



UNDERVISNINGS
MINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematisk formelsamling 2. udg.

Hf
B-niveau

juni 2018

Denne udgave af Matematisk formelsamling Hf B-niveau er udgivet af Undervisningsministeriet og gjort tilgængelig på uvm.dk.

Formelsamlingen er udarbejdet i et samarbejde mellem Matematiklærerforeningen og Undervisningsministeriet, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, maj 2018

Kopiering til andet end personlig brug må kun ske efter aftale med Copy-Dan.

ISBN:
978-87-603-3182-4

Forfattere: Gert Schomacker, Jesper Bang-Jensen, Bodil Bruun og Jørgen Dejgaard

februar 2019

Forord:

”Matematisk formelsamling HF B” er udarbejdet til brug for eksaminanderne ved den skriftlige prøve og i undervisningen på hf i matematik på B-niveau.

Formelsamlingen indeholder de emner, der forekommer i læreplanen for matematik på B-niveau på hf inden for både kernestof og supplerende stof.

For overblikkets skyld er medtaget formler for areal og rumfang af en række elementærgeometriske figurer.

Endvidere indeholder formelsamlingen en liste over matematiske standardsymboler.

Hensigten hermed er dels at give eleverne et hurtigt overblik, dels at bidrage til, at undervisere og forfattere af undervisningsmaterialer kan anvende ensartet notation, symbolsprog og terminologi. Listen over matematiske standardsymboler går derfor ud over kernestoffet, men holder sig dog inden for det matematiske univers i gymnasiet og på hf.

En række af formlerne i formelsamlingen er kun anvendelige under visse forudsætninger (fx at nævneren i en brøk er forskellig fra 0). Sådanne forudsætninger er af hensyn til overskueligheden ikke eksplicit nævnt.

Figurerne er medtaget som illustration til formlerne, og den enkelte figur anskueliggør ofte ét blandt flere mulige tilfælde.

Betydningen af de størrelser, der indgår i formlerne, er ikke altid forklaret, men vil dog være det i tilfælde, hvor betydningen ikke følger umiddelbart af skik og brug i den matematiske litteratur.

Birte Iversen

Undervisningsministeriet,
Styrelsen for Undervisning og Kvalitet,
Kontor for Prøver, Eksamen og Test
juni 2018

Indhold

Procent- og rentesregning	5
Indekstal	5
Proportionalitet	6
Brøkregler	6
Kvadratsætninger	7
Potensregneregler	7
Ensvinklede trekanter	8
Retvinklet trekant	8
Vilkårlig trekant	9
Analytisk geometri	10
Lineære sammenhænge	13
Andengradspolynomier	14
Logaritmefunktioner	15
Eksponentielt voksende funktioner	16
Eksponentielt aftagende funktioner	17
Potensfunktioner	18
Trigonometriske funktioner	19
Differentialregning	20
Afledede funktioner	21
Grupperede observationer	22
Ugrupperede observationer	23
Lineær regression	25
Kombinatorik	26
Sandsynlighedsregning	27
Binomialfordelingen	28
Pascals trekant	30
Multiplikationstabel	31
Areal og omkreds, rumfang og overflade	32
Matematiske standardsymboler	33
Stikordsregister	38

Procent- og rentesregning

Begyndelsesværdi B
Slutværdi S

$$(1) \quad S = B \cdot (1 + r)$$

Vækstrate r

$$(2) \quad r = \frac{S}{B} - 1$$

Procentvis ændring p

$$(3) \quad p\% = r \cdot 100\%$$

Kapitalformel
Startkapital K_0
Rente $p\%$ pr. termin
Kapital K efter n terminer

$$(4) \quad K = K_0 \cdot (1 + r)^n, \text{ hvor } r = \frac{p}{100}$$

Annuitetsopsparing
Terminsindbetaling b
Rentefod r
Antal indbetalinger n
Kapital A efter sidste indbetaling

$$(5) \quad A = b \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Annuitetslån
Hovedstol G
Rentefod r
Antal terminsydelsers n
Terminsydelse y

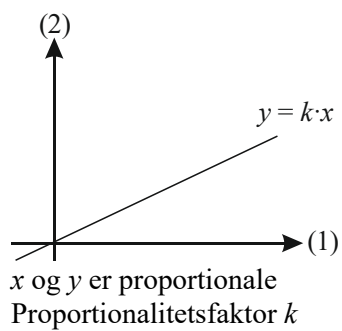
$$(6) \quad y = G \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

Indekstal

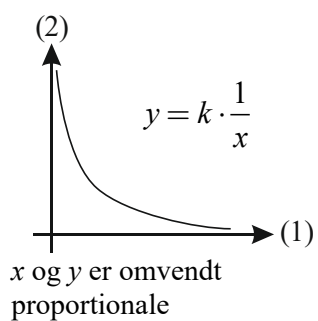
Værdi	B	S
Indekstal	I_B	I_S

$$(7) \quad I_S = \frac{S}{B} \cdot I_B \quad S = \frac{I_S}{I_B} \cdot B$$

Proportionalitet



$$(8) \quad y = k \cdot x \quad \frac{y}{x} = k$$



$$(9) \quad y = k \cdot \frac{1}{x} \quad x \cdot y = k$$

Brøkregler

$$(10) \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

$$(11) \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$(12) \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$(13) \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$(14) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Kvadratsætninger

$$(15) \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

$$(16) \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$$

$$(17) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Potensregneregler

$$(18) \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(19) \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(20) \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(21) \quad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$(22) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$(23) \quad a^0 = 1$$

$$(24) \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$(25) \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(26) \quad \sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$$

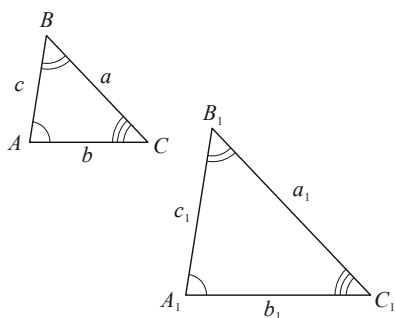
$$(27) \quad \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

$$(28) \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$(29) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(30) \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

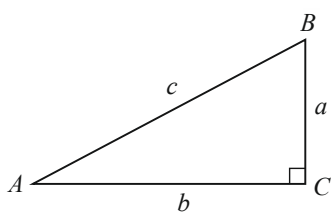
Ensvinklede trekanter



$$(31) \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

$$(32) \quad \begin{aligned} a_1 &= k \cdot a \\ b_1 &= k \cdot b \\ c_1 &= k \cdot c \end{aligned}$$

Retvinklet trekant



Pythagoras' sætning

$$(33) \quad c^2 = a^2 + b^2$$

cosinus

$$(34) \quad \cos(A) = \frac{b}{c}$$

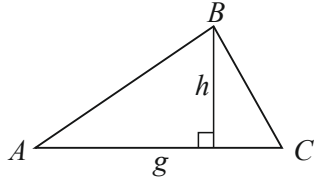
sinus

$$(35) \quad \sin(A) = \frac{a}{c}$$

tangens

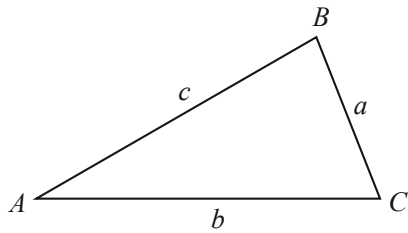
$$(36) \quad \tan(A) = \frac{a}{b}$$

Vilkårlig trekant



Trekantens vinkelsum (37) $A + B + C = 180^\circ$

Trekantens areal T (38) $T = \frac{1}{2}h \cdot g$

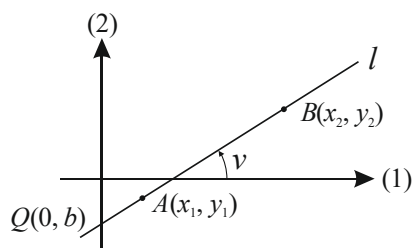


cosinusrelation (39) $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(C)$

sinusrelation (40) $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

Trekantens areal T (41) $T = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin(C)$

Analytisk geometri



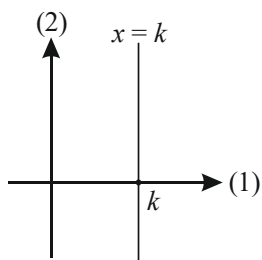
Ligning for linjen l gennem $Q(0, b)$ med hældningskoefficient a (42) $y = a \cdot x + b$

Hældningskoefficient (stigningstal) a for linjen l gennem $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ (43) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

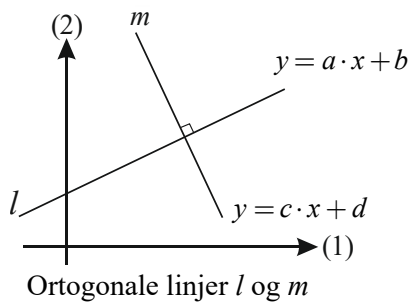
Skæring med y -aksen (44) $b = y_1 - a \cdot x_1$

Ligning for linjen l gennem $A(x_1, y_1)$ med hældningskoefficient a (45) $y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

Hældningsvinklen v er vinklen fra førsteaksen til l regnet med fortegn (46) $a = \tan(v)$

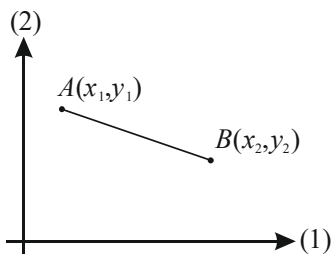


Ligning for lodret linje (47) $x = k$



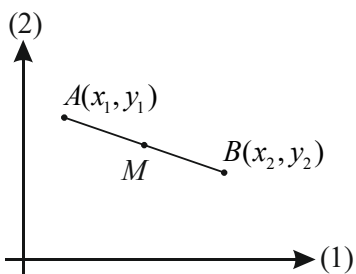
Ortogonale linjer l og m

$$(48) \quad l \perp m \Leftrightarrow a \cdot c = -1$$



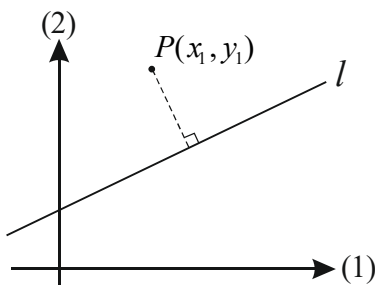
Afstand $|AB|$ mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$

$$(49) \quad |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



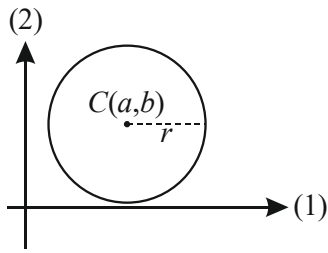
Midtpunkt M for linjestykke AB

$$(50) \quad M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



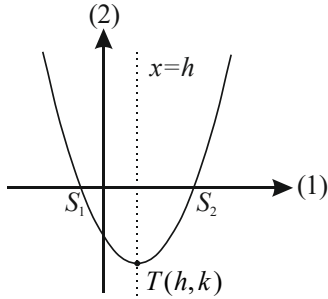
Afstand $\text{dist}(P, l)$ fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen l med ligningen $y = a \cdot x + b$

$$(51) \quad \text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



Ligning for cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r

$$(52) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Ligning for parabel med symmetriakse parallel med andenaksen

$$(53) \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - h)^2 + k$$

Toppunkt T

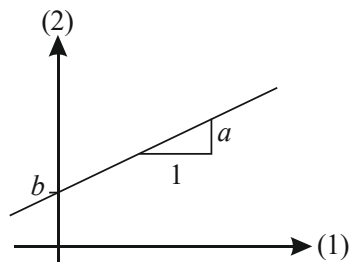
$$(54) \quad T(h, k) = T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right),$$

hvor $d = b^2 - 4ac$

Skæringspunkter S_1 og S_2 med førsteaksen

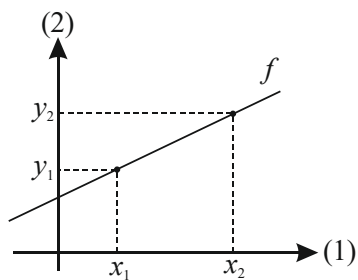
$$(55) \quad S_1\left(\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, 0\right), S_2\left(\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, 0\right)$$

Lineære funktioner



Førstegradspolynomium,
lineær funktion f

$$(56) \quad f(x) = a \cdot x + b$$



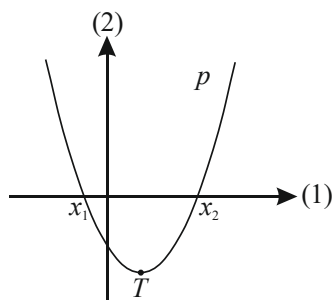
Hældningskoefficienten a
(stigningstallet)
ud fra 2 punkter på grafen
 (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$$(57) \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Skæring med y -aksen

$$(58) \quad b = y_1 - a \cdot x_1$$

Andegradspolynomier



Andegradspolynomium p
med nulpunkter (rødder)
 x_1 og x_2

$$(59) \quad \begin{aligned} p(x) &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \end{aligned}$$

Nulpunkter (rødder) i p

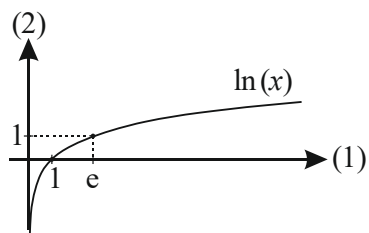
$$(60) \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a},$$

hvor $d = b^2 - 4ac$

Toppunkt T

$$(61) \quad T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$$

Logaritmefunktioner



Grafen for den naturlige
logaritmefunktion

$$(62) \quad \ln(x) \rightarrow -\infty \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

$$(63) \quad \ln(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

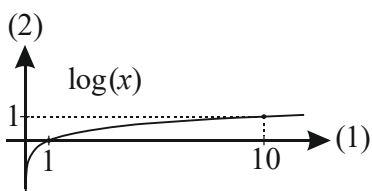
$$(64) \quad y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

$$(65) \quad \ln(e) = 1$$

$$(66) \quad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(67) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(68) \quad \ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$$



Grafen for logaritme-
funktionen med grundtal 10

$$(69) \quad \log(x) \rightarrow -\infty \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

$$(70) \quad \log(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(71) \quad y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$$

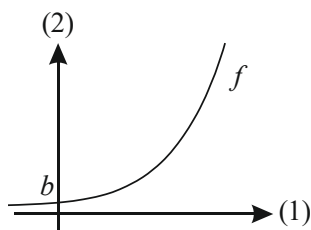
$$(72) \quad \log(10) = 1$$

$$(73) \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$(74) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$(75) \quad \log(a^r) = r \cdot \log(a)$$

Ekspontielt voksende funktioner



Grafen for en eksponentielt voksende funktion f

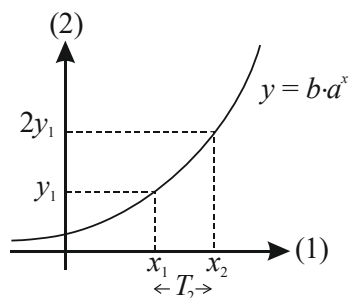
$$a > 1$$

vækstraten $r > 0$

$$k > 0$$

Fremskrivningsfaktoren a ud fra 2 punkter på grafen (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Skæring med y -aksen



Fordoblingskonstanten T_2

$$\begin{aligned} (76) \quad f(x) &= b \cdot a^x \\ &= b \cdot (1+r)^x \\ &= b \cdot e^{k \cdot x}, \text{ hvor } k = \ln(a) \end{aligned}$$

$$(77) \quad f(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(78) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow -\infty$$

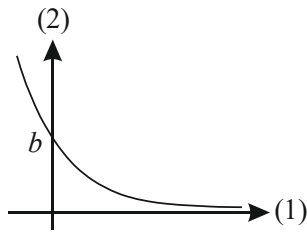
$$(79) \quad a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$

$$(80) \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

$$(81) \quad T_2 = x_2 - x_1$$

$$(82) \quad T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Ekspontielt aftagende funktioner



Grafen for en eksponentielt aftagende funktion f

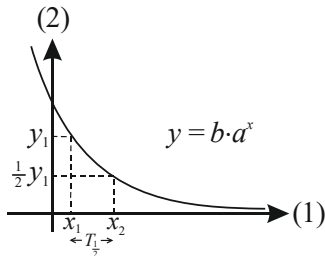
$$0 < a < 1$$

vækstraten $r < 0$

$$k < 0$$

Fremskrivningsfaktoren a
ud fra 2 punkter på grafen
 (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

Skæring med y-aksen



Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$

$$(83) \quad \begin{aligned} f(x) &= b \cdot a^x \\ &= b \cdot (1+r)^x \\ &= b \cdot e^{k \cdot x}, \text{ hvor } k = \ln(a) \end{aligned}$$

$$(84) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(85) \quad f(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow -\infty$$

$$(86) \quad a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$

$$(87) \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

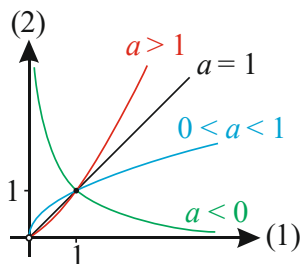
$$(88) \quad T_{\frac{1}{2}} = x_2 - x_1$$

$$(89) \quad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$$

Potensfunktioner

Potensfunktion

$$(90) \quad f(x) = b \cdot x^a$$



Grafer for $f(x) = x^a$

Bestemmelse af tallet a
ud fra to punkter på grafen
 (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$$(91) \quad a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)}$$

$$(92) \quad b = \frac{y_1}{x_1^a}$$

Når x ganges med tallet $1 + r_x$,
så ganges $f(x)$ med tallet $1 + r_y$

$$(93) \quad 1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

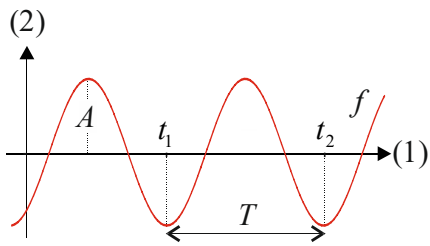
Når x ganges med tallet k ,
så ganges $f(x)$ med tallet k^a

$$(94) \quad f(k \cdot x) = k^a \cdot f(x)$$

Trigonometriske funktioner

Harmonisk svingning f

$$(95) \quad f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



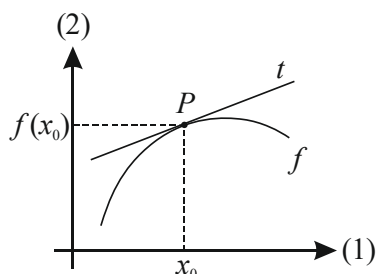
Graf for harmonisk svingning f
med amplitude A og periode
(svingningstid) T

$$(96) \quad T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Differentialregning

Differentialkvotienten $f'(x_0)$
for funktionen f i tallet x_0

$$(97) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Ligning for tangenten t til
grafen for f i $P(x_0, f(x_0))$

$$(98) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ \text{eller} \\ y = a \cdot x + b, \\ \text{hvor } a = f'(x_0) \text{ og } b = y_0 - a \cdot x_0$$

Regneregler for differentiation

$$(99) \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(100) \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(101) \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(102) \quad (f(x) \cdot g(x))' = \\ f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

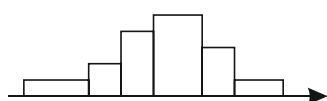
$$(103) \quad (f(a \cdot x + b))' = a \cdot f'(a \cdot x + b)$$

Afledede funktioner

		Funktion $y = f(x)$	Afledet funktion $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Lineær funktion	(104)	$a \cdot x + b$	a
	(105)	k	0
Logaritmefunktion	(106)	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Ekspontialfunktioner	(107)	e^x	e^x
	(108)	e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
	(109)	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(110)	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
	(111)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
	(112)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(113)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(114)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

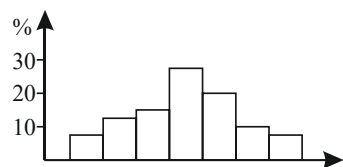
Grupperede observationer

□ 10%



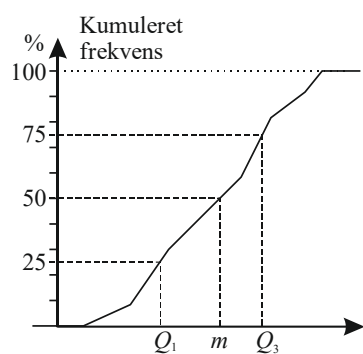
Histogram

(115) Arealet af en blok svarer til intervallets frekvens



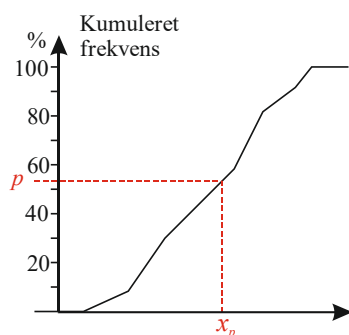
Histogram med ens intervallængder

(116) Højden af en blok svarer til intervallets frekvens

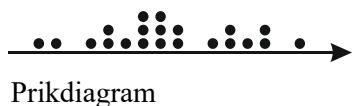


Sumkurve

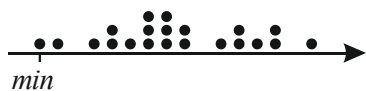
(117) Q_1 : nedre kvartil, 25% -fraktilen
 m : median, 50% -fraktilen
 Q_3 : øvre kvartil, 75% -fraktilen
 x_p : $p\%$ -fraktilen



Ugrupperede observationer



(118) Observationerne afsat på en tallinje



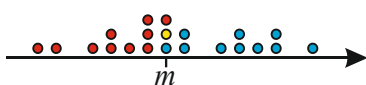
(119) min : mindste observation



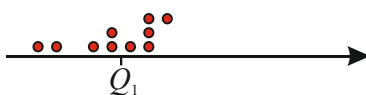
(120) max : største observation

Variationsbredde

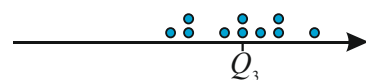
(121) $max - min$



(122) m : median
(midterste observation, når antallet af observationer er ulige, ellers tallet midt mellem de to midterste observationer)



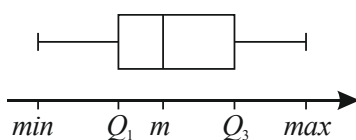
(123) Q_1 : nedre kvartil
(medianen for den nederste halvdel af observationerne)



(124) Q_3 : øvre kvartil
(medianen for den øverste halvdel af observationerne)

Kvartilbredde

(125) $Q_3 - Q_1$



(126) Boksplot, kassediagram
(boksens højde er uden betydning)

Kvartilsæt

(127) (Q_1, m, Q_3)

Udvidet kvartilsæt

(128) (min, Q_1, m, Q_3, max)

Outlier

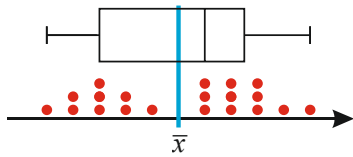
(129) Observation, der ligger mere end halvanden kvartilbredde under nedre kvartil eller mere end halvanden kvartilbredde over øvre kvartil

Middeltal \bar{x} for observations-sættet x_1, x_2, \dots, x_n

$$(130) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

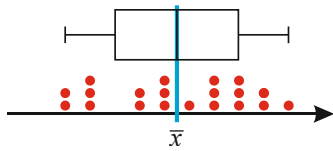
Spredning for observations-sættet x_1, x_2, \dots, x_n

$$(131) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$



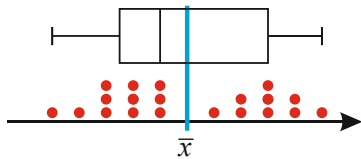
Venstreskæv fordeling

(132) Middeltal mindre end medianen $\bar{x} < m$



Ikke-skæv fordeling

(133) Middeltal lig med medianen $\bar{x} = m$



Højreskæv fordeling

(134) Middeltal større end medianen $\bar{x} > m$

Estimat af middelværdi og spredning for en population ud fra en stikprøve

x_1, x_2, \dots, x_n

Estimat \bar{x} af middelværdien

$$(130a) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Estimat s for spredningen

$$(131a) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Lineær regression

Tabel med observerede data

(135)

x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_n

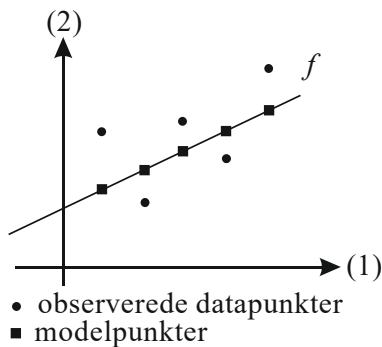
Regressionslinje

(136)

Bedste rette linje, graf for
 $f(x) = a \cdot x + b$

Punktplot og bedste rette linje

(137)



Residual

(138)

Forskel mellem observeret y -værdi og tilsvarende y -værdi i model

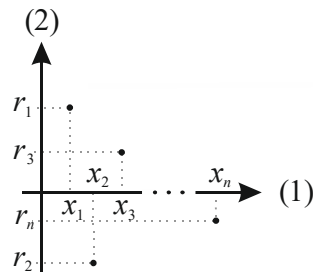
Residualtabel

(139)

x	x_1	x_2	\dots	x_n
Residual	$r_1 = y_1 - f(x_1)$	$r_2 = y_2 - f(x_2)$	\dots	$r_n = y_n - f(x_n)$

Residualplot

(140)



Residualspredning

(141)

$$s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n-2}}$$

Kombinatorik

Multiplikationsprincip

Antal mulige måder at vælge både ét element fra N og et element fra M , hvor N består af n elementer og M består af m elementer

$$(142) \quad n \cdot m$$

Additionsprincip

Antal mulige måder at vælge enten ét element fra N eller ét element fra M , hvor N består af n elementer og M består af m elementer

$$(143) \quad n + m$$

Fakultet

$$(144) \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Permutationer

Antal muligheder for udvælgelse af r elementer blandt n elementer, når rækkefølgen har betydning

$$(145) \quad P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kombinationer

Antal muligheder for udvælgelse af r elementer blandt n elementer, når rækkefølgen ikke har betydning

$$(146) \quad K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Sandsynlighedsregning

Sandsynlighedsfelt med udfaldsrum U og sandsynligheder p (147) (U, p)

Udfaldsrum U med n udfald (148) Mængden af alle udfald $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Summen af alle sandsynligheder (149) $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

Sandsynlighedstabel

(150)

Udfald	u_1	u_2	u_3	...	u_n
Sandsynlighed	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Hændelse A med k udfald fra U (151) Mængde af k udfald fra U

Sandsynlighed for hændelse A (152) Summen af de k udfalds sandsynligheder

Symmetrisk sandsynlighedsfelt

Alle sandsynligheder er lige store (153) $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$

Sandsynlighed for udvælgelse af et element fra A (154) $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$

Sandsynlighed ved kombination af uafhængige hændelser A og B (155) $P(\text{både } A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$

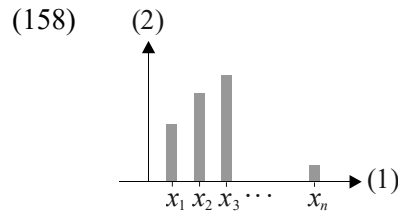
Sandsynlighed ved kombination af hændelser A og B , som ikke har noget fælles udfald (156) $P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B)$

Sandsynlighedsfordelings-
tabel for en stokastisk
variabel X

(157)

x_i	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	\dots	p_n

Søjlediagram.
Højde af søjle svarer til
sandsynlighed af udfald



Middelværdi af en
stokastisk variabel X

(159)

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

$$= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Varians af en stokastisk
variabel X

(160)

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

$$= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$$

Spredning af en stokastisk
variabel X

(161)

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Binomialfordeling

Binomialfordelt stokastisk
variabel X med
antalsparameter n og
sandsynlighedsparameter p

(162)

$$X \sim b(n, p)$$

Binomialkoefficient $K(n, r)$

(163)

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(164)

$$K(n, r) = K(n, n-r)$$

Sandsynlighedsfunktion for
binomialfordelt stokastisk
variabel X

(165)

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Middelværdi μ

(166)

$$\mu = n \cdot p$$

Spredning σ

(167)

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Statistisk usikkerhed i stikprøver

Antal elementer i stikprøven n

95% konfidensinterval for
populationens
sandsynlighedsparameter p
estimeret ud fra
stikprøveandelen \hat{p}

$$(168) \left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} ; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

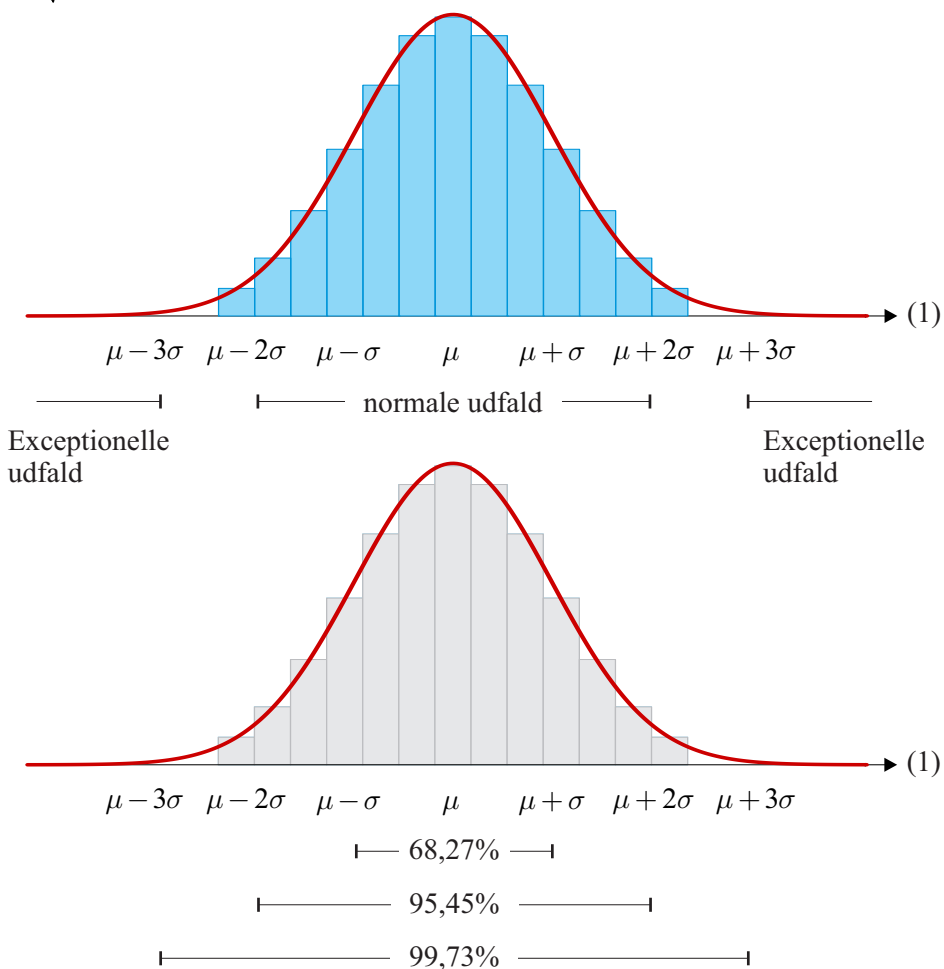
Normalfordelingsapproximation
til binomialfordelt stokastisk
variabel X med middelværdi

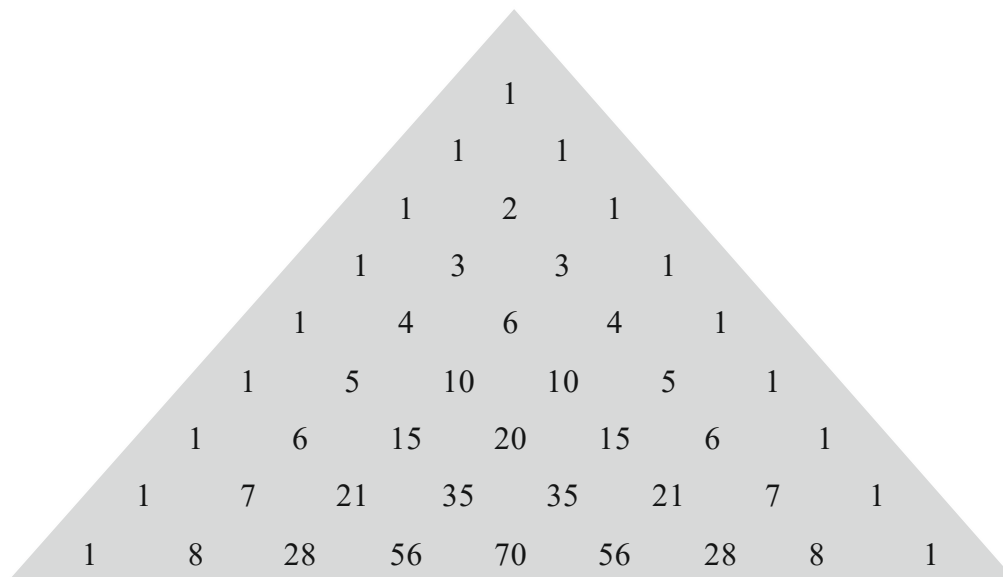
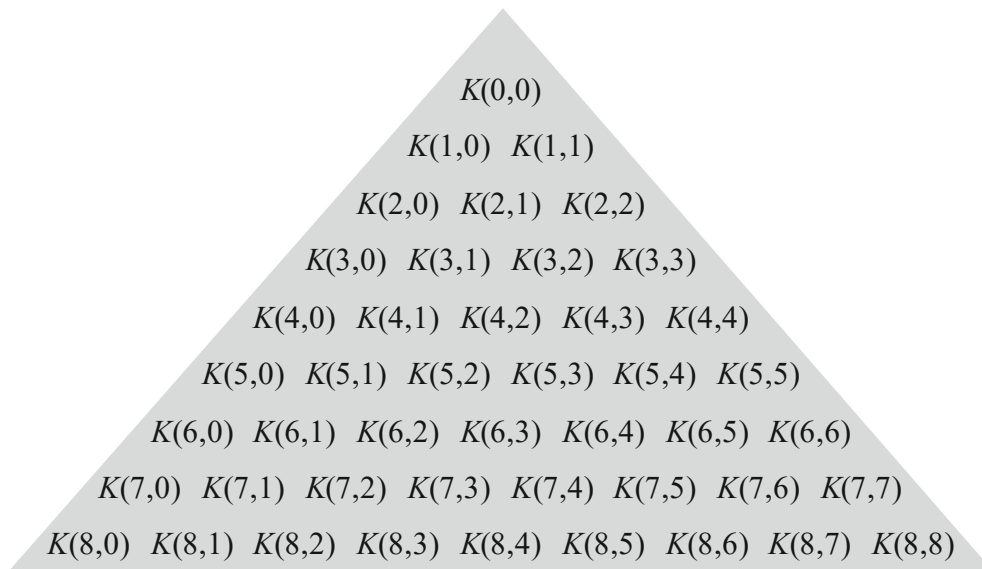
$$(169)$$

$$\mu = n \cdot p$$

og spredning

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$





Multiplikationstabel

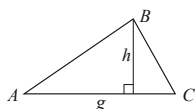
(171)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

Røde tal: Kvadrattal

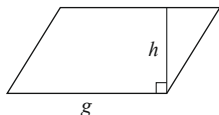
Areal og omkreds, rumfang og overflade af geometriske figurer

Trekant



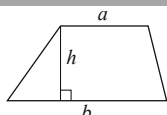
h	højde	
g	grundlinje	
A	areal	$A = \frac{1}{2} h \cdot g$

Parallelogram



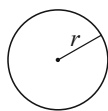
h	højde	
g	grundlinje	
A	areal	$A = h \cdot g$

Trapez



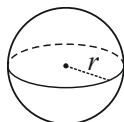
h	højde	
a, b	parallelle sider	
A	areal	$A = \frac{1}{2} h \cdot (a + b)$

Cirkel



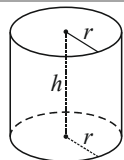
r	radius	
A	areal	$A = \pi r^2$
O	omkreds	$O = 2\pi r$

Kugle



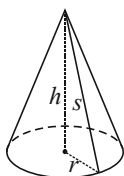
r	radius	
O	overflade	$O = 4\pi r^2$
V	rumfang	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Cylinder



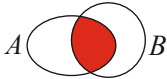
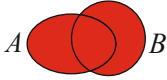
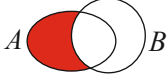
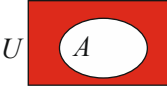

h	højde	
r	grundfladeradius	
O	krum overflade	$O = 2\pi r \cdot h$
V	rumfang	$V = \pi r^2 \cdot h$

Kegle



h	højde	
s	sidelinje	
r	grundfladeradius	
O	krum overflade	$O = \pi r \cdot s$
V	rumfang	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Matematiske standardsymboler

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\{.,.,.,.\}$	mængde på listeform	$\{-5, 0, 3, 10\}, \{2, 4, 6, \dots\}, \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
\mathbb{N}	mængden af naturlige tal	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	mængden af hele tal	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Q}	mængden af rationale tal	tal, der kan skrives $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}	mængden af reelle tal	
\in	tilhører / er element i	$2 \in \mathbb{N}$
$[a; b]$	lukket interval	$[1; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
$]a; b]$	halvåbent interval	$]1; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$
$[a; b[$	halvåbent interval	$[1; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$
$]a; b[$	åbent interval	$]1; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
\subset	er en ægte delmængde af	$\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$
\cap	fællesmængde	$A \cap B$ 
\cup	Foreningsmængde	$A \cup B$ 
\setminus	mængdedifferens	$A \setminus B$ 
\bar{A}	komplementærmængde	$U \setminus A$ 
\emptyset	den tomme mængde	
	disjunkte mængder	$A \cap B = \emptyset$ 
\times	mængdeprodukt	$[-10; 10] \times [-10; 10]$ benyttes til at angive et grafvindue
\wedge	”og” i betydningen ”både og” (konjunktion)	$x < 2 \wedge y = 5$
\vee	”eller” i betydningen ”og/eller” (disjunktion)	$x < 2 \vee x > 5$

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
\Rightarrow	"medfører", "hvis ... så" (implikation)	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
\Leftrightarrow	"ensbetydende", "hvis og kun hvis" (biimplikation)	$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$\sum_{i=1}^4 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
$n!$	n fakultet, n udråbstegn	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ for $n \geq 1$ $0! = 1$
$f(x)$	funktionsværdi af x ved funktionen f	$f(x) = \sqrt{2x+1}$, så er $f(4) = 3$.
$Dm(f)$	definitionsområdet for f	
$Vm(f)$	værdimængden for f	
$\log(x)$	logaritmfunktionen med grundtal 10	$y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$
$\ln(x)$	den naturlige logaritme-funktion	$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$
e^x	den naturlige eksponential-funktion	e^x betegnes også $\exp(x)$
a^x	eksponentialfunktionen med grundtal a , $a > 0$	$b \cdot a^x$ kaldes undertiden for en eksponentialfunktion eller en eksponentiel udvikling
x^a	potensfunktion	$b \cdot x^a$ kaldes undertiden for en potensfunktion eller en potensudvikling
$ x $	numerisk (absolut) værdi af x	$ 3 = 3$, $ -7 = 7$ $ x $ betegnes også $\text{abs}(x)$
$\sin(x)$	sinus	
$\cos(x)$	cosinus	
$\tan(x)$	tangens	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\sin^{-1}(y)$	omvendt funktion til sinus	$\sin^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sin(x) = y$ $\sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$ \sin^{-1} betegnes også Arcsin
$\cos^{-1}(y)$	omvendt funktion til cosinus	$\cos^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cos(x) = y$ $\cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$ \cos^{-1} betegnes også Arccos
$\tan^{-1}(y)$	omvendt funktion til tangens	$\tan^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \tan(x) = y$ $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ \tan^{-1} betegnes også Arctan
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod x_0	$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
$f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow x_0$	$f(x)$ går mod a for x gående mod x_0	$\sqrt{x+1} \rightarrow 2$ for $x \rightarrow 3$
$f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow \infty$	$f(x)$ går mod a for x gående mod ∞	$e^{-x} \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$
Δx	x -tilvækst	$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y, \Delta f$	funktionstilvækst for $y = f(x)$	$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta f}{\Delta x}$	differenskvotient for $y = f(x)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$f'(x_0)$	differentialkvotienten for $y = f(x)$ i x_0	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
f'	afledet funktion af $y = f(x)$	betegnes $f'(x)$, y' , $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $(\sqrt{3x^2+1})'$
$f^{(n)}$	den n 'te afledede funktion af $y = f(x)$	$f^{(2)}(x)$ skrives ofte $f''(x)$, y'' eller $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
--------	-----------	------------------------------

AB linjestykket AB

$|AB|$ længden af linjestykket AB

\widehat{AB} cirkelbuen \widehat{AB}

$|\widehat{AB}|$ længden af cirkelbuen \widehat{AB}

\parallel ”er parallel med”

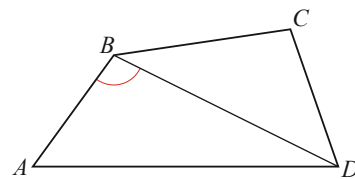
\perp ”er vinkelret på”

$\angle A$ vinkel A

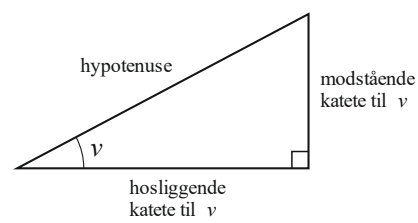
$l \perp m$ læses også
” l og m er ortogonale”

$\angle A = 110^\circ$ eller $A = 110^\circ$

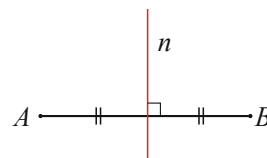
$\angle ABD$ vinkel B i trekant ABD



retvinklet trekant

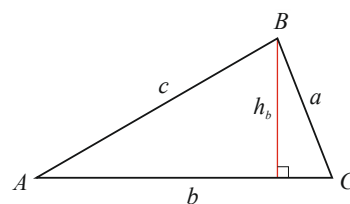


midtnormalen n
for linjestykket AB



h_b

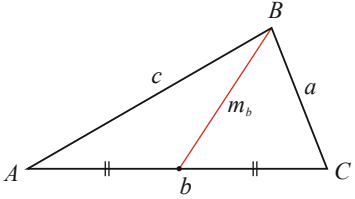
højden fra B på siden b eller
dens forlængelse



Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
--------	-----------	------------------------------

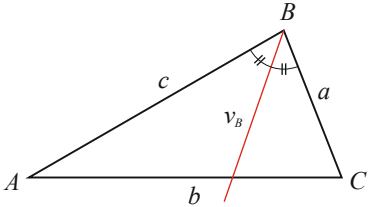
m_b

medianen fra B på siden b

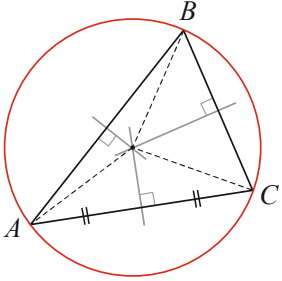


v_B

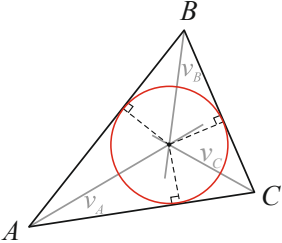
vinkelhalveringslinjen for vinkel B



trekant ABC 's omskrevne cirkel



trekant ABC 's indskrevne cirkel



Stikordsregister

A	additionsprincip	26	G	grupperede observationer	22
	afledet funktion	21, 35		grænseværdi	35
	afstand mellem		H	halveringskonstant	17
	- punkter	11		harmonisk svingning	19
	- punkt og linje	11		histogram	22
	amplitude	19		hældningskoefficient	10, 13
	andengradspolynomier	14		hændelse	27
	annuitetslån	5		højde	32, 36
	annuitetsopsparing	5		højreskæv	24
	areal		I	ikke-skæv	24
	- af cirkel	32		indekstal	5
	- af parallelogram	32		indskreven cirkel	37
	- af trekant	9, 32	K	kapitalformel	5
	- af trapez	32		kegle	32
B	binomialkoefficient	28		kombinationer	26
	boksplot	23		konfidensinterval	29
	brøkregler	6		kugle	32
C	cirkel	12, 32		kvadratsætninger	7
	cosinus	8, 34		kvartil	22, 23
	cosinusrelation	9	L	lineær funktion	13
	cylinder	32		lineær regression	25
D	differenskvotient	35		linjens ligning	10
	differentialkvotient	20, 35		lodret linje	10
E	eksponentialfunktioner			logaritmefunktioner	15
	- aftagende	17		logaritmeregneregler	15
	- voksende	16	M	median (trekant)	37
	ensvinklede trekanter	8		median (statistik)	22, 23, 24
F	fakultet	26, 34		middeltal	24
	fordoblingskonstant	16		middelværdi	28
	fremskrivningsfaktor	16, 17		midtnormal	36
	førstegradspolynomium	13		midtpunkt	11
				multiplikationsprincip	26

N	nedre kvartil	22, 23	S	sandsynlighed	27, 28, 29
	normalfordelingen	29		sinus	8, 34
	nulpunkt	14		sinusrelation	9
O	omskreven cirkel	37		skalafaktor	8
	omvendt proportionalitet	6		spredning	24, 28, 29
	ortogonale linjer	11		stokastisk variabel	28, 29
	overflade af			stokastisk usikkerhed	29
	- cylinder	32		sumkurve	22
	- kegle	32		symboler	33
	- kugle	32		søjlediagram	28
	outlier	24	T	tangens	8, 34
P	parabel	12		tangent til graf	20
	parallelogram	32		toppunkt	12, 14
	Pascals trekant	30		trapez	32
	$p\%$ -fraktil	22		trigonometriske funktioner	19, 21
	permutationer	26	U	uafhængige hændelser	27
	potensfunktion	18, 21, 34		udfaldsrum	27
	potensregneregler	7		udvidet kvartilsæt	23
	prikdiagram	23		ugrupperede observationer	23
	procentregning	5	V	variationsbredde	23
	proportionalitet	6		varians	28
	Pythagoras' sætning	8		venstreskæv	24
R	regneregler for differentiation	20		vinkelsum i trekant	9
	regression, lineær	25		vilkårlig trekant	9
	regressionslinje	25		vinkelhalveringslinje	37
	residual	25		vinkler	36
	residualspredning	25		vækstrate	5, 16, 17
	retvinklet trekant	8, 36	Ø	øvre kvartil	22, 23
	rod, rødder	14			
	rumfang af				
	- cylinder	32			
	- kegle	32			
	- kugle	32			

