Matematik B – Htx
Vejledning / Råd og vink
Kontor for Gymnasiale Uddannelser 2014

Alle bestemmelser, der er bindende for undervisningen og prøverne i de gymnasiale uddannelser, findes i uddannelseslovene og de tilhørende bekendtgørelser, herunder læreplanerne. Denne Vejledning/Råd og vink indeholder forklarende kommentarer til nogle af disse bestemmelser, men indfører ikke nye bindende krav. Desuden gives eksempler på god praksis samt anbefalinger og inspiration, og den udgør dermed et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse.
Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Indhold

Indhold

Læreplanen

Som underviser i matematik på htx er det væsentligt, at man sætter sig godt ind i fagets læreplan. Alle læreplaner er bygget op på samme måde: Først kommer afsnittene om fagets identitet og formål, og herefter følger de nok mest læste afsnit, der handler om fagets mål, og hvordan man kan opfylde disse mål gennem det fastsatte kernestof og det supplerende stof. Derefter beskrives undervisningens tilrettelæggelse f.eks. arbejdsformer, brug af hjælpemidler, og hvordan faget kan spille sammen med andre fag. Endelig sluttes af med et afsnit om evaluering herunder eksamen og bedømmelseskrav. Sidstnævnte hænger nøje sammen med de faglige krav, som er beskrevet tidligere i læreplanen.
Imidlertid er læreplanen relativt kortfattet formulere, og der kan være usikkerhed om tolkningen af forskellige begreber: Hvad forstås ved analytisk plangeometri, herunder anvendelse af simple analytiske beregningsmetoder? Hvilke rumlige figurer, bør der arbejdes med? Hvilke typer projekter kan bruges? Hvordan ser et mundtligt eksamensspørgsmål ud? etc. Det er spørgsmål som disse, der kan findes svar på i nærværende dokument.

Denne vejledning skal ses i sammenhæng med følgende bekendtgørelser:

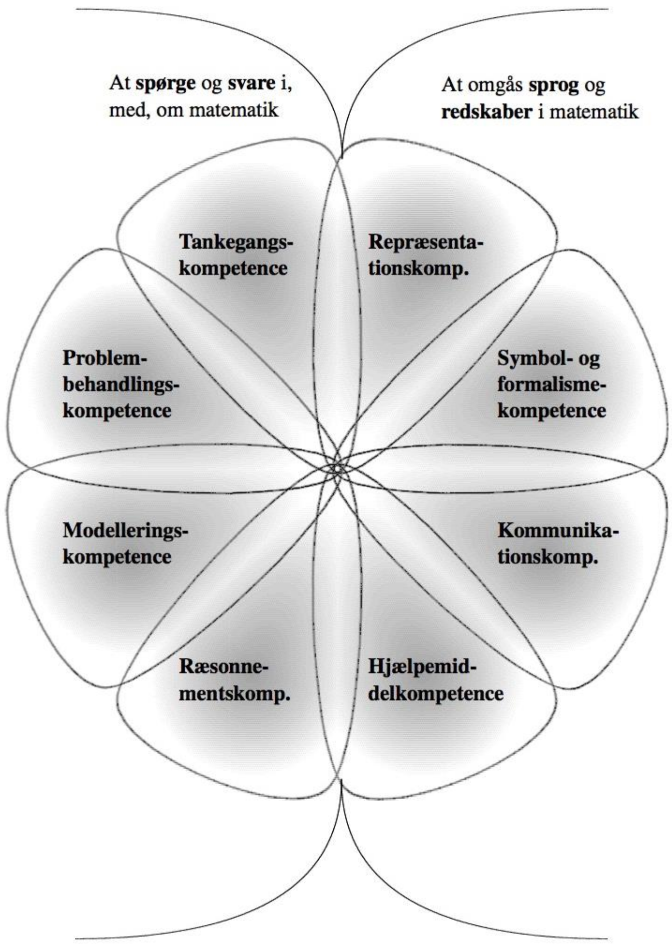
– Bekendtgørelse nr. 778 af 26/06/2013 om uddannelsen til højere teknisk eksamen (htx-bekendtgørelsen), herunder læreplanen for Matematik B (bilag nr. 22).

De faglige mål

De faglige mål er udtrykt vha. de 8 kernekompetencer i matematik, og det er slutmålene for to års undervisning i faget, der angives her. Alle målene skal nås, og rækkefølgen er ikke udtryk for en prioritering af målene. I praksis vil man opdele de endelige mål i nogle delmål, der gradvis opfyldes. Hvorvidt eleven har opfyldt fagets slutmål, undersøges ved de afsluttende prøver og i forbindelse med afgivelsen af de afsluttende standpunktskarakterer. Her bedømmes eleven ud fra bedømmelseskriterierne, som ligeledes er udtrykt vha. kernekompetencerne. Nogle af de faglige mål evalueres fortrinsvis gennem det skriftlige arbejde, mens andre især bedømmes ud fra de mundtlige præstationer.

De matematiske kernekompetencer

I publikationen Kompetencer og Matematiklæring af Mogens Niss m.fl. findes en nøje beskrivelse af de 8 matematiske kernekompetencer. Nedenfor er disse kort beskrevet i forhold til målene for matematik B på htx.



Kilde: KOM-rapporten

Kernekompetencerne kan opfattes som bladene i en blomst. Bladene overlapper hinanden, og det gør det ofte vanskeligt at arbejde med en kompetence i dens "rene" form.
Man opdeler ofte kompetencerne i 2 hovedgrupper; en der handler om spørgsmål og svar i og med matematik, og en der beskæftiger sig med brug af sprog og redskaber i faget. Nedenfor er de væsentligste træk ved hver enkelt kompetence beskrevet.

Tankegangskompetence
Denne kompetence består i

- at være bevidst om, hvilke slags spørgsmål, der er karakteristiske for matematik og selv at kunne stille sådanne spørgsmål
- at have en fornemmelse af hvilke typer af svar, man kan forvente.

I matematik B arbejder man med tankegangskompetencen, både når der læses tekster, arbejdes med konkrete problemstillinger og diskuteres matematik. Eleverne skal opnå en forståelse af i hvilke situationer matematik kan komme i spil – hvad det er for problemer faget kan løse, og hvilken slags løsninger, der findes på et givet problem. Det kan f.eks. dreje sig om betydningen af begrebet udsagn, hvad et lighedstegn betyder, og hvor de bruges. Andre eksempler er forskellen på et tal og en mængde eller hvorfor en lodret linje eller en cirkel ikke er grafen for en funktion etc. Det kan også være mere konkrete eksempler, som hvis eleven i forbindelse med et produkt i teknologi skal regne på en sekskant og først skal indse, at man kan finde vinkelsummen i sekskanten ud fra den viden man har om en trekant.

Problembehandlingskompetence
Denne kompetence består i

- at kunne opstille (opdage, formulere, afgrænse og præcisere) forskellige problemer, rene matematiske problemer såvel som problemstillinger fra matematik i anvendelse, åbne såvel som lukkede

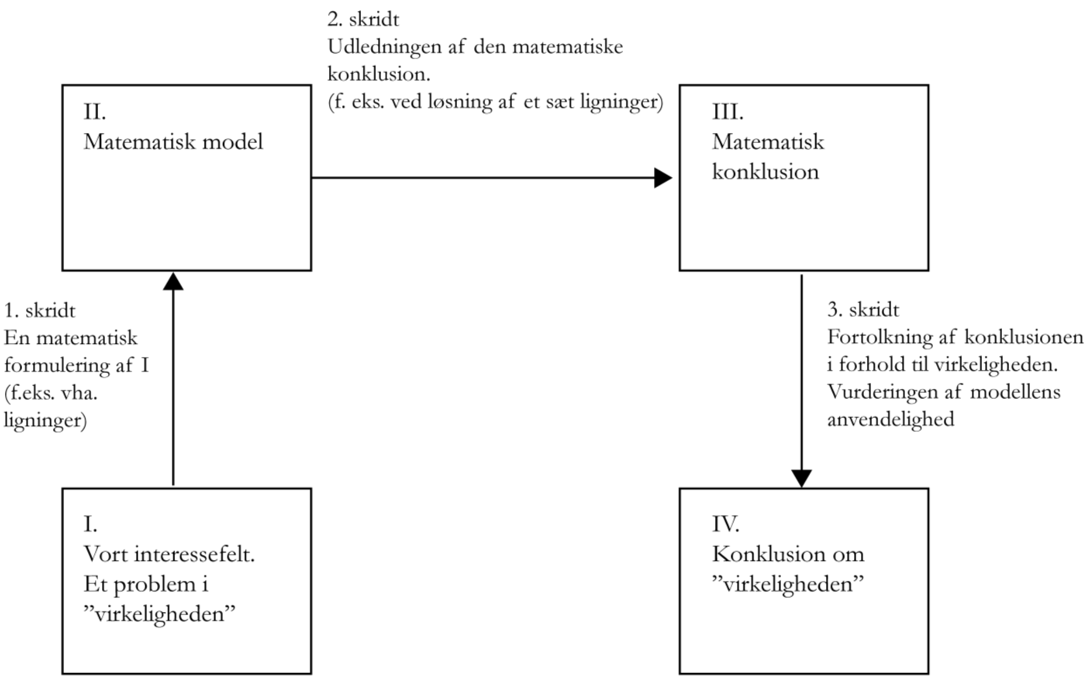
– at kunne løse sådanne færdigformulerede matematiske problemer - egne såvel som andres (måske på forskellig måde).

Dette er traditionelt den kompetence, der har været størst fokus på i matematikundervisningen i form af opgaveregning. Men opgaveregningen er kun en del af problembehandlingskompetencen, der også drejer sig om selv at formulere og opstille problemer, der skal løses.

Modelleringskompetence
Denne kompetence består i

– at kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller
– at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed
– at kunne (af)matematisere
– at kunne udføre aktiv modelbygning og
– at bringe matematik i spil til behandling af anliggender udenfor matematikken selv.

Modelleringskompetencen har helt fra htx' start fyldt meget i matematikundervisningen, idet den ofte kommer i spil i samarbejdet med andre fag, og fordi man her arbejder med mere eller mindre virkelige og realistiske problemstillinger. Mange undersøgelser viser, at matematiseringen af et givet problem er det, eleverne har allersværest ved, og man skal derfor gøre en særlig indsats her. Samtidig skal det pointeres, at vurdering af resultater og modellens rækkevidde er en vigtig del af modelleringen.
Modelleringsprocessen kan anskueliggøres ved følgende figur



Et eksempel kan være at beskrive tilgængelige data for befolkning i perioden 1900 - 2000 ved hjælp af en vækstmodel.

Ræsonnementskompetence
Denne kompetence består i

– at kunne følge og bedømme en kæde af matematiske argumenter fremsat af andre
– at kunne forstå, hvad et matematisk bevis er - skelne mellem hovedpunkter og detaljer.

Ræsonnementskompetencen handler naturligvis om bevisførelse, men er meget mere end det. For eksempel kan være ræsonnementer om ensliggende vinkler eller ligedannede trekanter i en geometriopgave.

På B-niveau skal man huske at tilgodese både de elever, der stopper efter B-niveauet og de elever, der vælger matematik A som et valgfag. For sidstnævnte elever er det vigtigt at de både får en fornemmelse af, hvad kravene på A-niveau er, samtidig med at de allerede i løbet af de første 2 år får udviklet deres ræsonnementskompetence.

I læreplanen står, at eleverne skal være fortrolige med matematiske ræsonnementer. Dette opfattes ofte som synonymt med bevisførelse, men er et langt bredere begreb. Et matematiks ræsonnement er en kæde af forbundne argumenter, der skal retfærdiggøre en matematisk påstand. Ræsonnementer benyttes derfor hver gang man skal begrunde fx brugen af en bestemt metode eller sætning. Et bevis derimod er en logisk deduktion, der hviler på nogle præmisser og som er fremsat for at retfærdiggøre en påstand om egenskaber ved og relationer mellem veldefinerede matematiske objekter. Bevisførelse vil derfor i gymnasiesammenhæng oftest forekomme gennem reproduktion, hvorimod eleverne både har brug for at kunne ræsonnere, når de skal gengive andres argumenter, og når de selv skal komme frem til en matematisk sandhed i eksempelvis induktive forløb eller i skriftlige opgaver og projekter. Det er vigtigt at eleverne er fortrolige med begge begreber.
Arbejdet med bevisførelse omfatter, at eleverne kan gengive og forklare de enkelte trin i enkle beviser for udvalgte sætninger
Det vil ofte hjælpe eleverne, hvis ræsonnementerne følger af en konkret figur. Det kan f.eks. være beviset for sinusrelationerne og for nogle elever også cosinusrelationerne. Eller det kan være brugen af ligedannede trekanter i beviset for sætningen om afstand for et punkt til en ret linje. Sætninger hvor man "regner" sig frem til resultatet som f.eks. formlen for halverings-/fordoblingskonstanten for en eksponentialfunktion, er også god. Her kan eleven opstille en ligning ud fra en figur af situationen og dernæst regne sig frem til formlen. Undgå så vidt muligt beviser, der kræver tricks eller indførelse af smarte hjælpefunktioner etc. Det er ofte svært for eleverne at huske, fordi de ikke kan se meningen med disse "gode idéer".
Der er ikke krav om at bestemte beviser *skal* indgå. Eleverne skal stifte bekendtskab med matematiske ræsonnementer og enkel bevisførelse indenfor et bredt udvalg af kernestoffet og det supplerende stof.

Repræsentationskompetence
Denne kompetence består i:
– at kunne forstå og betjene sig af forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (symbolske, algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammer, tabelmæssige)
– at kunne forstå de indbyrdes forbindelser.

Her kan arbejdes med de forskellige repræsentationer af variabelsammenhænge: forskrift, graf, tabel m.m. og deres styrker og svagheder. Man kan f.eks. tage udgangspunkt i en avisartikel og dens brug af grafer og tabeller. Et andet eksempel er sammenhængen mellem en vektors koordinater og dens længde og retning. Der bør lægges vægt på betydningen af (arbejds)tegninger. F.eks. bør geometriske opgaver **altid** illustreres med en figur, der viser de indgående størrelser, og sammenhængen mellem beregning og figur skal følges af en tekst. I funktionsopgaver er det en god idé at vænne eleverne til at tegne grafer og tjekke resultater på denne måde.

Symbol- og formalismekompetence
Denne kompetence består i
– at kunne afkode symbol- og formelsprog
– at kunne oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog
– at kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk - herunder formler.

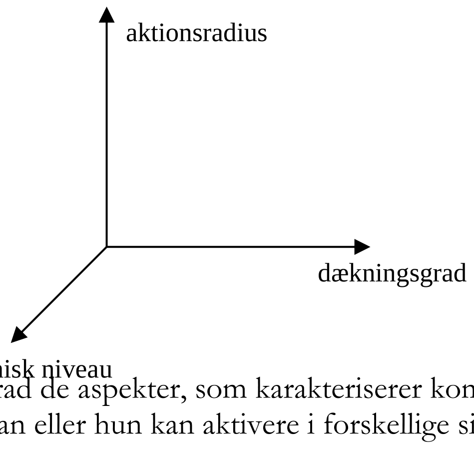
Symbol- og formalismekompetencen volder ofte eleverne problemer, især ved overgangen fra grundskole til htx. Her er det vigtigt, at man som underviser ikke forudsætter, at eleverne forstår den notation og brug af symboler, der er sædvanlig i gymnasielitteraturen. Se afsnittet om *læsning.*
Der arbejdes med den matematiske formalisme og brug af korrekt notation. Brugen af programmer, der ofte har deres helt egen syntaks, gør dette ekstra relevant.

Kommunikationskompetence
Denne kompetence består i
– at kunne sætte sig ind i og fortolke andres matematikholdige udsagn og "tekster"
– at kunne udtrykke sig på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender
– at kunne udtrykke sig skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Som eksempel kan eleverne lave en "lærebog" om bestemmelse af overfladearealer og rumfang af forskellige rumlige figurer, der kan benyttes i en 9. klasse i brobygning på htx. Der kan også arbejdes med brug af PowerPoint-præsentationer i faget og de begrænsninger, der er ved sådanne skærmpræsentationer.
Både i forbindelse med skriftlige opgaver og mundtlig fremstilling spiller kommunikationskompetencen en stor rolle, og det er vigtigt at eleverne forstår, at det ikke blot er resultaterne, der er vigtige, men også i høj grad den måde de bliver præsenteret på.
Arbejdet med kommunikationskompetencen vil ofte være relevant i relation til Studieområdet.

Hjælpemiddelkompetence
Denne kompetence består i
– at have kendskab til eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed
– at have indblik i redskabers muligheder og begrænsninger i forskellige situationer
– at være i stand til at betjene sig af hjælpemidlerne.

Her inddrages konkrete materialer af forskellig art til begrebsdannelse og undersøgelse af sammenhænge. Lommeregner, computer, software som regneark, geometriprogrammer, interaktive programmer etc. benyttes. Der kan også være tale om helt andre hjælpemidler som f.eks. en teodolit til opmåling af vinkler og afstande mellem bygninger m.m.
I planlægning og udførelse af undervisningen er det vigtigt at fokusere på kompetencerne, da det er ud fra disse, at de faglige mål og bedømmelseskriterierne er sat op.
Eleverne opnår matematikkompetencer gennem arbejdet med kernestof og supplerende stof. Det kan anbefales at man i begyndelsen fokuserer på en enkelt eller få kompetencer af gangen og gradvist øger antallet. Man kan med fordel delagtiggøre eleverne i kompetencebeskrivelsen og diskutere hvilke kompetencer, der skal fokuseres på, i et givet undervisningsforløb.
For at øge bevidstheden om kompetencebeskrivelsen i faggruppen kan man f.eks. oprette en studiekreds blandt fagkollegerne, hvor begreberne diskuteres og afklares, og man kan kompetencebeskrive projektoplæg, opgaver og undervisningsforløb for at afdække i hvilket omfang, de alle kommer i spil.
Ved evaluering af elevens besiddelse af kompetencer, kan nedenstående 3-dimensionale beskrivelse benyttes:



Dækningsgraden fortæller i hvor høj grad de aspekter, som karakteriserer kompetencen, er dækket hos eleven, dvs. hvor mange af disse aspekter, han eller hun kan aktivere i forskellige situationer, og med hvor høj grad af selvstændighed aktiveringen kan ske.
Aktionsradius udgør det spektrum af sammenhænge og situationer eleven kan aktivere kompetencen i.

Det *tekniske niveau* bestemmes af, hvor begrebsligt og teknisk avancerede områder og værktøjer eleven kan aktivere den pågældende kompetence overfor.

Hvilket stof skal der arbejdes med i undervisningen? – kernestof og supplerende stof.

Som nævnt ovenfor er fagets faglige mål beskrevet vha. af de kompetencer eleverne skal opnå. Hvordan disse kompetencer erhverves kan ske på mange måder, både hvad angår hvilke arbejdsformer der anvendes og med hvilket matematisk stof, der arbejdes. Det matematiske stof opdeles i 2 kategorier: kernestof og supplerende stof. Kernestoffet er det, der er (mere eller mindre) fælles for alle elever, og som benyttes som udgangspunkt for den skriftlige eksamen i faget, Det supplerende stof vælges under hensyntagen til det faglige samspil i studieretningen, elevernes ønsker og evner og evt. lærerens særlige kompetencer.

Kernestoffet

Når der ovenfor står, at kernestoffet er mere eller mindre fælles for alle elever, skal dette forstås således, at det ikke er muligt at give en præcis liste over de emner og opgavetyper, eleverne skal have arbejdet med i løbet af de 2 år. Dette er en konsekvens af, at læreplanerne ikke længere er pensumstyrede men målstyrede. I stedet skal der herunder beskrives nogle overordnede tanker om hvert delemne.

Kernestoffet er:

- *regningsarternes hierarki, reduktion, regler for regning med potenser og rødder, ligningsløsning, både analytisk, grafisk og ved hjælp af it*

De fleste lærere vil opleve, at mange elever ikke har de regnefærdigheder, som vi forventer. Det betyder ikke at eleverne ikke har arbejdet og trænet disse ting, men er måske snarere et udtryk for, at de har svært ved at bruge det de har lært i én kontekst i helt andre sammenhænge, hvor sproget, symbolerne og metoderne er anderledes, end de er vant til. Derfor viser erfaringerne også, at man ikke løser problemet ved at afholde et "brush up" kursus, hvor der arbejdes intensivt med regneregler, ligningsløsning, brøker etc. Eleverne finder det meningsløst at træne tekniske færdigheder, som de ikke kan se, hvad de skal bruge til, og det er meget svært at lære noget, man finder meningsløst. Emnerne her er medtaget for at fastholde fokus på områder, der er vigtige forudsætning for at kunne opnå mange af de matematiske kernekompetencer. Eksempler er manipulation med tal og bogstaver i bevisførelse, forståelse for grundmængdens størrelse ved modellering osv.

Det er den enkelte lærer, der afgør hvor meget og hvordan der arbejdes med emnet, men det anbefales, at man i vidt omfang integrere emnerne inden for de områder, hvor de benyttes, f.eks. at den almindelige algebra og løsning af ligninger og uligheder indgår i arbejdet med funktioner.

De fleste matematiklærere kan blive enige om, at det vil være en stor fordel for eleverne, hvis de kan potensregneregler, regning med brøker, kvadratsætninger etc. uden brug af hjælpemidler, og derfor er det også noget, man bør vise eleverne med jævne mellemrum, når det indgår i en sammenhæng. Men samtidig må vi også erkende, at ikke alle elever kommer dertil, og for disse er brug af computerprogrammer etc. en helt uundværlig ting, der kan understøtte begrebsforståelsen og muliggøre problembehandling.

- *grundlæggende klassisk geometri og trigonometri: forholdsberegninger i ligedannede trekanter, beregninger i retvinklede og vilkårlige trekanter, bestemmelse af areal af plane figurer samt volumen og overfladeareal af rumlige figurer*

Indenfor den klassiske geometri skal eleverne have kendskab til begreber som højder, medianer, vinkelhalveringslinjer, ind- og omskreven cirkel i en trekant, linjer, cirkler og punkter. Begreberne ligedannethed og ensvinklede trekanter er centrale for emnet og benyttes i mange af de små beviser, der er gode eksempler på matematiske argumentation og ræsonnement. Det vil være fornuftigt her at diskutere forskellen på eksempler og beviser, samt styrken i et matematisk bevis. Her kan arbejdet med forskellige geometriprogrammer gøre undervisningen mere varieret og understøtte elevernes begrebsforståelse. Emnet

har endvidere den store fordel, at mange af de matematiske ræsonnementer, der benyttes er "algebrafri", og algebra er en af fagets helt store snublesten. Man kan derfor arbejde med matematiske argumenter, uden de drukner i beregninger, omskrivninger og bogstavmanipulationer, der ofte kommer til at overskygge, hvad den matematiske substans i virkeligheden handler om.
Cosinus, sinus og tangens kan introduceres ud fra ligedannede trekanter eller ud fra koordinaterne til punkter på enhedscirklen. Der arbejdes i grader, og der lægges vægt på nødvendigheden af kontroltegninger. I trekantsberegninger benyttes cosinus- og sinusrelationerne.
Man arbejder med regulære polygoner og forskellige typer af plane og rumlige figurer som f.eks. prisme, cylinder, kegle, keglestub, pyramide, pyramidestub, kugle, kugleudsnit og kugleafsnit.
Ved udledning af formlerne for overfladeareal og rumfang af udvalgte figurer, kan eleverne inddrages i et induktivt forløb, hvor de med vejledning, selv kan udlede mange af formlerne. F.eks. kan eleven lave udfoldninger af cylinder, kegle og keglestub og derigennem bestemme udtryk for overfladearealerne. Det kan anbefales, at give dem kendskab til relevante bøger/formelsamlinger/hjemmesider, hvor man kan finde de nødvendige matematiske udtryk og samtidig arbejde med forståelse af figurer og oversættelse af konkrete oplysninger til generelle formler, så eleven vil kunne bestemme de ønskede arealer og rumfang.

– *analytisk plangeometri, herunder anvendelse af enkle analytiske beregningsmetoder*

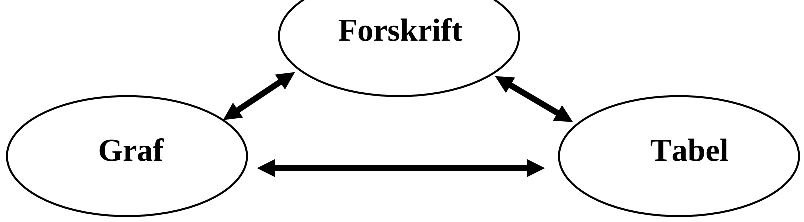
I dette emne arbejdes der med den analytiske beskrivelse af forskellige geometriske figurer i planen herunder cirklens, parablens og linjens ligning. Når man indenfor dette emne skal udvælge beviser, der bedst bidrager til elevernes ræsonnementskompetence, bør man overveje, hvad elevens udbytte med arbejdet er, og om dette står mål med den tid, der bruges. F.eks. kan man nemt komme til at bruge meget lang tid på omskrivninger mellem forskellige udgaver af cirklens ligning eller bestemmelse af skæring mellem 2 linjer ved determinantmetoden, uden eleverne opnår nogen større forståelse for den bagved liggende matematik, især da it-værktøjer her er meget effektive. Omvendt er der mange gode ræsonnementer i beviserne for sætningerne om ortogonale linjer og afstand mellem punkt og linje som samtidig fører til et nødvendigt udtryk i forbindelse med løsning af konkrete opgaver.

– *geometrisk og analytisk vektorregning i planen, herunder bestemmelse af projektioner, afstande og vinkler*

Vektorer defineres ved begge deres repræsentationer: længde og retning samt koordinater. Det er en god idé at relatere vektorerne til praktiske eksempler som f.eks. kræfter i fysik. Ofte vil eleverne have nemmere ved at forstå det noget abstrakte vektorbegreb, hvis det først er introduceret i fysik, og man først herefter indfører de formelle definitioner i matematik. Også her skal sætninger og beviser udvælges med omhu set i lyset af de kompetencer eleverne skal opnå, og igen vil det være vanskeligt at nå, at arbejde med opgaver, der belyser alle tænkelige problemstillinger vedrørende projektioner, afstande og vinkler etc. Det betyder at det er vigtigt at fokusere på forståelsen af de forskellige problemstillinger samt de hjælpemidler, der gør det muligt for eleverne at løse problemer, de ikke nødvendigvis er stødt på i samme form før.

– *funktionsbegrebet; karakteristiske egenskaber ved funktioner af følgende typer: polynomier og potensfunktioner samt enkle sammensætninger af disse*
– *bestemmelse af en forskrift, herunder benyttelse af regression og anvendelse af funktioner ved opstilling af enkle modeller samt til løsning af konkrete teknologiske eller naturvidenskabelige problemer*

Hvad er en funktion? Forskning viser, at funktionsbegrebet og variabelsammenhæng er meget vanskeligt og abstrakt for de fleste elever. Det kan derfor anbefales at begynde med mange konkrete eksempler, før den endelige definition stilles op.
I forbindelse med indførelse af funktioner, vil det være fornuftigt at tale om forskellige repræsentationer og deres styrker og svagheder:



Man behøver blot at åbne en avis, så er der eksempler på forskellige repræsentationer af funktioner, og disse repræsentationer er ofte et godt udgangspunkt for en diskussion af emnet.
Med fokus på modelleringskompetencen kan man arbejde med opstilling af sammenhænge ud fra givne data f.eks. målepunkter og/eller hældninger. Disse sammenhænge kan beskrives vha. de forskellige repræsentationer nævnt ovenfor. En del af undervisningen beskæftiger sig med bestemmelse af funktioners forskrifter ved opstilling og løsning af ligningssystemer eller ved regression. Her er it-hjælpemidlerne en uvurderlig hjælp. For at afgøre en funden models validitet, bør punkter og model **altid** indtegnes sammen, så graden af overensstemmelsen anskueliggøres. I den forbindelse kan styrker og svagheder ved regressionskoefficienten diskuteres. Ved påvisning af potenssammenhæng kan man vælge at arbejdes med afbildning af funktioner i logaritmiske koordinatsystemer – også uden at indføre logaritmefunktioner. Her er det vigtigt at pointere over for eleverne, at når der skal bestemmes en matematisk model, f.eks. en lineær eller en potens model ud fra et antal målepunkter, så er disse målepunkter behæftet med en usikkerhed/fejl, og de kan derfor **ikke** direkte benyttes ved indsættelse i forskriften for en lineær funktion $f(x)=a\cdot x+b$ eller en potensfunktion $f(x)=b\cdot x^a$ til bestemmelse af konstanterne *a* og *b*. Her må enten benyttes regression eller målepunkterne indtegnes i et passende koordinatsystem så den bedste rette linje kan laves, herefter kan koordinaterne for 2 punkter aflæses, og endelig kan konstanterne bestemmes ved indsættelse i forskriften. Dette er et område, hvor it-værktøjerne er med til at gøre undervisningen mere vedkommende og realistisk, samtidig med at begrebsforståelsen understøttes, uden det kræver forudgående træning af tekniske færdigheder. Samtidig er der mange gode eksempler fra andre fag, der kan benyttes inden for dette emne.
Der arbejdes med funktioners grund- og værdimængder, enkle sammensætninger af funktioner og stykkevist definerede funktioner.

- *begreberne kontinuitet og differentiabilitet samt definition og fortolkning af differentialkvotient; differentialkvotientens sammenhæng med monotoniforhold, ekstrema og optimering*
- *bestemmelse af den afledede funktion for ovennævnte funktionstyper samt regneregler for differentiation af sum, differens og funktion multipliceret med konstant*

Indførelsen af kontinuitet og differentiabilitet afhænger elevernes matematiske forståelse. Hvor nogle elever skal se begreberne som nogle konkrete egenskaber, der kan "tegnes", har andre elever de matematiske forudsætninger, der gør, at man kan inddrage grænseværdibegrebet. Dette er især relevant for elever, der fortsætter på A-niveau. Der arbejdes med bestemmelse af differentialkvotienter og afledede funktioner, og forskellen på de to begreber diskuteres. For at udvikle elevernes forståelse af differentiation kan man vælge at vise beviset for f.eks. differentiation af summen af to funktioner.
Det vil lette arbejde med differentialregning og optimering, hvis eleverne bliver i stand til at differentiere simple funktioner uden brug af hjælpemidler, men det er ikke tanken, at der skal bruges meget energi på at træne f.eks. differentiation af de funktionstyper, der arbejdes med, i hånden. Her er det på sin plads at bruge it-hjælpemidler. Omvendt vil det ofte være nødvendigt for eleverne at kunne omskrive eller genkende programmernes løsning af en differentiation, og dette kræver kendskab til de i læreplanen nævnte sætninger.
Når der arbejdes med optimering og bestemmelse af en funktions monotoniforhold, skal eleverne have kendskab til matematikken bag løsningerne, f.eks. at et ekstremumspunkt kan forekomme, hvor differentialkvotienten er 0, men at dette ikke er et tilstrækkeligt krav. Bestemmelse af dette nulpunkt vil herefter typisk blive bestemt vha. et it-hjælpemiddel enten ved løsningen af ligningen $f'(t)=0$ eller ved en sproglig beskrivelse kombineret med en graf, der viser den afledededes skæring med *x*-aksen og/eller en graf, der viser funktionens forløb med ekstremumspunktet markeret.

- *bestemmelse af stamfunktioner for ovennævnte funktionstyper og anvendelse af integralregning til arealberegninger, regneregler for integration af sum og differens af to funktioner samt funktion multipliceret med konstant*

Der lægges vægt på sammenhængen mellem differentiation og integration. På samme måde som ved bestemmelse af den afledede funktion vil det forbedre elevernes forståelse for integralbegrebet, hvis man arbejder med bestemmelse af simple stamfunktioner ud fra definitioner og sætninger. Ligeledes vil det lette det efterfølgende arbejde, hvis eleverne kender et antal simple stamfunktioner, der ikke først skal findes i en bog

eller med it-værktøjet. Når det drejer som om mere komplicerede problemer, hvor fokus ikke længere er på den tekniske side af stamfunktionsbestemmelsen, men derimod på anvendelsen af stamfunktionen til bestemmelse af arealer benyttes it-værktøjer til beregninger af de opstillede udtryk.
Integralregningen anvendes til arealberegninger både under kurver og mellem kurver. Det er ikke et krav at indføre summer på formel vis, men det kan være en god idé at opdele integrationsintervallet i stadig mindre stykker og bestemme tilnærmede værdier for integralet som arealsummer af rektangler eller trapezer. Der kan arbejdes med dette i et induktivt forløb, eventuelt sammen med fysik, hvor man arbejder med strækninger, hastigheder og accelerationer.

Det supplerende stof

Omfanget af det supplerende stof er ca. 20 procent. 20 % af 285 timer giver 55-60 timer.
Af hensyn til de elever, der vælger matematik A som valghold, skal det anbefales at man **ikke** udelukkende anvender kommende matematik A kernestof som supplerende stof. Erfaringer viser, at man på B-niveau typisk vil bruge noget længere tid på dette stof, end man gør på valgholdene, og det volder problemer med at få supplerende stof nok på disse valghold.
Det supplerende stof både kan bestå af nye emner og uddybning af emner fra kernestoffet. Det vil ofte give eleverne større mulighed for at modellere forskellige konkrete situationer, hvis de har flere funktionstyper til rådighed, og derfor kan man på den enkelte skole aftale, hvilke funktionstyper der kan indføres f.eks. logaritmefunktioner i samarbejde med kemi, og eksponentialfunktioner sammen med fysik. Da den grundlæggende geometri ofte lægges tidligt i forløbet kan det med fordel tages op igen og udvides med flere begreber som f.eks. vinkler ved cirkler, yderlige plane og rumlige figurer og tilhørende små beviser. Dette giver samtidig lejlighed til at repetere stoffet fra 1. år.

Som eksempler på helt nye emner kan nævnes:
- harmoniske svingninger i forbindelse med vekselstrøm
- Lydtryksberegninger vha. eksponential- og logaritmefunktioner
- Newtons love, det skrå kast og cirkelbevægelse kan give anledning til at se på parameterfremstilling for forskellige typer grafer f.eks. linjen, parablen og cirklen
- Afkølingskurver samt afladning af kondensator, hvor man benytter sig af eksponentielle udviklinger
- Logaritmefunktioner ved pH-beregninger
- Samfundsfag og biologi: deskriptiv statistik og eksponentielle udviklinger i forbindelse med vækst

Som eksempler på udbygning af kernestoffet kan nævnes:
- udvidelse af analytisk plangeometri med hyperblen
- udvidelse af vektorer i planen til vektorer rummet i forbindelse med kraftberegninger i 3 dimensioner
- udledning af udtryk for kurvelængder og rumfang ved integralregning

Grundforløbet

Matematik B er et 2-årigt forløb. I grundforløbet vil man på skolen typisk vælge at lade A- og B-holdene arbejde med de samme emner, men tone undervisningen, så eleverne får en fornemmelse af, hvad der venter dem. Ved grundforløbets start vil man ofte opleve, at eleverne kommer med meget forskellige forudsætninger og viden fra deres tidligere skoleforløb. For at fange alle eleverne, kan det være mest hensigtsmæssigt at begynde med et emne, som eleverne ikke har beskæftiget sig med tidligere, så alle lærer noget nyt. Her kan grundlæggende geometri være et godt bud. Man skal passe på med at være alt for abstrakt og benytte for mange symboler i begyndelsen, og det er en god idé at "læse i bogen" sammen med eleverne, så de helt fra begyndelsen for en fornemmelse af, hvordan man kommer i gang med at læse matematiske og symbolholdige tekster.

Mens man som lærer benytter kompetencerne i sin undervisningsplanlægning, kræver det overvejelser om man også skal benytte terminologien overfor eleverne. Her er det væsentligt at eleverne hele tiden ved, hvad vi forventer af dem, og hvad de bliver bedømt på, såvel i undervisningen som ved det skriftlige arbejder, og her kan kompetencebegrebet være et godt redskab.
Matematik er en del af studieområdet, og kan bidrage til studieområdets faglige mål i samspil med de øvrige fag.
Man vil i grundforløbet primært arbejde med skriftlighed i form af opgaveregning, noteskrivning, etc. hvorimod det første projekt nok bør vente til studieretningsforløbet.

Studieretningsforløbet

Hvor man i grundforløbet ofte vil introducere eleverne til en del forskellige emner, er det i studieretningsforløbet man får mulighed for at fordybe sig, ikke mindst igennem de projekter, der arbejdes med. Projekter, der enten involverer andre fag – et naturvidenskabeligt fag, men også andre fag kan komme på banen som f.eks. dansk eller elevernes studieretningsfag. For mange lærere er det en stor udfordring at undervise i matematik B, idet klasserne kan være meget inhomogene både med hensyn til evner og interesse for faget. Her er det nødvendigt at indtænke undervisningsformer, for at udfordre alle elevtyper.

Undervisning

For at tilgodese de forskellige elevtyper vil undervisningen ofte foregå som en vekselvirkning mellem klasseundervisning med læreroplæg, individuelle træningsøvelser og opgaver, gruppeopgaver, arbejde i grupper, projektarbejde, klassediskussioner og elevfremlæggelse. Så vidt det er muligt bør undervisningen tage udgangspunkt i den enkelte elevs faglige niveau og tilgang til faget. Generelt bør undervisningen bygges op, således at eksempler med udgangspunkt i praktiske problemstillinger har en central plads. Dette er ikke ensbetydende med at eleverne ikke skal arbejde med teori, og især for de elever, der går videre med matematik A, er det væsentligt, at der også bliver arbejdet med abstrakt matematik. Samtidig skal man have øjnene åbne for, at den abstrakte matematik er meget vanskelig at få greb om for en stor del af eleverne. Her må man arbejde på flere niveauer og f.eks. tillade større brug af it-redskaber for nogle elever end for andre, eller lade nogle grupper bearbejde konkrete eksempler, hvor andre grupper kan generalisere og arbejde med brug at symboler.
Arbejdet i grupper kan f.eks. foregå ved nedsættelse af 3-mandsgrupper, hvor hver gruppe skal gennemarbejde og efterfølgende præsentere et emne for klassen. Produktkravene til et gruppearbejde kan være en mundtlig fremstilling med tavlegennemgang eller elektronisk præsentation, udarbejdelse af skriftligt materiale eller kombinationer af disse.
Det er vigtigt, at man giver eleven mulighed for at udtrykke sig mundtligt, så det talte fagsprog udvikles og trænes. Det kan ske ved (tavle)fremlæggelse, klassediskussioner eller blot besvarelse af spørgsmål i undervisningen.
Htx er kendetegnet ved, at mange elever kommer fra hjem, der ikke har en boglig tradition. For at få flere til at gennemføre en ungdomsuddannelse støttede Undervisningsministeriet i 2009 en opfølgning af forskningsprojektet "Når gymnasiet er en fremmed verden," der satte særligt fokus på de elever, hvis forældre ikke selv har taget en gymnasial uddannelse – de såkaldte gymnasiefremmede elever. Her blev der i flere fag udarbejdet rapporter med konkrete forslag bl.a. i matematik på htx. Rapporten indeholder tips og gode idéer til afvekslende undervisning, der er relevante for alle elevtyper. F.eks. gives eksempler på brug af forskellige "spil", som understøtter såvel den mundtlige som den skriftlige dimension.

Læsning

Erfaringer viser, at noget af det allersværeste ved overgangen fra grundskole til gymnasium er vores udstrakte brug af symboler og benyttelse af symbolholdige tekster. Når man som lærer oplever, at eleverne aldrig læser lektier, er det ikke nødvendigvis et udtryk for uvilje eller dovenskab. De *kan* ganske enkelt ikke læse de bøger, der udleveres. Derfor kan det være en rigtig god investering at bruge energi på at "lære eleverne at læse". Her drejer det sig ikke blot om at forstå ord og udtryk, men også at kunne skelne mellem hvad der er vigtigt og mindre vigtigt, hvordan en matematisk tekst er opbygget og hvad forskellen mellem f.eks. eksempler, sætninger og beviser er. Matematik læses på en helt anden måde end mange andre fag. Fx vil man ofte skulle gå frem og tilbage i teksten, kigge på en figur, dechifrere en formel (der af mange elever blot opfattes som et billede, man kan springe over!), og mange af de ord, der benyttes har en helt anden betydning i hverdagssproget, end det har i matematiksammenhæng. Man må hele tiden tænke på, at det er første gang eleverne møder tekster som disse, og der skal ofte hjælp til at knække koden.
Denne læseundervisning kan foregå på mange måder. Man kan udvælge et par sider og sammen gennemgå dem på klassen, hvor man diskuterer tekstens opbygning, eleverne kan også side og læse det samme afsnit to og to, hvorefter de gennemgår det for hinanden. Det kan ofte hjælpe elevernes læsning, hvis der udformes spørgsmål til teksten, som man skal svare på undervejs, eller man kan give eleverne sine egne (kortfattede) noter til undervisningen inden timen, så de ved, hvad der skal fokuseres på, og hvad der er vigtigt. Også her vil et samarbejde med andre fag være givtigt. Hvordan læser man i teknologi? i dansk? i fysik?

Lektier

Htx-elever har meget at lave! Derfor skal man nøje overveje, hvor mange og hvilke lektier man giver dem for, og at det skal være meningsfuldt for eleven at lave dem. Måske skal man ikke til hver gang – uden større omtanke – give dem nogle sider for, der skal læses. Vi gennemgår dem jo alligevel i undervisningen, og måske står udbyttet af at have læst på forhånd ikke mål med den tid, der bruges på det. Hermed menes ikke, at eleverne ikke skal forberede sig. Man skal blot overveje hvordan de skal forberede sig, og det, der er arbejdet med hjemme, skal tages op, uddybes og afrundes i undervisningen. Det kan være en rigtig god idé at lade eleverne bruge deres nye viden ved f.eks. at regne et par enkelte opgaver i undervisningen, og derudover lade dem træne yderligere med opgaveregning derhjemme eller i en lektiecafé. Der findes mange eksempler på træningsopgaver på internettet; opgaver, hvor man kan få tips eller hjælp undervejs, og som tiltaler eleverne mere end at sidde med papir og blyant og gå i stå, når de sidder alene.

Skriftlighed

Matematikfaget bidrager ligesom alle øvrige fag, der har en skriftlig dimension, til elevernes studieforberedende skrivekompetence (se bilag 4). Dette betyder at man som lærer direkte skal støtte eleverne i at få udbytte af at skrive i såvel matematik som i tværgående sammenhænge. Der skrives meget i matematik, og som matematiklærer har man ofte en stor tavs viden om skrivning i faget. Man ved præcis, hvornår en formulering eller brug af notation ikke følger de gængse normer (det man kalder *fagdiskursen*). Som et eksempel på fagdiskursen i matematik og de naturvidenskabelige fag, kan nævnes at man udtrykker sig objektivt, ofte i passiv og at man benytter det akademiske "vi" frem for "jeg". På trods af mange års uddannelse med skrivning af sådanne tekster er det imidlertid ikke noget man sædvanligvis er bevidst om systematisk at undervise i. Så udfordringen nu bliver at kunne beskrive, forklare, begrunde diskurser og genrer i fagene, samt forskellen mellem fagene. Kort sagt hvordan der kan *undervises* i faglig og tværfaglig skrivning.

Skriftlige opgaver skal ikke kun skrives *efter* man har lært og for at dokumentere at man har lært, men de skal bygges ind i læreprocesser så eleverne lærer at skrive for at udvikle viden. For at kunne arbejde med skrivning

på denne måde, må man være opmærksom på, at man skelner mellem to former for fagligt relevant skrivning. Den ene er *udforskende skrivning*, også kaldet tænkeskrivning eller reflekterende skrivning.. Udforskende skrivning bruges til at udvikle og fastholde tanker, projekter eller et skriftligt produkt. Skriveren behøver ikke at indordne sig under konventioner når bare teksten kommunikerer det den skal, til dem der skal læse den. Udforskende skrivning kan både bruges til at skrive udkast til opgaver og til produktive tænkeøvelser i timerne. Den er et vigtigt værktøj til at udvikle faglig tænkning og afprøve faglige begreber og ræsonnementer. Det er afgørende at denne slags skrivning aldrig bedømmes.
Den anden type er faglig præsentationsskrivning som er tekster der skrives for at præsentere tanker, viden og ræsonnementer for andre, oftest for lærere, men også for kammerater. Disse tekster skal leve op til de faglige genrekonventioner og tekstnormer som gælder i det givne fag, og bliver typisk bedømt[1]. Traditionelt har man i matematik arbejdet med sidstnævnte type skrivning.

Når man planlægger sin faglige skriveundervisning kan det anbefales at indlægge øvelser hvor eleverne undervejs gennem fx skriveøvelser, resumeer, refleksioner og eksperimenter skal oversætte dele af deres viden til skrift eller grafiske fremstillinger. På denne mådebevidstgøres og uddyber de deres viden og får samtidig produceret ideer og udkast der kan bygges ind i en eventuelt afsluttende opgave/rapport. Dette kan være til stor hjælp for de mange elever, der har svært ved at komme i gang med større skriftlige produkter. Som en yderligere hjælp kan man (primært i begyndelsen) give eleverne en skabelon for det skriftlige produkt, det drejer sig om. Ud over en overskrift for hvert afsnit, kan man måske give eleverne den eller de første sætninger i hvert afsnit. Dette kan både praktiseres ved projektrapporterne men også hvor det drejer sig om et resume eller en traditionel afleveringsopgave. Denne måde at hjælpe eleverne i gang med en opgave, og støtte dem i at "knække koden" for fagsprog og terminologi kaldes *stilladsering*.

I bilag 4 er nævnt 8 studieforberedende skrivekompetencer, og her vil matematik bl.a. kunne bidrage indenfor områderne *genrebevidsthed*, *sproglig korrekthed*, *argumentation*, *anvendelse af citater, figurer, illustrationer* samt *præsentationer*.
Inden for genrebevidsthed kan der være tale om noteskrivning, synopsis, traditionelle opgavebesvarelser, projekter eller "undervisningsmaterialer" som formelsamling, artikel eller et kapitel til en lærebog. I udfærdigelse af skriftlige materialer er den sproglige korrekthed vigtig. Som lærer har man ansvaret for at påpege hvor væsentligt det er, at man også i matematikopgaver, rapporter etc. skriver korrekt mht. stavning og tegnsætning og altid læser korrektur. Særlig fokus skal der naturligvis være på brugen af matematiske fagudtryk og symboler samt fornuftig brug af figurer og disses sammenhæng med teksten.
Et andet område, hvor matematik i høj grad kan bidrage, er ved brug af argumentation, der nøje hænger sammen med den matematiske ræsonnementskompetence. Her handler det om i et kort og præcist sprog at argumentere for, hvad man gør, og hvorfor man kan gøre det. Ræsonnementskompetencen kan have vanskelige kår på matematik B, men her kan det give eleverne en øget bevidsthed, hvis man arbejder med tilsvarende argumentationstyper i andre fag f.eks. i dansk.
Endelig vil der også være god mulighed for at arbejde med forskellige typer af præsentationer af matematikholdige "tekster" både i det daglige arbejde og i forbindelse med projekterne, der samlet skal dække kernestof og supplerende stof. Her er åbnet op for at dokumentationen for projekterne kan være rapporter, artikler, podcasts, plancher m.m. Hver præsentationsform har sine styrker og svagheder som eleverne skal gøres bevidste om.

Den faglige præsentationsskrivning benyttes kan bl.a. bruges til at undersøge om eleven kan håndtere fagets metoder og hjælpemidler på en fornuftig måde i forhold til de faglige mål. Disse kan omfatte udarbejdelse af:

– journal/ logbog
– afleveringsopgaver
– træningsøvelser

[1]Ellen Krogh (red.) Videnskabsretorik og skrivedidaktik, 77 Gymnasiepædagogik s. 26

– projektrapport
– it-præsentation
– tests/ prøver

I grundforløbet introduceres eleven til fagets skriftlige fremstillingsformer. Her kan man overveje at anvende en portfolio, der består af notater fra undervisningen, til læring af hensigtsmæssig notatteknik i faget. Læreren kan i perioder vælge at kommentere portfolioen i stedet for at rette en almindelig skriftlig opgave. Som dokumentation af mindre forløb og beregninger kan logbog eller journal anvendes.
Træningsøvelser kan anvendes i den daglige undervisning til indlæring af konkrete færdigheder.
Der stilles obligatoriske opgaver med progression i sværhedsgrad. Hjemmeopgaver bør opbygges med et balanceret indhold mellem færdigheds- og anvendelsesorienterede opgaver og egentlige projekter.
Det skriftlige arbejde kan evalueres på flere måder: eleverne kan rette egne eller hinandens opgaver. Ved at rette andres opgaver får eleven ofte øje på, hvor stor betydning dokumentation og korrekt notation betyder. Læreren kan også vælge på forhånd at melde ud, hvilke dele eller med hvilket fokus afleveringen bliver rettet. F.eks. kan man ved en projektrapport i særlig grad kommentere løsningsmodellen eller teoriafsnittet og gøre mindre ud af elevens beregninger. Ved et hjemmeopgavesæt kan det være brug af hjælpemidler eller brug af matematiske ræsonnementer, der er i fokus.

Det er vigtigt, at læreren udarbejder projektoplæggene på en sådan måde, at der i slutningen af forløbet lægges op til en besvarelse, hvor eleven kan demonstrere evnen til selvstændigt at analysere et givet problem og opstille en løsningsmodel. Oplæggene må derfor ikke ligne traditionelle matematikopgaver, hvor alle oplysninger er givet, og eleven ledes gennem besvarelsen med konkrete spørgsmål. Formålet med projekterne er at uddybe elevens forståelse for teorien og træne eleven i at matematisere et praktisk problem. Der kan med fordel samarbejdes med de øvrige fag om projekter.
Ved udarbejdelsen af projektoplæggene kan der hentes inspiration i de oplæg, der blev lavet til forsøget med it-prøven på B-niveau i perioden 2001-06 og de efterfølgende eksamensprojekter.
Arbejdet med et projekt kan foregå i grupper eller selvstændigt og afsluttes med en eller anden form for dokumentation. Ofte vil denne dokumentation være en skriftlig rapport, men som nævnt ovenfor er det også muligt at lave f.eks. en skærmpræsentation, en film, en lærebog, en artikel el. lign.
I stedet for at lade projektet afslutte et emne, kan man også vælge at lade arbejdet med et projekt danne ramme om undervisningen i et emne. Det er således gennem arbejdet med projektet, at eleven introduceres for nyt stof og gennemarbejder det. Projekterne laves i perioder jævnt fordelt over uddannelsestiden, således at læreren kan anvende disse som element til variation af undervisningen. Projekterne danner udgangspunkt for den mundtlige prøve i faget.
Gennem projekterne forsøger eleven selvstændigt at finde en eller flere matematiske løsningsmodel(-ler), og læreren fungerer som vejleder. For nogle elever og grupper vil vejledningen foregå i mange små trin, mens andre vil kunne arbejde selvstændigt og kun have behov for meget lidt vejledning. Det er en balanceakt, som læreren bør indstille sig på i alle projektforløb.
Projekterne træner i særlig grad elevernes modelleringskompetence og deres kommunikationskompetence. Der bør lægges vægt på, at dokumentationen for et projekt fremstår som en helhed med en god kommunikationsværdi, hvilket vil sige, at besvarelsen kan læses (eller ses) og forstås, selv om læseren ikke kender opgaven på forhånd.
Som nævnt ovenfor, kan dokumentationen antage mange former. Ofte vil et projekt resultere i en rapport. Formålet med en matematikrapport er at give eleverne mulighed for at fremstille skriftlig dokumentation for en konkret problemstilling på et niveau eleven selv vælger. Det er derfor vigtigt at lave en åben problemformulering, så både stærke og svage elever kan finde udfordringer. Herudover kan eleven fordybe sig i dele af den teori, der ligger bag beregningerne. En sådan rapport vil typisk indeholde følgende hovedafsnit:

Opgaveanalyse:
En **kort** beskrivelse af, hvad opgaven går ud på, samt hvilke oplysninger der er givet.
Hvis der f.eks. mangler oplysninger, for at opgaven kan besvares, kan det være nødvendigt, at eleven drager nogle konklusioner og formulerer egne antagelser eller indhenter relevante oplysninger.

Løsningsmodel(ler):
En handlingsplan for, hvordan eleven tænker opgaven løst, og herunder hvilken matematisk teori, der skal anvendes i den relevante situation og om muligt også en begrundelse hvorfor. Dette afsnit træner eleven i at bevæge sig op på et højere abstraktionsniveau end blot at kunne løse en konkret opgave

Dokumentation:
Her skal selve opgaven løses, og alle udregninger dokumenteres, beskrives og evt. illustreres.
Det kan anbefales at eleven medtager et **teoriafsnit**, hvor den benyttede teori opsummeres og udvalgte dele uddybes. Relevante beviser medtages. Denne del er et godt afsæt for den mundtlige prøve.

Vurdering:
En diskussion af den fundne løsning i relation til opgaven, f.eks. de opstillede forudsætninger og antagelser.

Mængden af skriftligt arbejde måles i elevtid, der kan være en uhåndgribelig størrelse. En opgave tager 1 elevtime, hvis en gennemsnitselev er en time om at regne den. Ifølge bekendtgørelsen er der mindst 100 elevtimer til det skriftlige arbejde i matematik B. Mange af disse elevtimer bliver brugt på arbejdet med projekterne, der bredt skal dække emnerne indenfor såvel kernestoffet som det supplerende stof.
Det kan være meget vanskeligt at sætte elevtid på de forskellige opgavetyper. Her er det en idé at bede eleverne fortælle hvor lang tid, de har brugt på en konkret opgave, for at få en fornemmelse af deres tidsforbrug. Omvendt er det også vigtigt at fortælle eleverne, hvor lang tid man forventer, de skal bruge på opgaven, så eleverne ikke bruger alt for lidt eller alt for meget tid på en opgave.

IT

Helt fra htx-uddannelsens start har brugen af avancerede lommeregnere og it været en del af matematikundervisningen. I dag har de fleste elever bærbare computere og brugen af CAS er en forudsætning for arbejdet med projekterne og mange af de virkelighedsnære opgaver og eksempler, der arbejdes med i undervisningen.

It integreres løbende i undervisningen. Som eksempler på anvendelsen af it kan nævnes:
- illustration af matematiske forhold f.eks. animationer, der viser overgang fra differenskvotient til differentialkvotient
- som redskab, når eleven selv eksperimenterer f.eks. med forhold ved indskreven eller omskreven cirkel, trekantens areal eller betydningen af konstanterne *a*, *b*, og *c* for forløbet af grafen for en 2.gradsfunktion
- ved gentagne udregninger som f.eks. beregninger af arealsummer ved forskellige inddelinger samt tabelgenerering
- til analytiske beregninger, f.eks. bestemmelse af afledet funktion og stamfunktion samt til symbolmanipulation
- numeriske beregninger ved bestemmelse af arealer ved integration, differentialkvotienter samt løsning af ligningssystemer og regression.
- til dokumentation ved skriftlige besvarelser, f.eks. beregninger, graftegning og tekstbehandling.

Der findes et utal af matematikprogrammer af forskellige typer og med forskellige formål. Programmerne kan opdeles i to grupper: tegneprogrammer, der ofte også kan foretage numeriske beregninger og regneprogrammer, der kan lave analytiske beregninger og symbolmanipulation. Eleverne har krav på at få en indføring i et udvalg af disse programmer, og det er vigtig at man med jævne mellemrum arbejder med brugen af disse så eleverne får indarbejdet det nødvendige kendskab til hvad programmerne kan, og hvilken terminologi/syntaks de benytter.

Mængden af internetsider med matematikindhold vokser med stor hast, og dette giver mulighed for at hente inspiration til undervisningsmateriale. På Emuen findes en mængde materialer især for stx, og disse vil i mange tilfælde også kunne bruges for htx. I takt med at htx-lærerne indsender deres eget materiale vil vi få opbygget vores egen materialesamling. Der findes sider, hvor eleven på egen hånd kan arbejde med matematiske emner og øve specifikke færdigheder. Der arbejdes på en side "Træneren", der kommer til at ligge på EMUen. Søger man på "Interaktive matematikopgaver" finder man links til mange udmærkede sider.
I forbindelse med brugen af CAS-værktøjer vil man undertiden opleve, at ikke alle opgaver kan løses symbolsk, men at man må "nøjes" med en numerisk løsning. Denne problemstilling er værd at tage op i undervisningen:

- Hvordan skelner man mellem de to løsningstyper?
- Hvordan fungerer CAS-værktøjet?
- Hvilken løsningstype er at foretrække i en given situation?
- Hvordan dokumenterer man en numerisk bestemt løsning? (indsættelse, grafisk eftervisning etc.)

Ved løsning af opgaver optræder der sommetider "falske løsninger". Her er det relevant at undersøge

- Hvordan afgøres hvilken løsning, der er korrekt?
- Hvilken dokumentation kræves? (figur, indsættelse af værdier.)

Dette er væsentlige spørgsmål, som også er en del af elevens hjælpemiddelkompetence.

Hvornår man vil indføre brug af matematikprogrammer, og i hvor stor udstrækning man vil lade eleverne have computeren tændt hele tiden til f.eks. noteskrivning, kommer helt and på lærerens indstilling og klassens arbejdsmoral og koncentrationsevne. Men det skal pointeres, at der **skal** arbejdes med matematikprogrammer i undervisningen, og at det afsluttende projekt forudsætter, at eleverne er grundigt forberedt på at arbejde med disse programmer.

Dokumentation

Der kan selvsagt ikke gives en nøjagtig beskrivelse af, hvad en tilstrækkelig dokumentation er. Her må man vurdere, om eleven har redegjort for den matematik, der er anvendt og i hvor høj grad eleven viser matematisk forståelse. Her vil det kravene til dokumentation også afhænge af hvor fokus er i opgaven. Hvis opgaven er stillet i relation til et netop gennemgået emne, f.eks. teorien om den rette linjes ligning, og eleverne ud fra 2 punkter eller et punkt og en hældning skal finde forskriften, vil man nok ikke nøjes med en ligning, der er fundet ved regression af de to punkter. Dette kan være en udmærket løsningsmetode, hvis fokus ligger på f.eks. at modellere en konkret problemstilling i fysik.
Der skal arbejdes med tegning af figurer og skitser – gerne i hånden, for de elever, der bruger alt for lang tid på at lave tegninger på computeren. Især indenfor trigonometri og geometri er figurer uundværlige og der skal lægges vægt på at eleverne laver hjælpetegninger, og at tegningernes benævnelser korresponderer med teksten ved siden af (samt en eventuel opgavetekst).

Eleven har metodefrihed, herunder valg af hjælpemidler. Det er tilladt at bruge it-værktøjernes kommandoer til bestemmelse af for eksempel vektorlængder, arealer, ekstremumspunkter, vinkler m.m. Men eleverne skal være opmærksomme på, at når en række af beregninger erstattes med en enkelt indtastning kræver det ofte ledsagende kommentarer for at dokumentere, at man besidder fx tankegangs- og ræsonnementskompetencen. Disse kan være i form af matematiske argumenter, konkrete vurderinger eller verificering af resultaterne ved indsættelse eller tegning af en figur.

Ved skriftlige besvarelser skal de løsninger, der bestemmes ved hjælp af CAS-værktøjer opfattes som ligeværdige med de løsninger, der fremkommer uden, når løsningen er dokumenteret og om nødvendigt vurderet. Eleven skal være opmærksom på, at når mellemregninger udelades, og det vil ofte ske, når CAS-værktøjer er i brug, bør disse erstattes af en forklarende tekst. Det skal altid fremgå af besvarelsen hvilken

matematik, der har været i brug, for at nå frem til den angivne løsning. Her kan være tale om benyttede regneregler eller sætninger. De ligninger, der løses, skal altid opskrives.
Desværre er det ikke alle programmer, der er lige velegnet til at dokumentere løsningerne i. Her har man en forpligtelse til at gøre eleverne opmærksomme på, at det program, der benyttes til at finde den matematiske løsning på et problem måske ikke kan stå alene, og man derfor må over i f.eks. et tekstbehandlingsprogram for at dokumentere løsningen ved brug af korrekt matematisk notation. Her skal det bemærkes, at det i beregningsdelen er det helt i orden at bruge programmets syntaks, men at det tydeligt skal fremgå i tekst og ved opskrivning af ligninger, hvad det er for en matematik, der er i spil, og hvordan problemet løses (f.eks.: ”vha. lineær regression bestemmes den bedste rette linje gennem punkterne…”, ”nu løses ligningssystemet…”, ”funktionsudtrykket differentieres og man finder nulpunkt for den afledede funktion…” osv.). I resultater, der er tal kan både ”,” og ”.” benyttes som decimalseparator. Ovenstående er en del af kommunikationskompetencen samt symbol- og formalismekompetencen.

Evaluering

Løbende (formativ) evaluering

Formålet med den løbende evaluering er dels at give eleven respons på vedkommendes arbejde, så dette kan forbedres og dels hjælpe underviseren med at finde elevens niveau ved karaktergivningen. Beskrivelsen af karaktererne 12, 7 og 02 i både mundtlig matematik B samt i projekter findes på fagets hjemmeside på EMU'en http://www.emu.dk/gym/htx/ma/uvm/eksamen.html
En konkret og forståelig formativ evaluering på elevernes skriftlige og mundtlige arbejde er en forudsætning for, at eleverne udvikler sig og erhverver sig de kompetencer, der er fagets mål. Man kan give skriftlige og mundtlige tilbagemeldinger. Væsentligt er det, at den er fokuseret, så eleven ikke skal forholde sig til mange forskelligartede rettelser på en gang. Med alt for mange rettelser kan det være svært at vide, hvor man som elev skal sætte ind med en særlig indsats. Man kan undertiden fortælle eleverne på forhånd hvad fokus for retningen er: dokumentation, korrekt svar, brug af figurer etc. Især ved matematikprojekterne giver det god mening for både elever og lærer, hvis man fokuserer på et enkelt eller to områder, når man evaluerer.

Afsluttende (summativ) evaluering

Matematik B afsluttes med en centralt stillet, it-baseret projektprøve, der er en del af elevens prøveudtræk. Alle elever, der afslutter matematik på B-niveau, dvs. elever, som ikke fortsætter på valghold i matematik A, skal lave det afsluttende projekt, og bedømmelsen af dette indgår i den afsluttende skriftlige standpunktskarakter.

Den afsluttende prøve i matematik B er en kombineret projektprøve og mundtlig prøve. Ved den mundtlige prøve trækker eksaminanden en opgave (et eksamensspørgsmål), der tager udgangspunkt i et af projekterne fra undervisningen. Den mundtlige prøve falder i 2 dele. I den ene del besvares den udtrukne opgave, og i den anden skal eksaminanden også redegøre for sin projektbesvarelse af det centralt udmeldte tema, der suppleres med uddybende spørgsmål for at afklare eksaminandens matematiske forståelse og ejerskab til opgaven. Sidstnævnte del af prøven må højst tage halvdelen af eksaminationstiden.
Rækkefølgen af de to dele bestemmer eksaminanden selv, gerne i samråd med eksaminator. For nogle eksaminander er det en fordel at starte med den udtrukne opgave, som man lige har siddet og forberedt sig på. Dette kræver at eksaminator og censor er bevidst om, hvor mange uddybende spørgsmål der er til projektet, så man eventuelt kan stoppe eksaminanden i tide, så der er tid nok til denne afklaring.

Udformning af mundtlige eksamensspørgsmål

Det anbefales, at eksamensspørgsmål består af 1-2 delspørgsmål. Hvis man vælger 2 delspørgsmål, kan det første formuleres således:

1. Gør kort rede for problemstillingen i projekt nr.…

Man kan eventuelt bede eksaminanden uddybe en konkret problemstilling f.eks. opstillingen af en konkret funktionsforskrift e. lign. Men man skal passe på med ikke at gøre dette spørgsmål for tidskrævende. Tanken er mere at få eleven i gang med noget, der tidligere er arbejdet grundigt med, og som eleven er tryg ved. Mange projekter involvere modellering, og det vil derfor være yderst relevant, hvis eleven i dette spørgsmål redegør for modelleringsprocessen i den konkrete situation ved kort at fortælle om 'ideen' i projektet. En sådan redegørelse kan være forberedt på forhånd og give eleven lidt ro og selvtillid inden prøven.

Det næste delspørgsmål (og eventuelt det eneste) bør udformes således, at eleven ved besvarelsen får mulighed for at demonstrere matematiske kompetencer herunder brugen af ræsonnementer. Spørgsmålet knytter sig til den teori, der er arbejdet med i projektet.
Det er vigtigt at delspørgsmålene formuleres bredt, så eleven selv kan vælge niveauet for fremlæggelsen. De skal på den ene side give den sikre elev muligheder for at demonstrere en beherskelse af den matematiske teori, medens de på den anden side kan give den usikre elev muligheder for at demonstrere en "håndværksmæssig" viden om matematiske emner ud fra konkrete eksempler. For at hjælpe eleven kan man tilføje nogle stikord, som vedkommende**kan** tage udgangspunkt i. Men hvis eleven har en anden indgangsvinkel til spørgsmålet, bør dette accepteres. Det kan være problematisk at stille konkrete "regneopgaver", som eleven føler sig forpligtet til at regne på tavlen.
Eksempler på spørgsmål kan være:

- Redegør for bestemmelse af sider og vinkler i en vilkårlig trekant
  Stikord: sinusrelationen, cosinusrelationen
  (Projekt om trigonometri)
- Redegør for bestemmelse af afstande i planen
  Stikord: afstand mellem punkter, afstand mellem punkt og linje
  (Projekt om analytisk plangeometri eller evt. vektorregning)
- Gør rede for hvad en vektor er, og giv eksempler på anvendelser af vektorer
  Stikord: Stedvektor, repræsentationer, projektioner, kræfter
  (Projekt om vektorregning)
- Redegør for dele af differentialregningen og giv eksempler på anvendelser
  Stikord: sekant- og tangenthældning, regneregler, bestemmelse af ekstrema, optimering
  (Projekt om differentialregning)

Det er vigtigt at forberede eleverne på, hvordan de mundtlige spørgsmål kan se ud, og hvad man forventer, de skal gøre under prøven. Afhold gerne "prøveeksamen" med spørgsmål, der har samme form som eksamensspørgsmålene. Dette kan eventuelt gøres i forbindelse med afslutningen af et emne, eller når eleverne får et projekt tilbage.
Den samlede mængde af eksamensspørgsmål skal dække alle emneområder, således at væsentlige områder ikke er udeladt.

Bedømmelseskriterier

På samme måde som prøven er opdelt i projektet og i den mundtlige del, er bedømmelseskriterierne opdelt, idet det ikke er alle de matematiske kernekompetencer der er lige nemme at evaluere ved hver af de to typer. På denne måde bliver nogle af de faglige mål primært bedømt ved den mundtlige prøve og andre gennem projektet. Det betyder naturligvis ikke, at man ikke tager hensyn til det, hvis en elev ved den mundtlige prøve er i stand til at dokumentere f.eks. hjælpemiddelkompetencen. Det er blot ikke et af de faglige mål, der er i fokus her. På samme måde kan det være vanskeligt for en elev at dokumenter ræsonnementskompetence i projektet, idet der her arbejdes med konkrete problemstillinger Er eleven alligevel i stand til det, er det naturligvis fortrinligt.

Vejledende karakterbeskrivelse

Karakterbekendtgørelsen findes på https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=29307.
Karakterskalaen er karakteriseret ved at operere med et fejl- og mangelbegreb. Man skal altså bedømme i hvor høj grad en elev har opnået slutmålene for faget.

Nedenfor er angivet retningslinjer for opnåelse af karaktererne 12, 7 og 02 i matematik B
Beskrivelsen er naturligvis ikke udtømmende, og man skal derfor ved bedømmelsen fokusere på i hvor høj grad eleven har opnået de kompetencer, der er beskrevet i afsnit 2.1 Faglige mål.

Projektprøven på B-niveau

Karakteren 12:
I projektbesvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet korrekt og hensigtsmæssigt. Ud fra enkle matematiske ræsonnementer argumenteres sagligt for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er veldokumenteret med en sikker brug af figurer og symbolsprog.
Eksaminanden er i stand til at opstille og behandle simple matematiske modeller og vurdere såvel model som løsning. Der demonstreres fagligt overblik og eleven er i stand til at inddrage en meget stor del af stoffet i besvarelsen. Kommunikationsværdien er meget høj, idet der på en naturlig måde skiftes mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. Eksaminanden behersker fagets terminologi og kan skifte mellem forskellige repræsentationsformer.
Ved den mundtlige fremlæggelse af projektet fremgår det tydeligt, at eleven har ejerskab til rapporten. Eleven ved hvad der står i rapporten og kan redegøre for de anvendte metoder og beregninger.
I besvarelsen af det mundtlige spørgsmål demonstrerer eksaminanden stor fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder enkel matematisk bevisførelse. Eksaminanden udviser et stort overblik på alle felter samt evne til at generalisere og anvende stoffet i andre sammenhænge og kan skifte sikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog.
Der forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.

Karakteren 7:
I projektbesvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet godt og hensigtsmæssigt. Ud fra simple matematiske ræsonnementer argumenteres der i et vist omfang for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er dokumenteret med en god brug af figurer og symbolsprog, og der inddrages en god del af stoffet i besvarelsen. Eksaminanden er delvist i stand til at opstille og behandle meget simple matematiske modeller og vurdere løsningerne. Kommunikationsværdien er god, idet eksaminanden kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.
Ved den mundtlige præsentation viser eleven ejerskab til opgaven og kan redegøre for de angivne beregninger. Præsentationen er godt struktureret, og fagets terminologi benyttes. Der veksles på tilfredsstillende måde mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog.
I besvarelsen af det mundtlige spørgsmål demonstrerer eksaminanden en vis fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement, dog med udeladelse af visse argumenter. Eksaminanden har et godt overblik og kendskab til væsentlige områder af stoffet og kan i nogen grad generalisere. En del af fremlæggelsen er eksempler på konkrete anvendelser.
Ved fremlæggelsen forekommer adskillige fejl og mangler.

Karakteren 7 kan opnås på flere måder end ovenfor beskrevet. Fx kan en virkelig god projektbesvarelsen med tilhørende fremlæggelse til en vis grad opveje en ringere besvarelse af det mundtlige spørgsmål og omvendt.

Karakteren 02:
I projektbesvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet på et meget elementært niveau. Matematiske ræsonnementer anvendes usikkert og usammenhængende. Dokumentationen er mangelfuld med ringe brug af figurer og symbolsprog. Der demonstreres et beskedent fagligt overblik og kun elementære dele af stoffet inddrages. Eksaminanden er i ringe grad i stand til at opstille og behandle meget simple matematisk modeller, men kan løse elementære opgavetyper. Anvendelsen af fagets terminologi er usikker. Kommunikationsværdien er beskeden, idet eksaminanden kun i mindre udstrækning kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.
Præsentationen og besvarelsen af spørgsmål i forbindelse med projektbesvarelsen er usikker, men eleven viser ejerskab til opgaven. I de tilfælde, hvor eksaminanden på trods af en virkelig god projektbesvarelse ikke udviser ejerskab til rapporten, idet der ikke kan redegøres for hverken metoder, beregninger eller figurer, skal dette have konsekvenser for karaktergivningen.
I besvarelsen af det mundtlige spørgsmål er fremstillingen ustruktureret. Eksaminanden behersker kun mangelfuldt fagets terminologi og skifter usikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog, samt mellem forskellige repræsentationsformer. Eksaminanden demonstrerer en ringe fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement. Fremlæggelsen er usikker og består primært af eksempler på konkrete anvendelser. Eksaminanden har et beskedent overblik men behersker simpel symbolmanipulation.