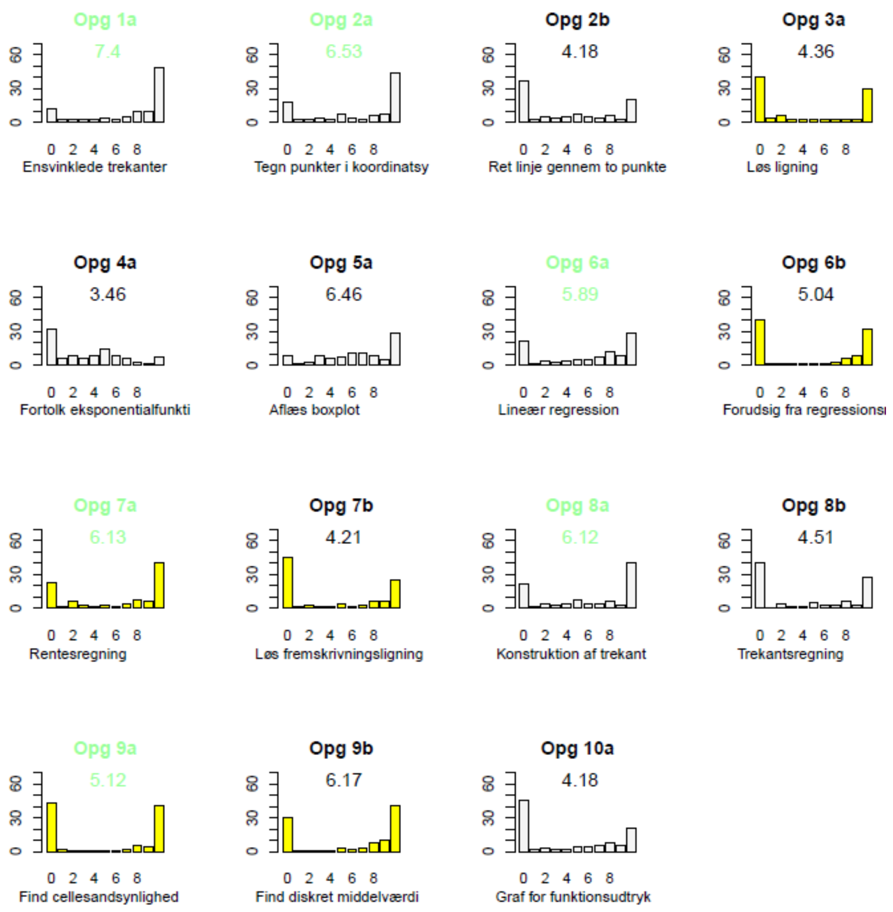
	Antal
Mindstekrav (grøn)	6
Ikke-mindstekrav (hvid)	9

Spørgsmålene kan også klassificeres efter om de er stillet i delprøven uden CAS-adgang (delprøve 1) eller i delprøven med CAS-adgang (delprøve 2):

	Antal
Delprøve 1	6
Delprøve 2	9

Det bemærkes at der under den aktuelle ordning er adgang til en formelsamling under hele eksamen - også under besvarelse af delprøve 1.

Pointgivningen i forcensuren er opsummeret i figur 19.

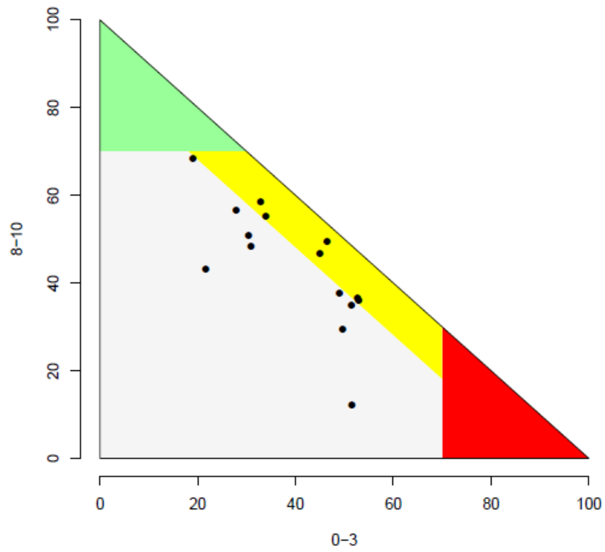


Figur 19: *Resultater for spørgsmålene for HF-C 20. maj 2022. Overskriften er farvet grøn for mindstekravs-spørgsmål. Opgjort ud fra forcensuren.*

En optælling af de forskellige kategorier giver følgende tabel:

Let	Svær	Knald-eller-fald	Midtertop	Standard
0	0	6	0	9

Et kompositionsdiagram for den grove tabellering, der danner udgangspunkt for kategoriseringen er:

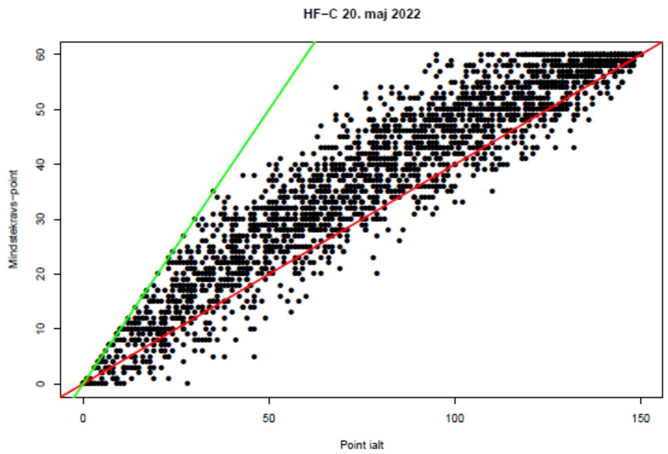


Figur 20: *Kompositionsdiagram for den grove tabellering af scorerne for HF-C 20. maj 2022. Spørgsmål der klassificeres som 'midtertop' (blå) befinder sig i det grå område.*

Mindstekravsopgaver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	Ensvinklede trekanter	7.4
2a	Tegn punkter i koordinatsystem	6.53
5a	Aflæs boxplot	6.46
9b	Find diskret middelværdi	6.17
7a	Rentesregning	6.13
8a	Konstruktion af trekant	6.12
6a	Lineær regression	5.89
9a	Find cellesandsynlighed	5.12
6b	Forudsig fra regressionsmodel	5.04
8b	Trekantsregning	4.51
3a	Løs ligning	4.36
7b	Løs fremskrivningsligning	4.21
2b	Ret linje gennem to punkter	4.18
10a	Graf for funktionsudtryk	4.18
4a	Fortolk eksponentialfunktion	3.46

Tabel 9: *Spørgsmålene for HF-C 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der er direkte knyttet til* **mindstekrav** *er farvet grønne.*



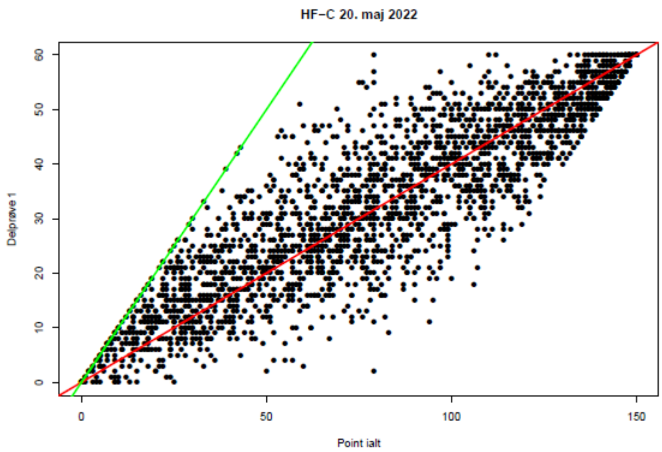
Figur 21: HF-C 20. maj 2022, point i mindstekravsopgaver mod point i alt. Den grønne linje svarer til at alle pointene er opnået i mindstekravsopgaver. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene er opnået i mindstekravsopgaverne.

Tegningen viser at eleverne får en god del af de indledende point i mindstekravsopgaverne. Men den viser også at kun de dygtigste får fuldt point i mindstekravsopgaverne - disse opgaver har altså indbyggede vanskeligheder, eller også er der kun ganske få elever, der har overblik over hele kernestoffet.

De to delprøver

Opgave	Tema	Gennemsnit
1a	Ensvinklede trekanter	7.4
2a	Tegn punkter i koordinatsystem	6.53
5a	Aflæs boxplot	6.46
9b	Find diskret middelværdi	6.17
7a	Rentesregning	6.13
8a	Konstruktion af trekant	6.12
6a	Lineær regression	5.89
9a	Find cellesandsynlighed	5.12
6b	Forudsig fra regressionsmodel	5.04
8b	Trekantsregning	4.51
3a	Løs ligning	4.36
7b	Løs fremskrivningsligning	4.21
2b	Ret linje gennem to punkter	4.18
10a	Graf for funktionsudtryk	4.18
4a	Fortolk eksponentialfunktion	3.46

Tabel 10: *Spørgsmålene for HF-C 20. maj 2022, sorteret efter gennemsnitsscore. De spørgsmål der skulle besvares* **uden adgang til CAS** *er farvet lilla.*



Figur 22: *HF-C 20. maj 2022. Scatterplot af antal point i delprøve 1 (på andenaksen) mod det samlede antal point (på førsteaksen). Den grønne linje svarer til at alle pointene opnås i første delprøve. Den røde linje svarer til at 40 procent af pointene opnås i delprøve 1, svarende til at pointene i delprøve 1 og 2 er lige tilgængelige.*

Tegningen viser at de studerende ret præcist får samme udbytte af de to delprøver.

11.2 Elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål

I det følgende afsnit gennemgås de enkelte spørgsmål fra hf C - sættet fra den 20. maj 2022 med særligt henblik på at afdække de fejl og mangler, der var de mest gennemgående i elevernes besvarelser af sættet.

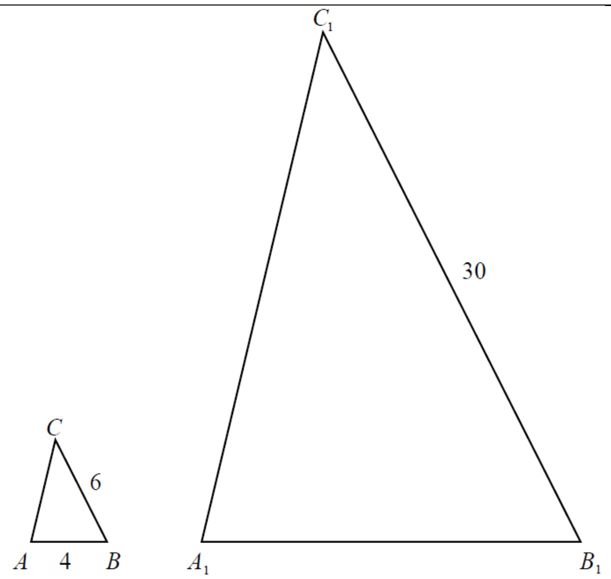
Hver opgavegennemgang indledes med et indklip af den pågældende opgave fra sættet samt et søjlediagram over pointfordeling for hvert af opgavens underspørgsmål. Disse søjlediagrammer bygger på den indberettede forcensur, og søjlernes farver følger klassificeringen fra foregående analyseafsnit.

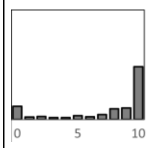
Endvidere vil der til hvert spørgsmål være indsat en tilhørende elevbesvarelse. Disse besvarelser er indleveret af de rettegrupper, der censurerede sættet. Hver rettegruppe fik til opgave at udvælge en fornuftig elevbesvarelse af et af fagkonsulenten tildelt underspørgsmål. Disse elevbesvarelser skal således *ikke* set som eksemplariske, og der er ikke foretaget en efterfølgende redigering i de indsendte besvarelser af denne rapports forfattere.

11.3 Delprøve 1

11.3.1 Opgave 1 - Ensvinklede trekanter

Opgave 1





Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$.
Nogle af trekanternes mål er angivet på figuren.

(10 point) a) Bestem længden af siden A_1B_1.

Spørgsmål 1a (pointgennemsnit: 7,4)
En typisk opgave, hvor mange scorer højt, og hvor de fleste finder det korrekte facit.
Argumentationen er dog ofte meget løs, og en del argumenterer slet ikke for deres svar.
Meget få elever vælger at besvare opgaven ved alene at benytte formlerne (31) og (32) i formelsamlingen. I stedet for forklares fremgangsmåden, og så bør en god besvarelse indeholde en beregning af skalafaktoren (forstørrelsesfaktoren/formindskelsesfaktoren), og der bør enten angives en formel for skalafaktoren eller nævnes, at der benyttes ensliggende sider i beregningen.
En meget typisk fejl er, at der i beregningen af skalafaktoren skrives $\frac{6}{30} = 5$.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse, hvor tankegangen tydeligt fremgår, og beregningen af forstørrelsesfaktoren er fremhævet. Helhedsindtrykket skæmmes en smule af, at der ikke skelnes mellem linjestykker og længden af disse.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 1

a) Jeg vil finde siden A_1B_1 ved at bestemme forstørrelsesfaktoren og gange den med siden AB.

Først findes forstørrelsesfaktoren $\boxed{k = \frac{a_1}{a}}$:

$$k = \frac{30}{6} = 5$$

Jeg vil nu gange k med $AB = 4$ og finde A_1B_1 :

$$A_1B_1 = 5 \cdot 4 = \underline{\underline{20}}$$

Altså er siden A_1B_1 lig 20.

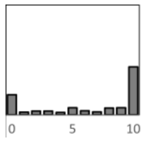
11.3.2 Opgave 2 - Lineære funktioner

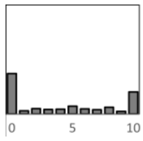
Opgave 2 Grafen for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ går gennem punkterne

Bilag vedlagt $A(-2, 3)$ og $B(6, 7)$.

(10 point) a) Tegn punkterne A og B samt grafen for f i samme koordinatsystem. Benyt bilaget.

(10 point) b) Bestem tallene a og b.





Spørgsmål 2a (pointgennemsnit: 6,5)

Mange elever får 10 point i denne opgave.

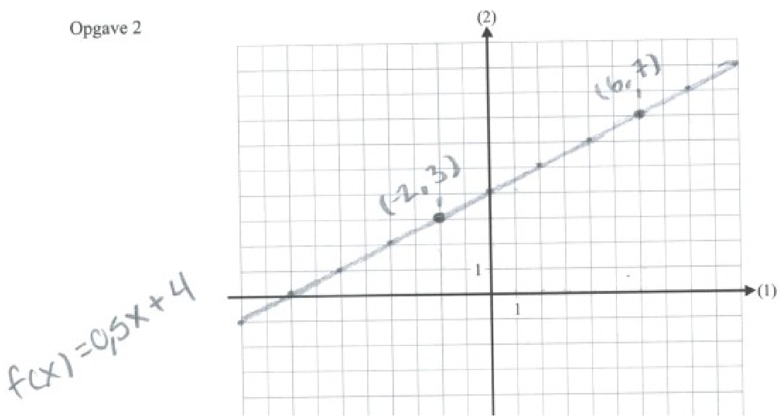
Overraskende mange elever kan dog ikke afsætte punkterne. Der byttes om på x og y, eller der er et problem med at håndtere den negative koordinat.

En del elever tegner kun linjestykket mellem A og B.

Mange elever mangler basal viden om koordinatsystemet, punkter og hvad der forstås ved grafen for en funktion. Et godt råd er med jævne mellemrum at sætte eleverne til at tegne grafer for forskellige funktioner "i hånden" ved brug af "sildeben".

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg 2 a) Se bilag på næste side →
Jeg har tegnet de 2 punkter, og herefter
en graf der skærer i dem begge
f(x)=0,5x+4
b) a er hældningskoefficienten, og man
kan aflæse at hver gang man rykker
en gang hen af x-aksen, stiger
grafen med 0,5.
Derfor er a = 0,5
b er skæringspunktet, og da grafen
skær y-aksen i 4, er b=4

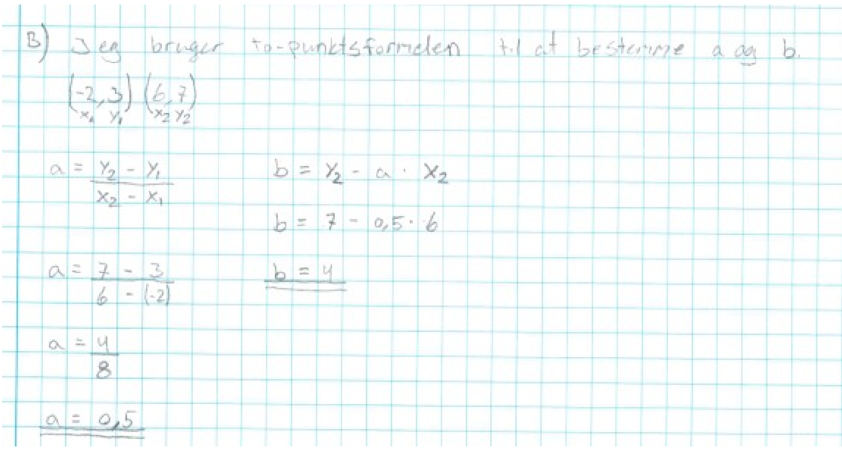


Spørgsmål 2b (pointgennemsnit: 4,2)

Opgaven løses ved enten at aflæse konstanterne ud fra grafen fra 2a) eller ved at benytte topunkts-formlerne.
Mange har problemer med at aflæse hældningen. Aflæsningen vises ofte som 2 ud ad x-aksen og 1 op ad y-aksen, og konklusionen bliver, at hældningen er 2.
En del elever forklarer/dokumenterer ikke, hvordan de aflæser på grafen.
Brug af topunktsformlen til bestemmelse af a giver også problemer, blandt andet på grund af den negative x-koordinat, og måske fordi resultatet er ½. Overraskende mange elever svarer, at $\frac{4}{8} = 2$.

I eksemplet ovenfor ses en besvarelse af 2b), hvor bestemmelsen af a og b ud fra grafen forklares med ord.
I eksemplet nedenfor ses en besvarelse af 2b), hvor topunktsformlerne benyttes.

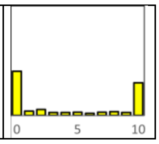
Et eksempel på en elevbesvarelse:



11.3.3 Opgave 3 - Ligning

Opgave 3

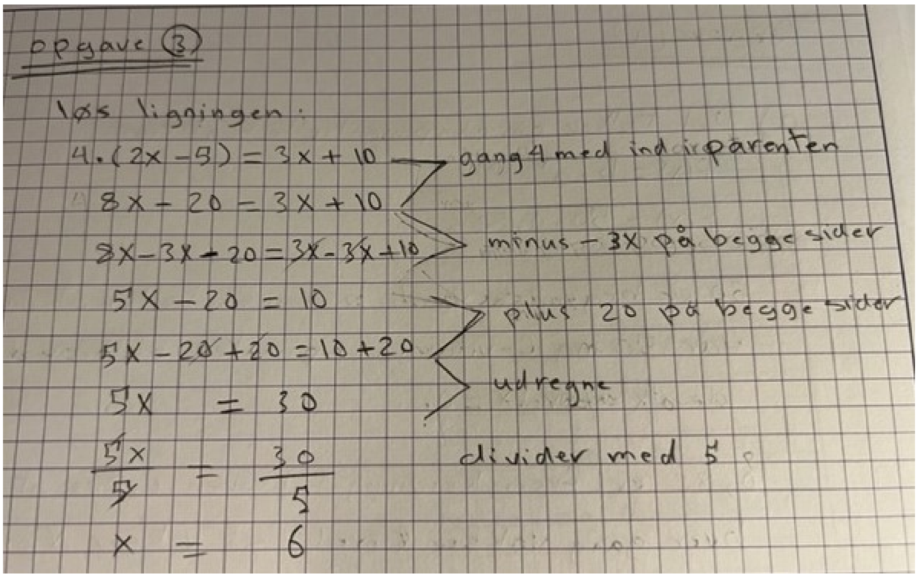
(10 point) a) Løs ligningen $4 \cdot (2x - 5) = 3x + 10$.



Spørgsmål 3a (pointgennemsnit: 4,4)
En svær opgave for mange elever. De har specielt svært ved at gange ind i parentesen.
Mange af de elever, der får 0 point, har helt sprunget opgaven over, måske fordi de er blevet afskrækket af parentesen i første linje. Det er derfor meget vigtigt at gøre det klart for eleverne, at der kan være mange point at hente i en ligningsopgave, selvom man laver (flere) fejl undervejs og ender med et forkert resultat.
Nogle elever gætter blot en løsning til ligningen og mister derfor mange points, da de ikke anvender en metode (eller kan argumentere for, at samtlige løsninger er bestemt).

I nedenstående eksempel ses en besvarelse med mange mellemregninger. Teksten er meget præcis, men kunne udelades.

Et eksempel på en elevbesvarelse:



11.3.4 Opgave 4 - Eksponentielle udviklinger (tolkning af konstanter)

Opgave 4

Spinat
Billedkilde: fitnessliv.dk

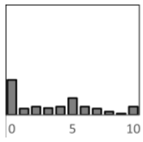
En skål med spinat sættes i køleskabet. Mængden af C-vitamin i spinaten kan beskrives ved den eksponentielle funktion

$$f(x) = 50 \cdot 0{,}82^x,$$

hvor $f(x)$ er mængden af C-vitamin i spinaten, målt i mg, efter x døgn i køleskabet.

(10 point) a) Forklar, hvad tallene 50 og 0,82 fortæller om mængden af C-vitamin i spinaten.

Kilde: sund-forskning.dk



Spørgsmål 4a (pointgennemsnit: 3,5)
Den opgave i delprøve 1, som eleverne har sværest ved.
Mange elever opfatter 0,82 som en hældningskoefficient, og fortolkningen af fremskrivningsfaktoren giver store problemer, selv for de gode elever. Skønt dette er en klassisk opgavetype, er der meget få, som får maksimumpoint.

Ideelt indeholder en god besvarelse en præsentation af modellens variable. Vækstraten skal bestemmes, og der skal skrives en konklusion med passende enheder. Nedenfor er vist en god besvarelse, hvor dog de variable ikke er præsenteret.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 4

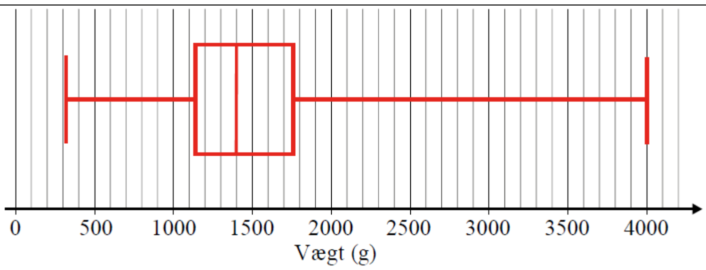
a) 50 er mængden af C-vitamin målt i mg efter 0 dage i køleskabet. altså begyndelsesværdien

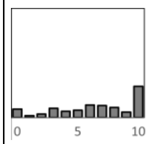
0,82 er Fremskrivningsfaktoren, hvilket vil sige, at for hvert døgn spinaten står i køleskabet, falder mængden af C-vitamin med 18%.

11.3.5 Opgave 5 - Statistik

Opgave 5

Bilag vedlagt





Boksplottet viser vægtfordelingen for en torskefangst. Vægten måles i gram.

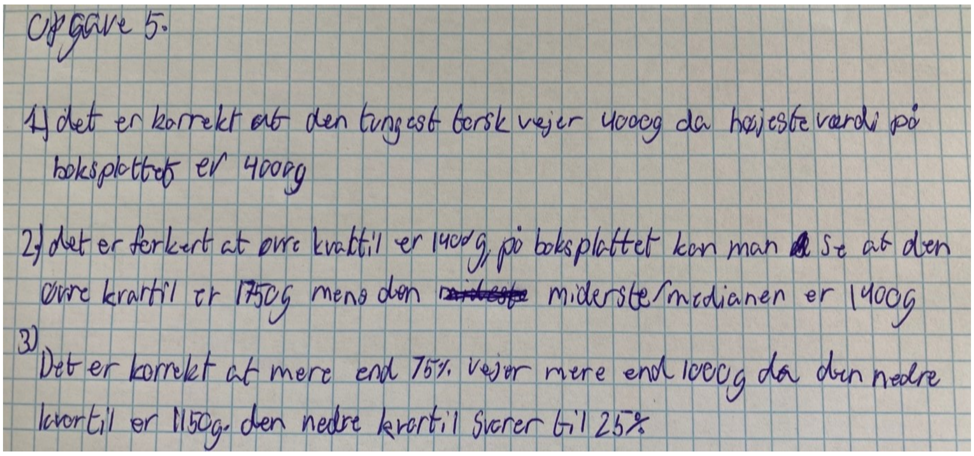
(10 point) a) Forklar for hver af følgende påstande, om den er korrekt. Benyt bilaget.

1) Den tungeste torsk vejer 4000 g.
2) Øvre kvartil er 1400 g.
3) Mere end 75 % af torskene vejer over 1000 g.

Spørgsmål 5a (pointgennemsnit: 6,5)
En opgave, hvor de fleste elever får en del point.
I de mindre gode besvarelser af opgaven mangler begrundelser for svaret. Der er også for mange, der ikke anvender bilaget, selvom det specifikt kræves.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse, hvor bl.a. størsteværdi, øvre kvartil og nedre kvartil er markeret på boksplottet, og hvor svarene på de tre spørgsmål begrundes i teksten.
Fortolkningen af nedre kvartil er dog ikke præcist formuleret.

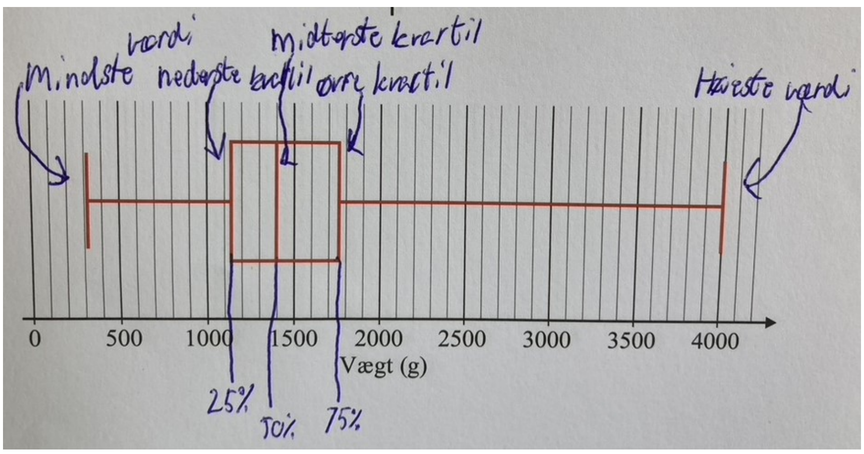
Et eksempel på en elevbesvarelse:


Opgave 5.

1) det er korrekt at den tungest torsk vejer 4000g da højeste værdi på boksplottet er 4000g

2) det er forkert at øvre kvartil er 1400g, på boksplottet kan man se at den øvre kvartil er 1750g mens den ~~midterste~~ midterste/medianen er 1400g

3) Det er korrekt at mere end 75% vejer mere end 1000g da den nedre kvartil er 1150g. den nedre kvartil svarer til 25%



11.4 Delprøve 2

11.4.1 Opgave 6 - Lineær regression

Opgave 6 Tabellen viser sammenhængen mellem hvidhajers tandhøjde og hajernes længde.

Tandhøjde (mm)	15	16	…	44	49
Længde (cm)	165	181	…	554	594

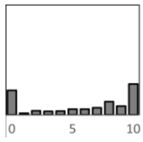
Alle tabellens 12 datapunkter findes i vedhæftede fil: Bilag_2_hvidhaj_data

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion

$$f(x) = a \cdot x + b \ ,$$

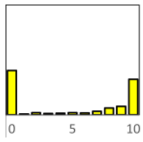
hvor $f(x)$ er længden af en hvidhaj, målt i cm, der har en tandhøjde på x mm.

(10 point) a) Bestem tallene a og b ved lineær regression.



Figur 1: Megalodon (forhistorisk hvidhaj)
Billedkilde: nhm.ac.uk

Figur 2: Tand fra en megalodon
Billedkilde: nhm.ac.uk



Henning har fundet en tand fra en megalodon, der har en tandhøjde på 117 mm.

(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme længden af megalodonen.

Kilde: Journal of Fossil Research

Spørgsmål 6a (pointgennemsnit: 5,9)
Typetallet for denne opgave er 10, men der ses en række typiske fejl, som alle trækker lidt ned:

- Elever, der ikke kan importere data, benytter kun de 4 punkter fra tabellen i regressionen.
- I konklusionen angives $f(x)$, men ikke a og b, som der eksplicit spørges til.
- Mange glemmer fortegnet på b i konklusionen.

Desuden bytter en del elever om på x og y.
Endelig benytter en del elever topunktsformler.

I nedenstående eksempel ses en god besvarelse. Det havde dog været godt, hvis der havde været en beskrivelse af modellen.

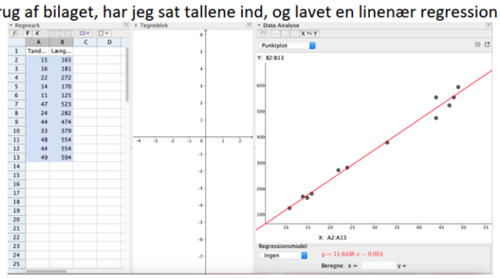
Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 6 løsning:

Opgave 6

a) bestem tallene a og b ved linenær regression

Ved brug af bilaget, har jeg sat tallene ind, og lavet en linenær regression over tallene, i geogebra.



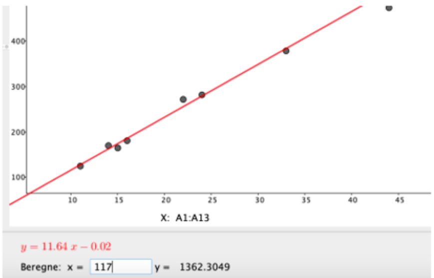
ved brug af geogebra, kan man se både a og b og dermed finde deres værdi.
a= 11,64
b= - 0,024

hvilket vil sige at den har en stigning på 11,64 og har en startværdi på -0,024.

Spørgsmål 6b (pointgennemsnit: 5,0)
Opgaven løses typisk ved beregning, men nogle tegner også grafen og finder skæringspunktet mellem grafen og $x = 117$.
Ikke alle elever ved, hvad det vil sige at benytte modellen.
En typisk fejl er, at der byttes om på x og y, så 117 indsættes som funktionsværdien.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Benyt modellen til at bestemme længden af megalodonen



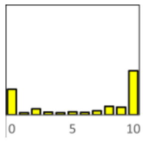
ved brug af geogebra, kan man sætte 117 ind på x´et plads, og dermed finde y-aksen værdi, som viser at hvis tandhøjden er 117 mm, vil længden være på 1362.30 cm

så svaret er 1362,30 cm i længden.

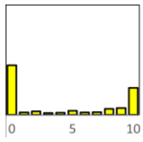
11.4.2 Opgave 7 - Eksponentielle udviklinger

Opgave 7 Et firmas omsætning var i 2018 på 14 mio. kr.
Firmaets omsætning voksede de efterfølgende år med 7 % pr. år.

(10 point) a) Bestem firmaets omsætning efter 3 år.



(10 point) b) Hvor lang tid går der, før firmaets omsætning er fordoblet, hvis udviklingen fortsætter?



Spørgsmål 7a (pointgennemsnit: 6,1)
Opgaven løses typisk ved brug af renteformlen.
En del elever benytter dog ikke en formel, men regner frem et år ad gangen.

En typiske fejl ligger i omregningen af 7% til 0,07.
Desuden bryder en del sig ikke om at regne i mio. Desværre kniber det for mange med antallet af nuller, når der omskrives. Et godt råd er at lære eleverne altid at regne med de enheder, der står i opgaveteksten.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse, hvor beregningen laves, og der skrives en konklusion.
Der mangler dog en forklaring på, hvilken formel, der benyttes, og det havde været godt med en introducerende tekst.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opg 7

a)

$$14 \cdot (1 + 0.07)^3 \approx 17{,}1506$$

Firmaet har en omsætning på 17,1506 mio efter 3 år med de 7% vækst.

Spørgsmål 7b (pointgennemsnit: 4,2)
En opgave, hvor mange får meget få points.
Kun få benytter formlen for fordoblingskonstanten. De fleste, der besvarer spørgsmålet, regner ud fra et eksempel, i dette tilfælde ved at sætte den dobbelte b-værdi ind som slutværdi. Dette giver dog også fuldt point.

I nedenstående besvarelse sættes 28 ind som slutværdi, ligningen løses med CAS, og der skrives en konklusion med korrekt enhed (men med for mange betydende cifre).
Der mangler en forklaring på, hvorfor ligningen ser ud, som den gør.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b)

$$14 \cdot (1 + 0.07)^x = 28$$

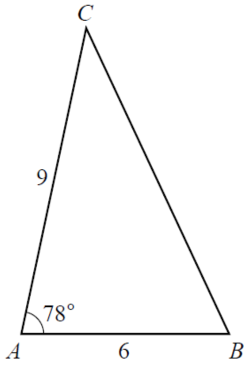
$\Updownarrow$ *The equation is solved for x by WordMat.*

$$x = 10{,}24477$$

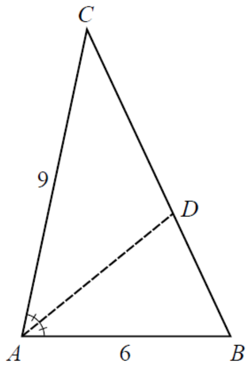
Det ville tage 10,24477 år at fordoble omsætningen, hvis væksten var en konstant 7%.

11.4.3 Opgave 8 - Geometri (Trekantskonstruktion)

Opgave 8



Figur 1



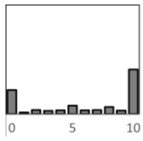
Figur 2

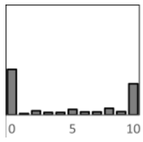
Figur 1 viser trekant ABC. Nogle af trekantens mål fremgår af figuren.

(10 point) a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC, og forklar konstruktionen.

Vinkelhalveringslinjen for A skærer siden BC i punktet D, se figur 2.

(10 point) b) Bestem længden af linjestykket BD.





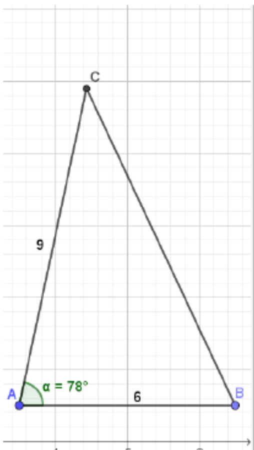
Spørgsmål 8a (pointgennemsnit: 6,1)
Størstedelen benytter GeoGebra til konstruktionen. Benyttes Nspire, har nogle elever svært ved at afsætte vinklen.
En del elever skriver ikke en konstruktionsforklaring, og en del elever sletter hjælpecirkler og hjælpelinjer og dokumenterer kun besvarelsen med et billede af selve trekanten. Hvis begge dele mangler, er det oftest umuligt (med mindre længder og vinkler vises med f.eks. 5 decimaler) at se, om konstruktionen er lavet korrekt. For at eleverne kan være sikre på at få de points, de faktisk har gjort sig fortjent til, er det derfor meget vigtigt, at konstruktionsobjekterne er synlige i besvarelsen. Det er desuden en fordel, hvis algebravinduet i GeoGebra er synligt.
Nogle elever lader CAS-værktøjets konstruktionsbeskrivelse være svaret på anden del af spørgsmålet ("forklar konstruktionen"). Dette vil sjældent være fyldestgørende og må frarådes.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse med en korrekt konstruktion og en god konstruktionsbeskrivelse. Det havde dog været bedre, om hjælpeobjekterne var forblevet synlige.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 8

a) Konstruér en målfast tegning af trekant ABC, og forklar konstruktionen.
- Her har jeg konstrueret en målfast tegning i GeoGebra og tilføjet en konstruktionsbeskrivelse.



Nr.	Navn	Beskrivelse	Værdi
1	Punkt A		A = (3, 1)
2	Punkt B	Punkt på Cirkel(A, 6)	B = (9, 1)
3	Linjestykk...	Linjestykke AB	f = 6
4	Cirkel c	Cirkel med center i A og radius 9	c: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2$...
5	Punkt B'	B drejet med vinklen 78°	B' = (4.25, 6.87)
6	Vinkel α	Vinkel BAB'	α = 78°
7	Linje g	Linje A, B'	g: -5.87x + 1.25y ...
8	Punkt C_1(1.13,	Skæringspunkt mellem c og g	C_1 = (1.13, -7.8)
8	Punkt C	Skæringspunkt mellem c og g	C = (4.87, 9.8)
9	Linjestykk...	Linjestykke AC	h = 9
10	Linjestykk...	Linjestykke CB	i = 9.72

figur 1 vider trekant ABC. nogle af trekantens mål fremgår af figuren

a) konstruér en måle fast tegning af trekant ABC og forkare konstruktionen

forklaring af hvad jeg gjorder

- insæt en halvlinge
- lav en cirkel med en radius på 6 og centrum skal værer punkt A
- efter finder du vinklenA der skal være 78 grader, ved at bruve vinkl værktøjet som skal bruges med den cirklel du laver efter
- lav en cirkel på punkt A, den cirkel du laver skal have en radius på 9
- efter laver du en trekant der samler alle tre punkter ABC

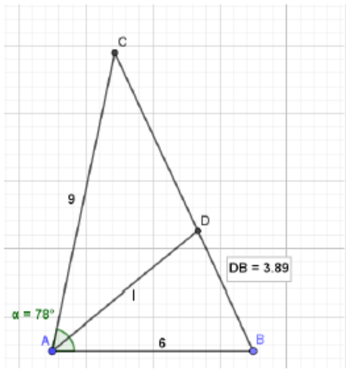
Spørgsmål 8b (pointgennemsnit: 4,5)
Opgaven løses typisk ved konstruktion.
Mange elever får ikke point i denne opgave. Nogle "vælger" blot et tilfældigt punkt som D, og en stor del skriver ikke en konstruktionsbeskrivelse. Dette er ganske vist ikke forlangt i opgaveteksten, men hører med til en god besvarelse af spørgsmålet.

I nedenstående eksempel ses en besvarelse med en korrekt konstruktion og med en afsluttende konklusion. Dog mangler konstruktionsbeskrivelsen, og hjælpeobjekterne er heller ikke synlige.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Bestem længden af linjestykket BD

- Her er vinkelhalveringslinjen indtegnet og længden af BD er fundet



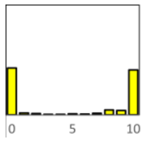
8	Punkt C_1(1.13,	Skæringspunkt mellem c og g	C_1 = (1.13, -7.8)
8	Punkt C	Skæringspunkt mellem c og g	C = (4.87, 9.8)
9	Linjestyk...	Linjestykke AC	h = 9
10	Linjestyk...	Linjestykke CB	i = 9.72
11	Linje j	Vinkelhalveringslinje mellem h og f	j: -0.63x + 0.78y ...
11	Linje k	Vinkelhalveringslinje mellem h og f	k: -0.78x - 0.63y ...
12	Punkt D	Fællesmængden mellem j og i	D = (7.35, 4.52)
13	Linjestyk...	Linjestykke AD	l = 5.6
14	Numeris...	Afstanden mellem D og B	afstandDB = 3.89
15	Tekst T...	Navn(D) + (Navn(B)) + " = " +	"DB = 3.89"

- Længden af BD=3,89

11.4.4 Opgave 9 - Sandsynlighedsregning. Oversættelse fra sprog til matematik.

Opgave 9 Nedenstående tabel viser alle gevinsterne i et spil og de tilhørende sandsynligheder.

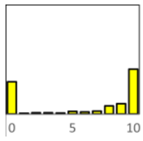
Gevinst (kr.)	2	100	300
Sandsynlighed	0,63	0,21	p



(10 point) a) Bestem sandsynligheden p.

Man kan beregne den gennemsnitlige gevinst i spillet ved først at gange hver gevinst med den tilhørende sandsynlighed og herefter lægge de tre resultater sammen.

(10 point) b) Beregn den gennemsnitlige gevinst i spillet ved at benytte den beskrevne metode.



Spørgsmål 9a (pointgennemsnit: 5,1)
Mange elever klarer denne opgave meget fint, mens en lige så stor del får 0 point, formentlig fordi de opgiver på forhånd, da opgaven handler om sandsynlighedsregning. Et godt råd er at huske eleverne på, at nogle spørgsmål i sandsynlighedsregning kan besvares ved brug af sund fornuft.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

a) Jeg ved at sandsynlighederne tilsammen skal give 1

Jeg opstiller derfor en ligning og finder *P*:

$$P = 1 - 0{,}63 - 0{,}21 = 0{,}16$$

Sandsynligheden *P* er lig med 0,16

Spørgsmål 9b (pointgennemsnit: 6,2)
En opgave der tester, at eleverne kan oversætte en sproglig beskrivelse til matematik.
En del svage elever klarer sig godt i opgaven.
Typisk beregnes hvert bidrag for sig, og til sidst lægges de tre bidrag sammen. Meget få elever beregner den gennemsnitlige gevinst med en enkelt beregning.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

b) Jeg ganger hver gevinst med den tilhørende sandsynlighed, som beskrevet i opgaven:

$$2 \cdot 0{,}63 = 1{,}26$$

$$100 \cdot 0{,}21 = 21$$

$$300 \cdot 0{,}16 = 48$$

Jeg lægger de tre resultater sammen, som beskrevet i opgaven:

$$1{,}26 + 21 + 48 = 70{,}26$$

Den gennemsnitlige gevinst i spillet er 70,26 kr.

11.4.5 Opgave 10 - Graftegning

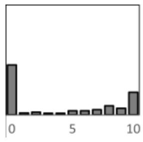
Opgave 10 Udviklingen i medicinindholdet i blodet efter indtagelse af en bestemt pille kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 300 \cdot (0{,}8^x - 0{,}7^x) \ ,$$

hvor $f(x)$ er medicinindholdet i blodet, målt i mikrogram pr. mL, og x er antal timer efter indtagelsen.

Sygeplejersken Amir ønsker sig en graf for medicinindholdet i blodet. Han skal kunne se på grafen, hvor stort medicinindholdet i blodet er, når der er gået mellem 0 og 24 timer efter indtagelsen.

(10 point) a) Tegn en sådan graf til Amir.



Spørgsmål 10a (pointgennemsnit: 4,2)

En graftegningsopgave, der vanskeliggøres af en kompliceret funktionsforskrift samt et krav til grafvinduet. Desuden er opgaven sat ind i en kontekst, hvilket gør det vanskeligere at afkode, hvad spørgsmålet går ud på.

En del elever har problemer med at skrive funktionsforskriften i CAS-værktøjet.
Mange tegner ikke grafen i et fornuftigt grafvindue, og hos en del kan man ikke se regneforskriften.
Opgaven er formuleret, så det ikke er et krav, at grafen kun tegnes i intervallet [0, 24], men hele grafen skal kunne ses i [0, 24], og da grafen skal kunne bruges af Amir, må enhederne på begge akser ikke være for store.

Et eksempel på en elevbesvarelse:

Opgave 10:

Udviklingen i medicinindholdet i blodet efter indtagelse af en bestemt pille kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 300 \cdot (0{,}8^x - 0{,}7^x)$$

hvor $f(x)$ er medicinindholdet i blodet, målt i mikrogram pr. mL, og x er antal timer efter indtagelsen.

Sygeplejersken Amir ønsker sig en graf for medicinindholdet i blodet. Han skal kunne se på grafen, hvor stort medicinindholdet i blodet er, når der er gået mellem 0 og 24 timer efter indtagelsen.

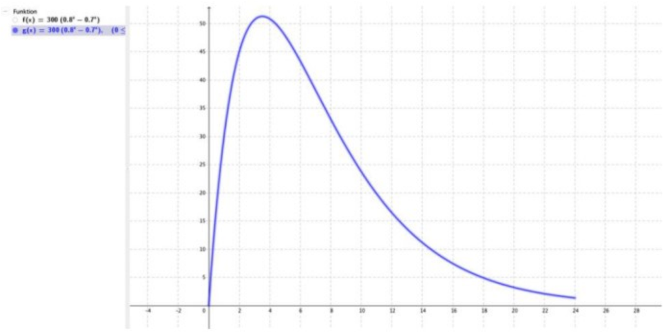
a) Tegn en sådan graf til Amir

Jeg indsætter funktionen i geogebra

$$f(x) = 300 \cdot (0{,}8^x - 0{,}7^x)$$

Derefter anvender jeg begrænsningsværktøjet on angiver min startværdi som er 0 og min slut værdi som er 24, da dette er det ønskede antal timer, Amir vil have oplyst i sin graf.

Til slut kan jeg slukke for den resterende graf så det kun er de ønskede antal timer, der er oplyst på grafen.



12 Opsamling på elevbesvarelserne af hf C-sættet

På baggrund af gennemgangen af elevbesvarelserne af de enkelte spørgsmål i sættene er det værd at fremhæve særligt fire forhold.

For det første er der mange af spørgsmålene, hvor en forholdsvis stor andel af eleverne får 0 point. Det er synd, især hvis det skyldes, at elever opgiver undervejs i sættet og ikke forsøger sig med de sidste opgaver. Et godt råd til eleverne er at læse alle opgaverne igennem (særligt de grønne), også selvom de står langt henne i sættet, så tilgængelige point ikke mistes. Derudover bør eleverne også rådes til at forsøge at skrive lidt fornuftigt til alle spørgsmålene, også selvom de ikke har et fuldendt svar. Et eksempel på dette kunne være spørgsmål 3a) omhandlende ligningsløsning, hvor der kan være point at hente, selvom man laver (flere) fejl undervejs og ender med et forkert resultat.

For det andet indeholdt dette sæt, ligesom de seneste eksamenssæt ofte har gjort det, spørgsmål omhandlende trekantskonstruktion, regression og graftegning – det er normalt forholdsvis nemme spørgsmål for mange elever, hvis de har øvelse i brugen af deres digitale hjælpemidler. Det kan måske derfor være værd at lade de fagligt svageste elever træne disse opgaver ekstra meget.

For det tredje er det ærgerligt, at spørgsmål 2b), hvor regneforskriften for en ret linje gennem to punkter skal bestemmes, volder en ikke ubetydelig andel af eleverne store problemer. Spørgsmålet hører til blandt de mest grundlæggende opgavetyper i emnet *Rette linjer*, og pointfordelingen viser tydeligt, at man ikke for ofte kan øve selv de mest basale formler og egenskaber hørende til de simple vækstmodeller.

I forlængelse af ovenstående er det for det fjerde værd at bemærke, at det spørgsmål, der falder sværest ud i sættet, er spørgsmål 4a), hvor konstanterne i en eksponentiel udvikling skal fortolkes. Det er særligt fortolkningen af fremskrivningsfaktoren, der giver problemer for eleverne.

BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET