Matematik A – Htx
Vejledning / Råd og vink
Afdelingen for gymnasiale uddannelser 2014

Alle bestemmelser, der er bindende for undervisningen og prøverne i de gymnasiale uddannelser, findes i uddannelseslovene og de tilhørende bekendtgørelser, herunder læreplanerne. Denne Vejledning/Råd og vink indeholder forklarende kommentarer til nogle af disse bestemmelser, men indfører ikke nye bindende krav. Desuden gives eksempler på god praksis samt anbefalinger og inspiration, og den udgør dermed et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse. Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Indhold

Læreplanen

Som underviser i matematik på htx er det væsentligt at man sætter sig godt ind i fagets læreplan. Alle læreplaner er bygget op på samme måde: Først kommer afsnittene om fagets identitet og formål, og herefter følger de nok mest læste afsnit, der handler om fagets mål og hvordan man kan opfylde disse mål gennem det fastsatte kernestof og det supplerende materiale. Derefter beskrives undervisningens tilrettelæggelse f.eks. arbejdsformer, brug af hjælpemidler og hvordan faget kan spille sammen med andre fag, og endelig sluttes af med et afsnit om evaluering herunder eksamen og bedømmelseskrav. Sidstnævnte hænger nøje sammen med de faglige krav, som er beskrevet tidligere i læreplanen. Imidlertid er læreplanen relativt kortfattet formulere, og der kan være usikkerhed om tolkningen af forskellige begreber. Hvad forstås ved: analytisk plangeometri, herunder anvendelse af analytiske beregningsmetoder? Hvilke rumlige figurer, bør der arbejdes med? Hvilke typer projekter kan bruges? Hvordan ser et mundtligt eksamensspørgsmål ud? etc. Det er spørgsmål som disse, der kan findes svar på i nærværende dokument.

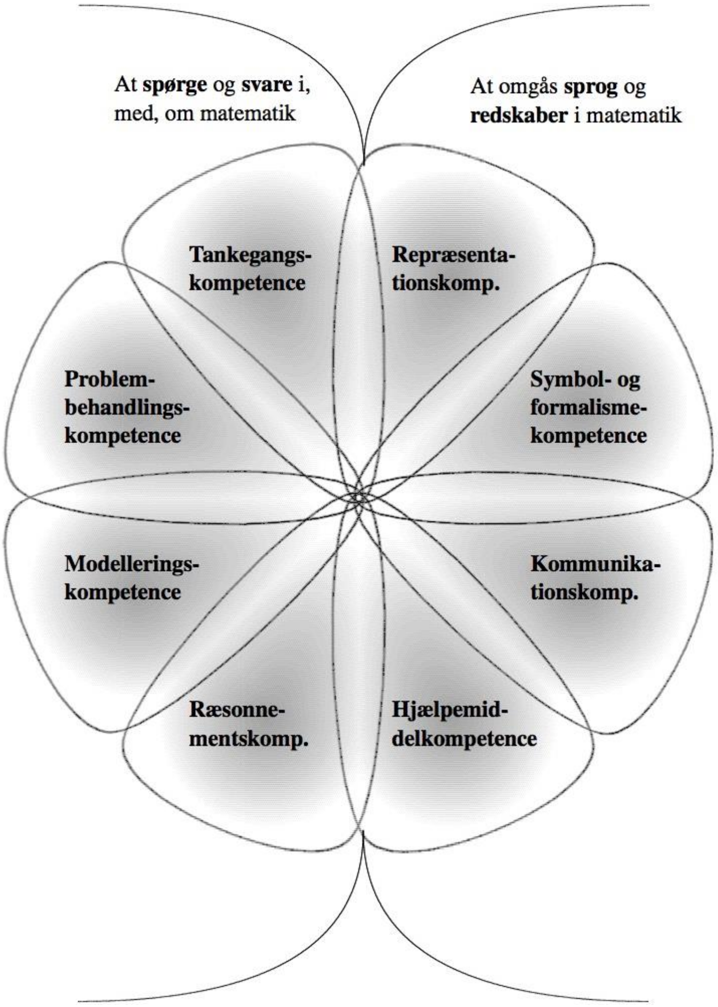
Denne vejledning skal ses i sammenhæng med følgende bekendtgørelser:

– Bekendtgørelse nr. 778 af 26/06/2013 om uddannelsen til højere teknisk eksamen (htx-bekendtgørelsen), herunder læreplanen for Matematik A (bilag nr. 21).

De faglige mål

De faglige mål er udtrykt vha. de 8 kernekompetencer i matematik, og det er slutmålene for tre års undervisning i faget, der angives her. Alle målene skal nås, og rækkefølgen er ikke udtryk for en prioritering af målene. I praksis vil man opdele de endelige mål i nogle delmål, der gradvis opfyldes. Hvorvidt eleven har opfyldt fagets slutmål, undersøges ved de afsluttende prøver og i forbindelse med afgivelsen af de afsluttende standpunktskarakterer. Her bedømmes eleven i forhold til bedømmelses-kriterierne, som ligeledes er udtrykt vha. kernekompetencerne. Nogle af de faglige mål evalueres fortrinsvis gennem det skriftlige arbejde, mens andre især bedømmes ud fra de mundtlige præstationer.

De matematiske kernekompetencer.
I publikationen Kompetencer og Matematiklæring af Mogens Niss m.fl. findes en nøje beskrivelse af de 8 matematiske kernekompetencer. Nedenfor er disse kort beskrevet i forhold til målene for matematik A på htx.



Kilde: KOM-rapporten

Kernekompetencerne kan opfattes som bladene i en blomst. Bladene overlapper hinanden, og det gør det ofte vanskeligt at arbejde med en kompetence i dens "rene" form. Man opdeler ofte kompetencerne i 2 hovedgrupper; en der handler om spørgsmål og svar i og med matematik, samt en der beskæftiger sig med brug af sprog og redskaber i faget. Nedenfor er de væsentligste træk ved hver enkelt kompetence beskrevet.

Tankegangskompetence

Denne kompetence består i

– at være bevidst om, hvilke slags spørgsmål, der er karakteristiske for matematik og selv at kunne stille sådanne spørgsmål
– at have en fornemmelse af hvilke typer af svar, man kan forvente.

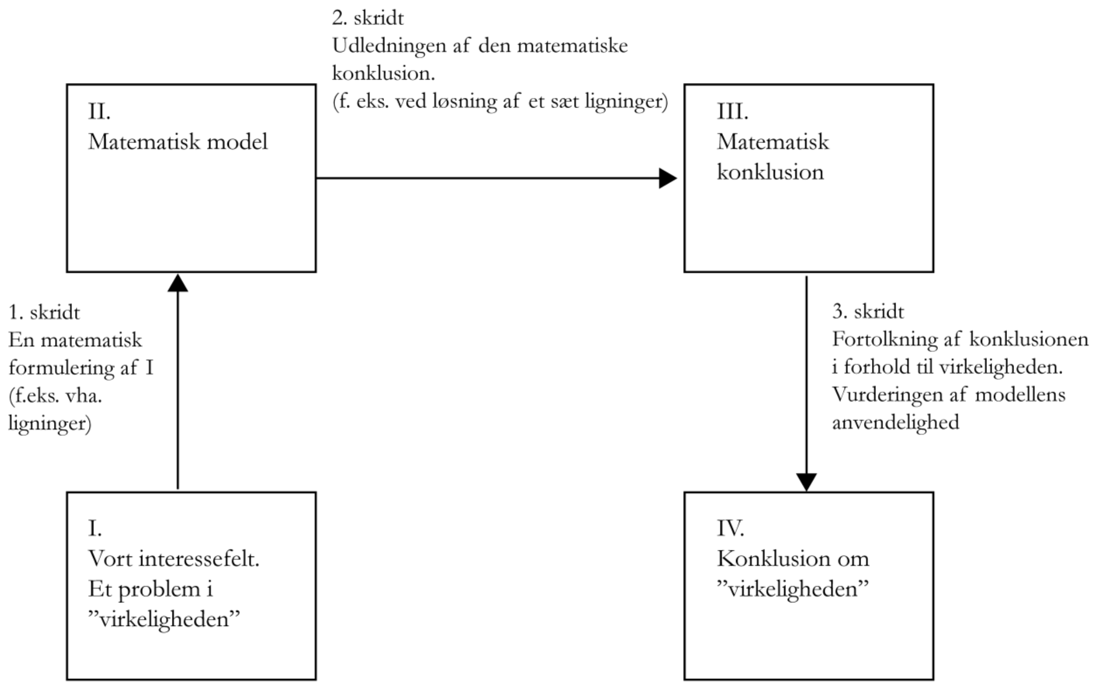
I matematik A arbejder man med tankegangskompetencen, både når der læses tekster, arbejdes med konkrete problemstillinger og diskuteres matematik. Eleverne skal opnå en forståelse af i hvilke situationer matematik kan komme i spil – hvad det er for problemer faget kan løse, og hvilken slags løsninger, der findes på et givet problem. Det kan f.eks. dreje sig om betydningen af begrebet udsagn, hvad et lighedstegn betyder, og hvor de bruges. Andre eksempler er forskellen på et tal og en mængde eller hvorfor en lodret linje eller en cirkel ikke er grafen for en funktion etc.

Problembehandlingskompetence
Denne kompetence består i
– at kunne opstille (opdage, formulere, afgrænse og præcisere) forskellige problemer, rene matematiske problemer såvel som problemstillinger fra matematik i anvendelse, åbne såvel som lukkede
– at kunne løse sådanne færdigformulerede matematiske problemer - egne såvel som andres (måske på forskellig måde).

Dette er traditionelt den kompetence, der har været størst fokus på i matematikundervisningen i form af opgaveregning. Men opgaveregningen er kun en del af problembehandlingskompetencen, der også drejer sig om selv at formulere og opstille problemer, der skal løses.

Modelleringskompetence
Denne kompetence består i
– at kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller
– at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed
– at kunne (af)matematisere
– at kunne udføre aktiv modelbygning og
– at bringe matematik i spil til behandling af anliggender udenfor matematikken selv.

Modelleringskompetencen har helt fra htx' start fyldt meget i matematikundervisningen, idet den ofte kommer i spil i samarbejdet med andre fag, og fordi man her arbejder med mere eller mindre virkelige og realistiske problemstillinger. Mange undersøgelser viser, at matematiseringen af et givet problem er det, eleverne har allersværest ved, og man skal derfor gøre en særlig indsats her. Samtidig skal det pointeres, at vurdering af resultater og modellens rækkevidde er en vigtig del af modelleringen. Modelleringsprocessen kan anskueliggøres ved følgende figur



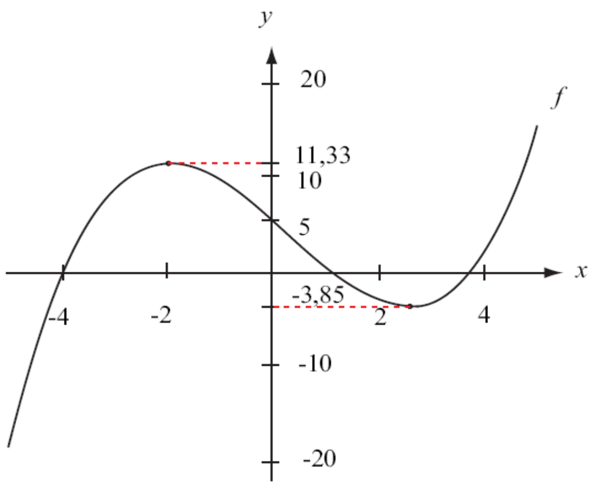
Eksempel: Beskriv tilgængelige data for befolkning i perioden 1900 - 2000 ved hjælp af en vækstmodel.

Ræsonnementskompetence
Denne kompetence består i

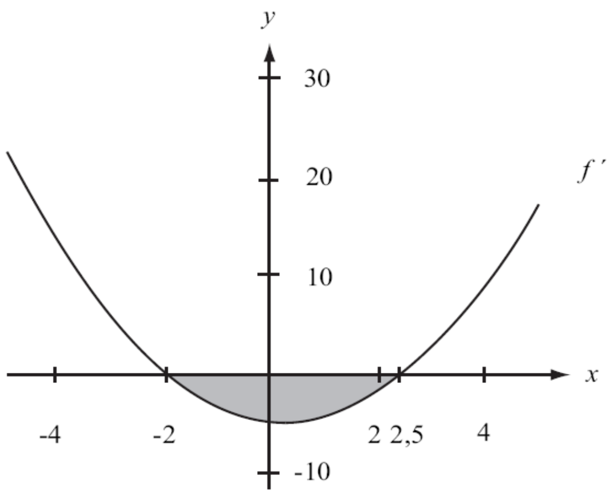
– at kunne følge og bedømme en kæde af matematiske argumenter fremsat af andre
– at kunne forstå, hvad et matematisk bevis er - skelne mellem hovedpunkter og detaljer.

Ræsonnementskompetencen handler i høj grad om bevisførelse men er meget mere end det. I nedenstående opgave fra sommeren 2009 skal eleverne bestemme et areal ud fra argumenter om sammenhængen mellem en funktion, dens afledede og dens stamfunktion:

Graferne for f og f' er vist på henholdsvis figur 5 og figur 6.



Figur 5



Figur 6

a) Beskriv monotoniforholdene for f.

Grafen for f' og x-aksen afgrænser et område, som er vist gråtonet på figur 6.

b) Bestem ved hjælp af figur 5 og figur 6 arealet af dette område.

Et andet eksempel kan være ræsonnementer om ensliggende vinkler eller ligedannede trekanter i en geometriopgave.

I læreplanen står, at eleverne skal være fortrolige med matematiske ræsonnementer. Dette opfattes ofte som synonymt med bevisførelse, men er et langt bredere begreb. Et matematiks ræsonnement er en kæde af forbundne argumenter, der skal retfærdiggøre en matematisk påstand. Ræsonnementer benyttes derfor hver gang man skal begrunde fx brugen af en bestemt metode eller sætning. Et bevis derimod er en logisk deduktion, der hviler på nogle præmisser og som er fremsat for at retfærdiggøre en påstand om egenskaber ved og relationer mellem veldefinerede matematiske objekter. Bevisførelse vil derfor i gymnasiesammenhæng oftest forekomme gennem reproduktion, hvorimod eleverne både har brug for at kunne ræsonnere, når de skal gengive andres argumenter, og når de selv skal komme frem til en matematisk sandhed i eksempelvis induktive forløb eller i skriftlige opgaver og projekter. Det er vigtigt at eleverne er fortrolige med begge begreber.
Arbejdet med bevisførelse omfatter gengivelse og forklaring af de enkelte trin i beviser for udvalgte sætninger, samt kendskab til forskellige bevistyper f.eks. direkte bevis, bevis ved modstrid (indirekte bevis), induktionsbevis etc. Eksempler på beviser der benytter forskellige slags argumenter er sinus- og cosinusrelationerne, differentiation af summen af 2 funktioner, differentiation af x^n, rumfangsformlerne for omdrejningslegemer etc. Det vil ofte hjælpe eleverne, hvis ræsonnementerne følger af en konkret figur. Det kan f.eks. være brugen af ligedannede trekanter i beviset for sætningen om afstand for et punkt til en ret linje. Sætninger hvor man "regner" sig frem til resultatet som f.eks. formlen for halverings-/fordoblingskonstanten for en eksponentialfunktion, er også god. Her kan eleven opstille en ligning ud fra en figur af situationen og dernæst regne sig frem til formlen. Omvendt har mange elever svært ved beviser, der kræver tricks eller indførelse af smarte hjælpefunktioner etc. De er ofte svære at huske, fordi eleverne ikke kan se meningen med disse "gode idéer".
Der er ikke krav om at bestemte beviser *skal* indgå, men eleverne skal stifte bekendtskab med bevisførelse og matematiske ræsonnementer indenfor et bredt udvalg af kernestoffet og det supplerende materiale.
Et emne om bevisførelse og brug af ræsonnementer vil egne sig glimrende til et SO-projekt om argumentationsformer i forskellige fag. Det vil være med til at tydeliggøre for eleverne, hvorfor matematiske ræsonnementer er så væsentlige for faget, hvor de bruges, og hvordan de er med til at definere matematikfagets egenart.

Repræsentationskompetence
Denne kompetence består i:
– at kunne forstå og betjene sig af forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (symbolske, algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammer, tabelmæssige)
– at kunne forstå de indbyrdes forbindelser.

Her kan arbejdes med de forskellige repræsentationer af variabelsammenhænge: forskrift, graf, tabel m.m. og deres styrker og svagheder. Et andet eksempel er sammenhængen mellem en vektors koordinater og dens længde og retning. Der bør lægges vægt på betydningen af (arbejds)tegninger. F.eks. bør geometriske opgaver **altid** illustreres med en figur, der viser de indgående størrelser, og sammenhængen mellem beregning og figur skal følges af en tekst. I funktionsopgaver er det en god idé at vænne eleverne til at tegne grafer og tjekke resultater på denne måde.

Symbol- og formalismekompetence
Denne kompetence består i
– at kunne afkode symbol- og formelsprog

– at kunne oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog
– at kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk - herunder formler.

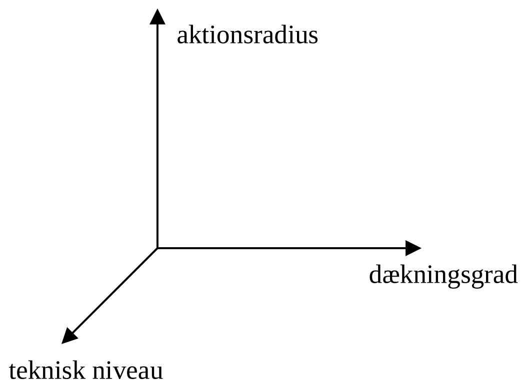
Symbol- og formalismekompetencen volder ofte eleverne problemer, især ved overgangen fra grundskole til htx. Her er det vigtigt, at man som underviser ikke forudsætter, at eleverne forstår den notation og brug af symboler, der er sædvanlig i gymnasielitteraturen. Se afsnittet om *læsning*.
Der arbejdes med den matematiske formalisme og brug af korrekt notation. Brugen af programmer, der ofte har deres helt egen syntaks, gør dette ekstra relevant.

Kommunikationskompetence
Denne kompetence består i
– at kunne sætte sig ind i og fortolke andres matematikholdige udsagn og "tekster"
– at kunne udtrykke sig på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender
– at kunne udtrykke sig skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Som eksempel kan eleverne lave en "lærebog" om bestemmelse af overfladearealer og rumfang af forskellige rumlige figurer, der kan benyttes i en 9. klasse i brobygning på htx. Der kan også arbejdes med brug af PowerPoint-præsentationer i faget og de begrænsninger, der er ved sådanne skærmpræsentationer.
Arbejdet med kommunikationskompetencen vil ofte være relevant i relation til Studieområdet.

Hjælpemiddelkompetence
Denne kompetence består i
– at have kendskab til eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed
– at have indblik i redskabers muligheder og begrænsninger i forskellige situationer
– at være i stand til at betjene sig af hjælpemidlerne.

Her inddrages konkrete materialer af forskellig art til begrebsdannelse og undersøgelse af sammenhænge. Lommeregner, computer, software som regneark, geometriprogrammer, interaktive programmer etc. benyttes.
I planlægning og udførelse af undervisningen er det vigtigt at fokusere på kompetencerne, da det er ud fra disse, at de faglige mål og bedømmelseskriterierne er sat op. Eleverne opnår matematikkompetencer gennem arbejdet med kernestof og supplerende materiale. Det kan anbefales at man i begyndelsen fokuserer på en enkelt eller få kompetencer af gangen og gradvist øger antallet. Man kan med fordel delagtiggøre eleverne i kompetencebeskrivelsen og diskutere hvilke kompetencer, der skal fokuseres på, i et givet undervisningsforløb.
For at øge bevidstheden om kompetencebeskrivelsen i faggruppen kan man f.eks. oprette en studiekreds blandt fagkollegerne, hvor begreberne diskuteres og afklares, og man kan kompetencebeskrive projektoplæg, opgaver og undervisningsforløb for at afdække i hvilket omfang, de alle kommer i spil.
Ved evaluering af elevens besiddelse af kompetencer, kan nedenstående 3-dimensionale beskrivelse benyttes:



Dækningsgraden fortæller i hvor høj grad de aspekter, som karakteriserer kompetencen, er dækket hos eleven, dvs. hvor mange af disse aspekter, han eller hun kan aktivere i forskellige situationer, og med hvor høj grad af selvstændighed aktiveringen kan ske.
Aktionsradius udgør det spektrum af sammenhænge og situationer eleven kan aktivere kompetencen i. Det *tekniske niveau* bestemmes af, hvor begrebsligt og teknisk avancerede områder og værktøjer eleven kan aktivere den pågældende kompetence overfor.

Hvilket stof skal der arbejdes med i undervisningen? – kernestof og supplerende materiale.

Som nævnt ovenfor er fagets faglige mål beskrevet vha. af de kompetencer eleverne skal opnå. Hvordan disse kompetencer erhverves kan ske på mange måder, både hvad angår hvilke arbejdsformer der anvendes og med hvilket matematisk stof, der arbejdes. Det matematiske stof opdeles i 2 kategorier: kernestof og supplerende stof. Kernestoffet er det, der er mere eller mindre fælles for alle elever, og som benyttes som udgangspunkt for den skriftlige eksamen i faget, Det supplerende stof vælges under hensyntagen til det faglige samspil i studieretningen, elevernes ønsker og evner og evt. lærerens særlige kompetencer.

Kernestoffet

Når der ovenfor står, at kernestoffet er mere eller mindre fælles for alle elever, skal dette forstås således, at det ikke er muligt at give en præcis liste over de emner og opgavetyper, eleverne skal have arbejdet med i løbet af de 3 år. Dette er en konsekvens af at læreplanerne ikke længere er pensumstyrede med derimod målstyrede I stedet skal der herunder beskrives nogle overordnede tanker om hvert delemne.

Kernestoffet er:
– *regningsarternes hierarki, reduktion, faktorisering, regler for regning med potenser, rødder og numerisk værdi, ligningsløsning både analytisk, grafisk og ved hjælp af it*

De fleste lærere vil opleve, at mange elever ikke har de regnefærdigheder, som vi forventer. Det betyder ikke at eleverne ikke har arbejdet og trænet disse ting, men er måske snarere et udtryk for, at de har svært ved at bruge det de har lært i én kontekst i helt andre sammenhænge, hvor sproget, symbolerne og metoderne er anderledes, end de er vant til. Derfor viser erfaringerne også, at man ikke løser problemet ved at afholde et "brush up" kursus, hvor der arbejdes intensivt med regneregler, ligningsløsning, brøker etc. Eleverne finder det meningsløst at træne tekniske færdigheder, som de ikke kan se, hvad de skal bruge til, og det er meget svært at lære noget, man finder meningsløst. Emnerne her er medtaget for at fastholde fokus på områder, der er vigtige forudsætning for at kunne opnå mange af de matematiske kernekompetencer. Eksempler er manipulation med tal og bogstaver i bevisførelse, forståelse for grundmængdens størrelse ved modellering osv.

Det er den enkelte lærer, der afgør hvor meget og hvordan der arbejdes med emnet, men det anbefales at man i vidt omfang integrere emnerne inden for de områder, hvor de benyttes, f.eks. at den almindelige algebra og løsning af ligninger og uligheder indgår i arbejdet med funktioner.

De fleste matematiklærere kan blive enige om, at det vil være en stor fordel for eleverne, hvis de kan potensregneregler, regning med brøker, kvadratsætninger etc. uden brug af hjælpemidler, og derfor er det også noget, man bør vise eleverne med jævne mellemrum, når det indgår i en sammenhæng. Men samtidig må vi også erkende at ikke alle elever kommer dertil, og for disse er brug af computer-programmer etc. en helt uundværlig ting, der kan understøtte begrebsforståelsen og muliggøre problembehandling.

– *grundlæggende klassisk geometri og trigonometri, forholdsberegninger i ligedannede trekanter, beregninger i retvinklede og vilkårlige trekanter, bestemmelse af areal af plane figurer samt volumen og overfladeareal af rumlige figurer*

Inden for den klassiske geometri skal eleverne have kendskab til begreber som højder, medianer, vinkelhalveringslinjer, ind- og omskreven cirkel i en trekant, linjer, cirkler og punkter. Begreberne ligedannethed og ensvinklede trekanter er centrale for emnet og benyttes i mange af de beviser, der er gode eksempler på matematiske argumentation og ræsonnement. Det vil her være fornuftigt her at diskutere forskellen på eksempler og beviser, samt styrken i et matematisk bevis. Her kan arbejdet med forskellige geometriprogrammer gøre undervisningen mere varieret og understøtte elevernes begrebsforståelse. Emnet har endvidere den store fordel, at mange af de matematiske ræsonnementer, der benyttes er "algebrafri", og algebra er en af fagets helt store snublesten. Man kan derfor arbejde med matematiske argumenter, uden de drukner i beregninger, omskrivninger og bogstavmanipulationer, der ofte kommer til at overskygge, hvad den matematiske substans i virkeligheden handler om.
Cosinus, sinus og tangens kan introduceres ud fra ligedannede trekanter eller ud fra koordinaterne til punkter på enhedscirklen. Trigonometriske grundligninger og simple trigonometriske formler indgår i undervisningen, og der lægges vægt på nødvendigheden af kontroltegninger.
Man arbejder med regulære polygoner og forskellige typer af plane og rumlige figurer som f.eks. prisme, cylinder, kegle, keglestub, pyramide, pyramidestub, kugle, kugleudsnit og kugleafsnit.
Ved udledning af formlerne for overfladeareal og rumfang af udvalgte figurer, kan eleverne inddrages i et induktivt forløb, hvor de med vejledning, selv kan udlede mange af formlerne. F.eks. kan eleven lave udfoldninger af cylinder, kegle og keglestub og derigennem bestemme udtryk for overfladearealerne. I arbejdet med integralregning kan emnet tages op igen, og yderligere areal- og volumenformlerne kan udledes. Da der jo findes et utal af plane og rumlige figurer, forventes det ikke at eleverne har arbejdet med alle mulige konkrete eksempler. Der imod anbefales det at give dem kendskab til relevante bøger/formelsamlinger/hjemmesider, hvor man kan finde de nødvendige matematiske udtryk og samtidig arbejde med forståelse af figurer og oversættelse af konkrete oplysninger til generelle formler, så eleven vil kunne bestemme de ønskede arealer og rumfang.

– *analytisk plangeometri, herunder anvendelse af analytiske beregningsmetoder*

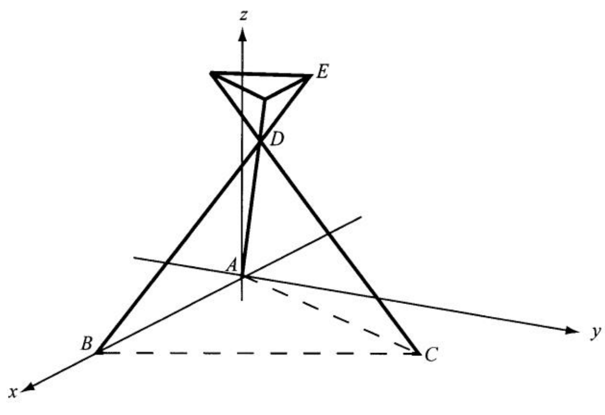
I dette emne arbejdes der med den analytiske beskrivelse af forskellige geometriske figurer i planen herunder cirklens, parablens, hyperblens og linjens ligning. Som introduktion kan cirkler, parabler og hyperbler f.eks. beskrives som keglesnit. Når man indenfor dette emne skal udvælge beviser, der bedst bidrager til elevernes ræsonnementskompetence, bør man overveje, hvad elevens udbytte med arbejdet er, og om dette står mål med den tid, der bruges. F.eks. kan man nemt komme til at bruge meget lang tid på omskrivninger mellem forskellige udgaver af cirklens ligning eller bestemmelse af skæring mellem 2 linjer ved determinantmetoden, uden eleverne opnår nogen større forståelse for den bagved liggende matematik, især da it-værktøjer her er meget effektive. Omvendt er der mange gode ræsonnementer i beviserne for sætningerne om ortogonale linjer og afstand mellem punkt og linje som samtidig fører til et nødvendigt udtryk i forbindelse med løsning af konkrete opgaver.

– *geometrisk og analytisk vektorregning i plan og rum, herunder bestemmelse af projektioner, afstande og vinkler; linjer, planer, kugler og kuglens tangentplan*

Vektorer defineres ved begge deres repræsentationer: længde og retning samt koordinater. Hvor matematik A er i en studieretning kan man med fordel arbejde med plane og rumlige vektorer som et samlet emne. Også her skal sætninger og beviser udvælges med omhu set i lyset af de kompetencer eleverne skal opnå, og igen vil det være vanskeligt at arbejde med opgaver, der belyser alle tænkelige problemstillinger vedrørende projektioner, afstande, vinkler etc. Det er altså vigtigt at fokusere på forståelsen af de forskellige problemstillinger samt de hjælpemidler, der gør det muligt for eleverne at løse problemer, de ikke nødvendigvis er stødt på i samme form før. Som et eksempel kan nævnes at man i undervisningen måske har arbejdet med skæring mellem linje og plan. Får eleverne herefter til opgave at finde skæringen mellem linje og kugle, er det de samme metoder, der skal benyttes, og forstår eleven den matematik, der ligger til grund for metoden, kan opgaven løses med det rette hjælpemiddel. Et eksempel på en opgave, hvor forståelse spiller en stor rolle er **Sømærket**, der er gengivet nedenfor. Her har eleverne typisk ingen problemer med at finde linjens parameterfremstilling, men at forstå hvad parameterfremstillingen er et udtryk for, og benytte dette til at bestemme koordinaterne il punktet E volder helt andre problemer. Her er det tanken, at når højden over jorden er kendt kan man bestemme det relevante t ved at løse ligningen $z(t) = 8$. En indsættelse af t i parameterfremstillingen vil derefter give de ønskede koordinater.

Opgave Sømærket

Billedet viser et sømærke, der står ved Sidselbjerg strand ved vestkysten.



Figur 1

Figur 1 viser konstruktionen indlagt i et retvinklet koordinatsystem. Alle mål er i meter. Punkterne har koordinaterne $A(0;0;0)$, $B(10;0;0)$, $C(5;9;0)$ og $D(5;3,1;6)$.

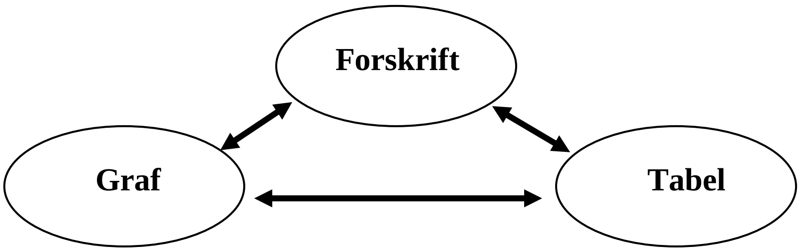
a) Bestem længden af linjestykket BD
b) Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem B og D

Punktet *E* ligger på linjen gennem *B* og *D*. Afstanden fra punktet *E* til planen der indeholder *A*, *B* og *C* er 8 m.

c) Bestem koordinaterne til punktet *E*
d) Bestem vinklen mellem linjerne *BD* og *CD*.

– *funktionsbegrebet; egenskaber ved funktioner af følgende typer: polynomier, eksponential- og logaritmefunktioner, potensfunktioner og trigonometriske funktioner samt sammensætninger af disse*
– *bestemmelse af en forskrift, herunder benyttelse af regression, anvendelse af funktioner ved opstilling af modeller samt til løsning af tekniske, teknologiske eller naturvidenskabelige problemer*

Hvad er en funktion? Forskning viser, at funktionsbegrebet og variabelsammenhæng er meget vanskeligt og abstrakt for de fleste elever. Det kan derfor være hensigtsmæssigt at begynde med mange konkrete eksempler, før den endelige definition stilles op.
I forbindelse med indførelse af funktioner, vil det være fornuftigt at tale om forskellige repræsentationer og deres styrker og svagheder:



Man behøver blot at åbne en avis, så er der eksempler på forskellige repræsentationer af funktioner, og disse repræsentationer er ofte et godt udgangspunkt for en diskussion af emnet.
Med fokus på modelleringskompetencen kan man arbejde med opstilling af sammenhænge ud fra givne data f.eks. målepunkter og/eller hældninger. Disse sammenhænge kan beskrives vha. de forskellige repræsentationer nævnt ovenfor. En del af undervisningen beskæftiger sig med bestemmelse af funktioners forskrifter ved opstilling og løsning af ligningssystemer eller ved regression. Her er it-hjælpemidlerne en uvurderlig hjælp. For at afgøre en funden models validitet, bør punkter og model **altid** indtegnes sammen, så graden af overensstemmelsen anskueliggøres. I den forbindelse kan styrker og svagheder ved regressionskoefficienten diskuteres. Ved påvisning af eksponentiel- eller potenssammenhæng arbejdes med afbildning af funktioner i logaritmiske koordinatsystemer. Her er det vigtigt at pointere over for eleverne, at når der skal bestemmes en matematisk model, f.eks. en eksponentiel model ud fra et antal målepunkter, så er disse målepunkter behæftet med en usikkerhed/fejl, og de kan derfor **ikke** direkte benyttes ved indsættelse i forskriften for en eksponentiel udvikling $f(t) = b \cdot a^t$ til bestemmelse af konstanterne a og b. Her må enten benyttes regression eller målepunkterne indtegnes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem så den bedste rette linje kan laves, herefter kan koordinaterne for 2 punkter aflæses, og endelig kan konstanterne bestemmes ved indsættelse i forskriften.
Nedenfor er givet et eksempel på en opgave i modellering samt et løsningsforslag.

Opgave Skarven

Skarven yngler i kolonier. Reden bygges enten i træerne (som på billedet) eller på jorden.

I perioden 1982 til 1991 udviklede bestanden af skarver sig voldsomt.

I tabellen ses antallet af skarvereder i perioden 1982 til 1991. Tallene angiver antal reder ved begyndelsen af året.

http://www.fritidsfiskerforbundet.dk/

Årstal	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Antal	3713	4944	6272	7585	9503	12188	14116	18901	23557	29141

Kilde: *Bestandsregulerende faktorer hos skarv* af Christian Dieperink

a) Vis at antallet at skarvereder som funktion af tiden t (målt i år efter 1982) tilnærmelsesvis kan beskrives ved en eksponentiel model

b) Bestem forskriften for denne model

c) Benyt modellen til at bestemme, hvornår man kan forvente at antallet af skarvereder overstiger 35.000

I 1996 kulminerede den danske skarvebestand med 43.000 reder.

d) Benyt modellen til at forudsige antallet af skarvereder i år 1996 og kommenter resultatet

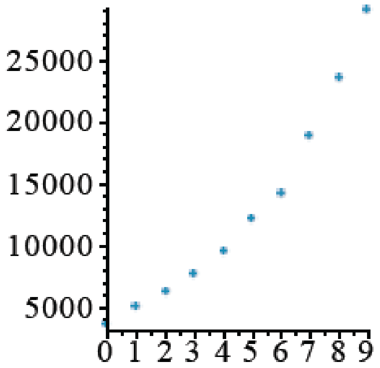
Løsningsforslag

Antal år fra 1982 gemmes i vektoren År, og antal skarvereder (i begyndelsen af året) gemmes i vektoren Antal

$År := \langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$:
$Antal := \langle 3713, 4944, 6272, 7585, 9503, 12188, 14116, 18901, 23557, 29141 \rangle$:

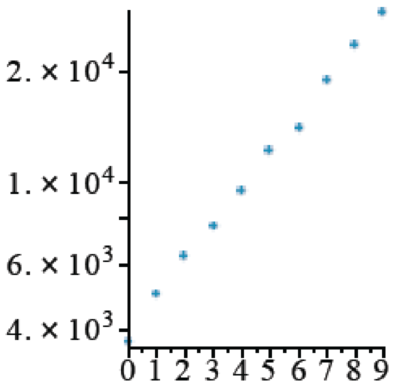
a) De givne data indtegnes i et koordinatsystem

$ScatterPlot(År, Antal)$



Punkternes beliggenhed kan tyde på at det er en eksponentiel model. For at vise om dette er tilfældet, indtegnes data også i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

$ScatterPlot\left(År, Antal, axis_2 = [mode = \log]\right)$



Punkterne ligger på en ret linje, så det tyder på, at det rent faktisk er en eksponentiel udvikling.

b) Modellen for den eksponentielle udvikling bestemmes vha. regression

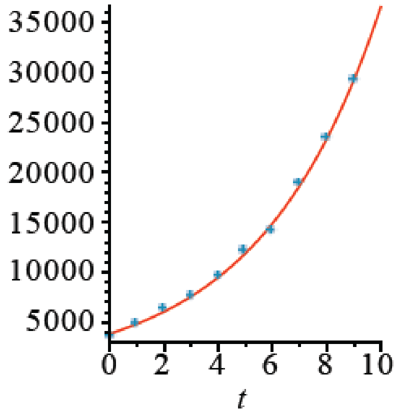
$ExponentialFit(År, Antal, t)$

$$3866.86173\, e^{0.22484\, t} \tag{1}$$

Ønskes funktionen opskrevet på standardformen $f(t) = b \cdot a^t$ kræver det, at vi først bestemmer a-værdien.
$a := e^{0.224845} = 1.25213$ og herefter fås
$f(t) = 3866.86173 \cdot 1.25213^t$

For at undersøge overensstemmelse mellem model og data indtegnes de i samme koordinatsystem

plot1 := *plot*(*f* (*t*), *t* = 0 ..10) :
plot2 := *ScatterPlot* (*År*, *Antal*) :
display (*plot1*, *plot2*)



Dette ser ud til at være en udmærket model i det givne interval. Evt. kan r^2-værdien beregnes.

c) Ud fra modellen kan man forvente at antallet af skarvereder er 35000, når f(t) = 35000. Vi skal altså løse denne ligning
solve (*f* (*t*) = 35000, *t*)

9.79746 **(2)**

Antallet overstiger de 35000 reder når t > 9,8 dvs. i slutningen af 1991

d) I følge modellen vil antal skarvereder i 1996, der er 14 år efter 1982, være *f* (14) = 90041.10250 dvs. ca. 90.000 reder. I virkeligheden var der kun 43.000 reder dette år. Modellen holder altså ikke så langt udenfor det område, hvor den er lavet. Dette kan skyldes flere ting fx. at naturen ikke kan oppebære så stort antal skarver mht. føde, ynglepladser etc. eller at man er begyndt at aflive et stort antal skarver, der generer fx. fiskeriet.

Dette er et område, hvor it-værktøjerne er med til at gøre undervisningen mere vedkommende og realistisk, samtidig med at begrebsforståelsen understøttes uden det kræver forudgående træning af tekniske færdigheder.
Der arbejdes med sammensatte funktioner og disses grund- og værdimængder samt stykkevist definerede funktioner. I forbindelse med indførelse af eksponential- og logaritmefunktioner samt potens- og rodfunktioner vil det være naturligt at gå ud over kernestoffet og se på omvendte/inverse funktioner, og disses anvendelsesområder.

- *begreberne grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet samt definition og fortolkning af differentialkvotient, differentialkvotientens sammenhæng med monotoniforhold, ekstrema og optimering*
- *bestemmelse af den afledede funktion for ovennævnte funktionstyper, regneregler for differentiation af sum, differens og produkt af to funktioner samt funktion multipliceret med konstant og sammensætning af to funktioner*

Indførelse af grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet afhænger elevernes matematiske forståelse. Hvor nogle elever skal se begreberne som nogle konkrete egenskaber, der kan "tegnes", har andre elever de matematiske forudsætninger, der gør, at man her kan indføre begreber som åbne og lukkede omegne etc. Der arbejdes med bestemmelse af differentialkvotienter og afledede funktioner, og forskellen på de to begreber diskuteres. For at udvikle elevernes forståelse af differentiation bør

eleverne se mindst et af de tilhørende beviser f.eks. differentiation af summen af to funktioner. Her vil det også her være muligt at vise et eksempel på et induktionsbevis i form af beviset for differentiation af potensfunktioner med heltallig koefficient. Det vil lette arbejde med differentialregning og optimering, hvis eleverne bliver i stand til at differentiere simple funktioner uden brug af hjælpemidler, men det er ikke tanken, at der skal bruges store mængder energi på at træne f.eks. differentiation af flere gange sammensatte funktioner. Her er det på sin plads at bruge it-hjælpemidler. Omvendt vil det ofte være nødvendigt for eleverne at kunne omskrive eller genkende programmernes løsning af en differentiation, og dette kræver kendskab til de i læreplanen nævnte sætninger.
Når der arbejdes med optimering og bestemmelse af en funktions monotoniforhold, skal eleverne have kendskab til matematikken bag løsningerne, f.eks. at et ekstremumspunkt kan forekomme, hvor differentialkvotienten er 0, men at dette ikke er et tilstrækkeligt krav. Bestemmelse af dette nulpunkt vil herefter typisk blive bestemt vha. et it-hjælpemiddel enten ved løsningen af ligningen $f'(t) = 0$ eller ved en sproglig beskrivelse kombineret enten med en monotonilinje eller med tegning af en graf, der viser den afledededes skæring med *x*-aksen og/eller funktionens maksimum. Aflæsning af f.eks. et maksimum på en graf, eller brug af faciliteter som "maximize" anses ikke som en fuldstændig løsning, idet den bagved liggende matematik er kernestof, og derfor forventes at blive bragt i spil ved dokumentationen.

– *bestemmelse af stamfunktioner for ovennævnte funktionstyper, bestemte og ubestemte integraler, areal- og volumenberegninger; regler for integration af sum og differens af to funktioner samt for funktion multipliceret med konstant*

Der lægges vægt på sammenhængen mellem differentiation og integration. På samme måde som ved bestemmelse af den afledede funktion vil det forbedre elevernes forståelse for integralbegrebet, hvis man arbejder med bestemmelse af simple stamfunktioner ud fra definitioner og sætninger. Ligeledes vil det lette det efterfølgende arbejde, hvis eleverne kender et antal simple stamfunktioner, der ikke først skal findes i en bog eller med it-værktøjet. Når det drejer som om mere komplicerede problemer, hvor fokus ikke længere er på den tekniske side af stamfunktionsbestemmelsen, men derimod på anvendelsen af stamfunktionen til bestemmelse af f.eks. arealer, rumfang, kurvelængder etc. benyttes it-værktøjer til beregninger af de opstillede udtryk.
Som det fremgår af læreplanen er metoder som partiel integration og integration ved substitution ikke en del af kernestoffet, men kan derimod medtages som supplerende stof. Man kan diskutere, hvor relevante metoderne er nu, hvor mængden af stamfunktioner, der kan bestemmes vha. matematikprogrammer er vokset betragteligt, og man numerisk kan finde det bestemte integral for stort set alle de funktioner eleverne møder i løbet af deres gymnasietid. Omvendt kan man argumentere for, at kendskabet til metoderne ikke blot kan forøge elevernes forståelse for integralregningen men også skal ses i sammenhæng med differentiation af produkt og sammensat funktion og endelig kan opfattes som en del af den "matematiske dannelse". Ved den skriftlige prøve kan der være opgaver, hvor der skal løses integraler, som tidligere krævede kendskab til de nævnte integrationsmetoder, men som nu kan løses vha. it-værktøjer.
Det bestemte integral kan indføres ud fra summer, og her kan it-værktøjer bruges til visualisering og gentagne beregninger, så eleven får fornemmelsen af, hvordan f.eks. en undersum nærmer sig arealet under kurven, når inddelingen bliver "fin nok".
Volumenberegninger vha. integration omhandler omdrejningslegemer omkring *x*- og *y*-aksen. Der findes en mængde tidligere eksamensopgaver, der viser forskellige problemstillinger.

– *grundlæggende beskrivelse af vektorfunktioner i planen som en udvidelse af funktionsbegrebet herunder definition af en vektorfunktion, tangent-, hastigheds-, og accelerationsvektor, fart*

Vektorfunktioner i planen beskriver bevægelse i planen, og begreber som hastighed og acceleration udvides fra den 1-dimensionelle beskrivelse, som eleverne kender fra fysikken. Her inddrages differentialregning for vektorfunktioner. Også den plane vektorregning kan tages op igen og linjens

parameterfremstilling kan nu opfattes som en lineær bevægelse. Der er mange problemstillinger, der kan arbejdes med, og igen skal det pointeres at det er forståelsen af hvad en vektorfunktion udtrykker, som er væsentlig, og som gør det muligt for eleverne at løse problemstillinger, de ikke er blevet præsenteret for før. Igen kan der henvises til tidligere eksamensopgaver, som eksempler på de mange typer problemer, der kan arbejdes med.
Emnet beskæftiger sig med plane vektorfunktioner, men kan indenfor rammerne af supplerende stof udvides til også at omhandle vektorfunktioner i rummet

– *grundlæggende differentialligninger; eftervisning af løsning ved indsættelse, linjeelementer og løsningskurver, opstilling af differentialligninger ud fra en sproglig beskrivelse.*

Differentialligninger opfattes ofte som noget meget abstrakt og vanskeligt. Samtidig er det et emne, der er overordentlig anvendeligt i forbindelse med modellering af "den virkelige verden". Eleverne kan have meget svært ved at forstå at løsningen på en ligning ikke blot er tal men derimod funktioner. Der arbejdes med opstilling af simple differentialligninger ud fra en sproglig beskrivelse, gæt af løsninger og endelig eftervisning af om gættet er korrekt ved indsættelse i ligningen. Eleverne skal også have kendskab til, at selvom man ikke kan finde et analytisk udtryk for en løsning, kan man alligevel få et indtryk af løsningen ved bestemmelse af løsningskurvens hældning i udvalgte punkter, dvs. linjeelementer og indtegning af løsningskurver. Disse kan tegnes vha. de fleste matematikprogrammer. Da emnet stadig er nyt skal herunder gives eksempler på nogle af de problemstillinger, der kan arbejdes med:

Opgave 1
En differentialligning er givet ved

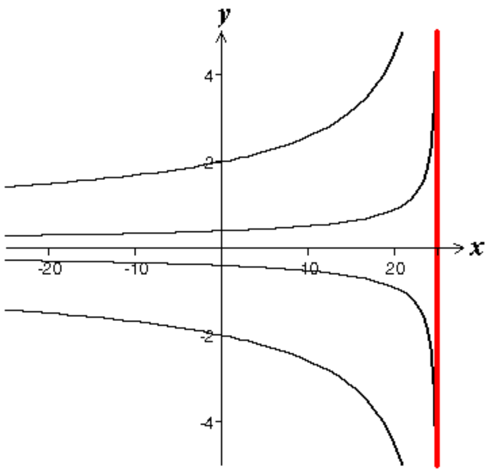
$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0{,}5\,y \text{, hvor } y < 2$$

a) En given løsningskurve går tilnærmelsesvis gennem punkterne A(-2; -3,437), B(0; 0) og C(1; 0,787)

b) Bestem løsningskurvens tangenthældning i punkterne A, B og C

c) Tegn en skitse af løsningskurven gennem punkterne A, B og C med indtegning af de i a) bestemte linjeelementer

Opgave 2
Ved spraymaling sprøjtes mikroskopiske dråber af maling ud af en dyse mod en plan flade. Et snit gennem fladen er vist på figuren nedenfor, hvor den er anbragt som linjen $x = 25$ i et koordinatsystem. Centrum for dysens åbning befinder sig på x-aksen langt til venstre for pladen. Alle mål er i mm.



Man kan vise, at når malingsdråberne nærmer sig pladen, bevæger de sig tilnærmelsesvis langs graferne for de funktioner, der er løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{25-x}, \quad x < 25.$$

a) Vis at funktionen

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{25-x}}, \quad x < 25, c \in \mathrm{R}.$$

er en løsning til differentialligningen uanset værdien af konstanten c

b) Bestem den løsning $y = f(x)$ som opfylder $f(0) = 1$

c) Tegn løsningskurven bestemt i spørgsmål b).

Opgave 3

I en simpel model for fordampning af klor fra en swimmingpool kan man regne fordampningen til at være proportional med det øjeblikkelige klorindhold $y(t)$.

a) Opstil den differentialligning, der beskriver situationen ovenfor

b) Eftervis at funktionen $f(t) = b \cdot a^t$ er en løsning til differentialligningen.

Det anbefales, at koncentrationen af klor i vandet er på mindst 0,4 *ppm*. På grund af fordampning, skal der jævnligt tilsættes klor for at overholde denne anbefaling.
Til tiden $t = 0$ er koncentrationen 0,9 *ppm*, og 48 timer senere er den faldet til 0,4 *ppm*

c) Bestem den løsning til differentialligningen, der beskriver denne situation

d) Tegn løsningen

Ved en fejl bliver der en dag tilført for meget klor svarende til en koncentration på 2,0 *ppm*.
Koncentrationer på mere end 1,2 *ppm* anses for sundhedsskadelige for de badende.

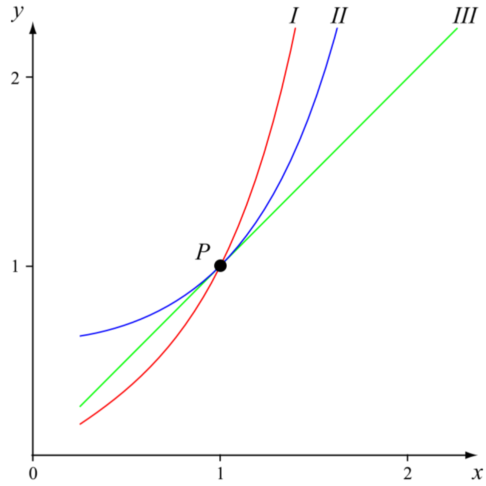
e) Bestem hvor lang tid der skal gå, før man igen kan bade i swimmingpoolen.

Opgave 4
Der er givet tre differentialligninger

1) $\dfrac{dy}{dx} = y \cdot x$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = y \cdot x + \dfrac{y}{x}$



På figuren er vist en del af en løsningskurve for hver af de tre ligninger. Hver af kurverne er markeret med *I*, *II* og *III*, og går gennem punktet $P(1; 1)$.

a) Bestem hvilken løsningskurve, der hører til hvilken ligning. Besvarelsen skal begrundes.

Den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot x + \frac{y}{x} \qquad \text{hvor } y>0 \text{ og } x>0$$

der går gennem punktet $P(1; 1)$ kaldes f.

b) Bestem en ligning for den rette linje, der tangerer grafen for f i punktet P.

Tanken med emnet er, at alle elever får den samme basisviden om differentialligninger: hvad de udtrykker samt viden om løsninger og løsningskurver. Herefter kan man specialisere sig afhængigt at studieretning eller i samspil med andre fag.

Det supplerende stof

Omfanget af det supplerende stof er ca. 20 procent. For såvel studieretningsklasser som valghold skal dette forstås som 20 % af 410 timer dvs. 80-85 timer. For valgholdene giver dette en særlig problematik, idet de emner, der er kernestof på A-niveau, men som man har benyttet som supplerende stof på B-niveau, **ikke** tæller som supplerende stof for valgholdende. Det kan betyde at kravet til mængden af supplerende stof på 3. år for et valghold kan blive meget stort, hvis man ikke har en hel del andet supplerende stof med fra 1. og 2. år.
Det supplerende stof både kan bestå af nye emner og uddybning af emner fra kernestoffet. Hvis man f.eks. vælger at arbejde med integrationsmetoderne partiel integration og integration ved substitution, skal den uddannelsestid, der lægges her, også medtages i de 20 procent. Mange af de emner, der arbejdes med i det forberedelsesmateriale, som kommer i forbindelse med den skriftlige prøve er velegnede eksempler på både nye emner og en dybere behandling af kernestoffet.

Som eksempler på helt nye emner kan nævnes:
- komplekse tal
- statistik, sandsynlighedsregning og test

- lineære algebra og anvendelser inden for f.eks. robotstyring eller kvantemekanik
- numeriske metoder
- diskret matematik
- talteori
- lineær programmering og kvadratisk optimering
- taylorapproximationer
- kurvers krumning
- matematisk bevisførelse som begreb

Flere af disse emner knytter sig til elevens øvrige fag. F.eks. finder emnet komplekse tal anvendelse inden for fag som Fysik og teknikfaget Design og produktion. Det er et emne, hvor der især kan fokuseres på modellerings- og repræsentationskompetencen.

Som eksempler på udbygning af kernestoffet kan nævnes:
- udvidelse af analytisk plangeometri med keglesnit.
- udvidelse af vektorfunktioner i planen til kurver i rummet
- udledning af udtryk for kurvelængder og overfladearealer ved integralregning
- udvidelse af differentialligninger med metoder som separation af variable

Det kan anbefales at arbejde videre med differentialligninger i relation til studieretningen. Således kan man i en biologistudieretning se på den logistiske model, og i studieretninger med Statik og styrkelære arbejde med udledning og løsning af konkrete differentialligninger fra faget.
Da den grundlæggende geometri ofte lægges tidligt i forløbet kan det med fordel tages op igen og udvides med flere begreber som f.eks. vinkler ved cirkler, yderlige plane og rumlige figurer og tilhørende små beviser. Dette giver samtidig lejlighed til at repetere stoffet fra 1. år.

Grundforløbet

Matematik A er et 3-årigt forløb, men ofte vil man på skolen vælge, at det er de samme emner, der arbejdes med på A- og B-niveau i løbet af grundforløbet. Dette giver dog stadig mulig for at dreje undervisningen mod A-faget med de kompetencer og den progression, der kendetegner faget, for at give eleverne mulighed for at foretage et kvalificeret valg af niveau. Det er meget vigtigt at man som lærer informere eleverne om hvad et A-niveau i matematik kræver.

Ved grundforløbets start vil man ofte opleve, at eleverne kommer med meget forskellige forudsætninger og viden fra deres tidligere skoleforløb. For at fange alle eleverne, kan det være mest hensigtsmæssigt at begynde med et emne, som eleverne ikke har beskæftiget sig med tidligere, så alle lærer noget nyt. Her kan grundlæggende geometri være et godt bud.
Nogle lærere introducerer allerede i grundforløbet eleverne for de matematiske kernekompetencer. Andre bruger nok kompetencerne i deres undervisningsplanlægning, men foretrækker at undlade at bruge terminologien overfor eleverne. Her er det væsentligt at eleverne hele tiden ved, hvad vi forventer af dem, og hvad de bliver bedømt på, såvel i undervisningen som ved det skriftlige arbejder, og her er kompetencebegrebet et godt redskab.

Studieretningsforløbet

I studieretningen kan matematik A optræde på to måder: enten som et fag i studieretningen eller som et valgfag, der følger efter et 2-årigt matematik B forløb. Hvor man i studieretningsfaget har 3 år med de samme elever og den frihed det giver ved valg af emner og deres rækkefølge, vil valgholdene typisk have elever, der kommer fra flere klasser, og som har arbejdet med forskellige områder, ikke mindst forskellige projektopgaver. Endvidere sker der et skifte i niveau til en mere teoriholdig undervisning, og mange lærere føler, at det er svært at opnå samme niveau samt et stort tidspres på valgholdene i forhold til studieretningsholdene. Her må man tænke kreativt f.eks. ved at lave projekter, der omhandler flere emner og inkludere emner fra tidligere år, så eleverne ikke skal bruge alle de mange (forskellige) projekter fra 1. og 2. år.

Undervisning

For at tilgodese de forskellige elevtyper vil undervisningen ofte foregå som en vekselvirkning mellem klasseundervisning med læreroplæg, individuelle træningsøvelser og opgaver, gruppeopgaver, arbejde i grupper, projektarbejde, klassediskussioner og elevfremlæggelse. Så vidt det er muligt bør undervisningen tage udgangspunkt i den enkelte elevs faglige niveau og tilgang til faget. Generelt bør undervisningen bygges op, således at eksempler med udgangspunkt i praktiske problemstillinger har en central plads. Arbejdet i grupper kan f.eks. foregå ved nedsættelse af 3-mandsgrupper, hvor hver gruppe skal gennemarbejde og efterfølgende præsentere et emne for klassen. Produktkravene til et gruppearbejde kan være en mundtlig fremstilling med tavlegennemgang eller elektronisk præsentation, udarbejdelse af skriftligt materiale eller kombinationer af disse.
Det er vigtigt, at man giver eleven mulighed for at udtrykke sig mundtligt, så det talte sprog udvikles og trænes. Det kan ske ved (tavle)fremlæggelse, klassediskussioner eller blot besvarelse af spørgsmål i undervisningen.
Htx er kendetegnet ved, at mange elever kommer fra hjem, der ikke har en boglig tradition. For at få flere til at gennemføre en ungdomsuddannelse støttede Undervisningsministeriet i 2009 en opfølgning af forskningsprojektet "Når gymnasiet er en fremmed verden," der satte særligt fokus på de elever, hvis forældre ikke selv har taget en gymnasial uddannelse – de såkaldte gymnasiefremmede elever. Her blev der i flere fag udarbejdet rapporter med konkrete forslag bl.a. i matematik på htx. Rapporten indeholder tips og gode idéer til afvekslende undervisning, der er relevante for alle elevtyper. F.eks. gives eksempler på brug af forskellige "spil", som understøtter såvel den mundtlige som den skriftlige dimension.

Læsning

Erfaringer viser, at noget af det allersværeste ved overgangen fra grundskole til gymnasium er vores udstrakte brug af symboler og benyttelse af symbolholdige tekster. Når man som underviser oplever, at eleverne aldrig læser lektier, er det ikke nødvendigvis et udtryk for uvilje eller dovenskab. De *kan* ganske enkelt ikke læse de bøger, der udleveres. Derfor kan det være en rigtig god investering at bruge energi på at "lære eleverne at læse". Her drejer det sig ikke blot om at forstå ord og udtryk, men også at kunne skelne mellem hvad der er vigtigt og mindre vigtigt, hvordan en matematisk tekst er opbygget og hvad forskellen mellem f.eks. eksempler, sætninger og beviser er. Matematik læses på en helt anden måde end mange andre fag. Fx vil man ofte skulle gå frem og tilbage i teksten, kigge på en figur, dechifrere en formel (der af mange elever blot opfattes som et billede, man kan springe over!), og

mange af de ord, der benyttes har en helt anden betydning i hverdagssproget end det har i matematiksammenhæng. Man må hele tiden tænke på, at det er første gang eleverne møder tekster som disse, og der skal ofte hjælp til at knække koden.
Denne læseundervisning kan foregå på mange måder. Man kan udvælge et par sider og sammen gennemgå dem på klassen, hvor man diskuterer tekstens opbygning, eleverne kan også side og læse det samme afsnit to og to, hvorefter de gennemgår det for hinanden. Det kan ofte hjælpe elevernes læsning, hvis der udformes spørgsmål til teksten, som man skal svare på undervejs, eller man kan give eleverne sine egne (kortfattede) noter til undervisningen inden timen, så de ved, hvad der skal fokuseres på, og hvad der er vigtigt. Også her vil et samarbejde med andre fag være givtigt. Hvordan læser man i teknologi? i dansk? i fysik?

Lektier

Htx-elever har meget at lave! Derfor skal man nøje overveje, hvor mange og hvilke lektier man giver dem for, og det skal være meningsfuldt for eleven at lave dem. Måske skal man ikke til hver gang – uden større omtanke – give dem nogle sider for, der skal læses. Vi gennemgår dem jo alligevel i undervisningen, og måske står udbyttet af at have læst på forhånd ikke mål med den tid, der bruges på det. Hermed menes ikke at eleverne ikke skal forberede sig. Man skal blot overveje, hvordan de skal forberede sig, og det der er arbejdet med hjemme skal tages op, uddybes og afrundes i undervisningen. Det kan være en rigtig god idé at lade eleverne bruge deres nyerhvervede viden ved f.eks. at regne et par enkelte opgaver i undervisningen, og derudover lade dem træne yderligere med opgaveregning derhjemme. Disse opgaver skal måske ikke gennemgås detaljeret i den følgende lektion, men man kan lade eleverne gennemgå dem i mindre grupper eventuelt med hjælp fra en standardbesvarelse. Især dygtige elever finder det meget kedeligt at se andres (tavle)gennemgang af opgaver, de har lavet.

Skriftlighed

Matematikfaget bidrager ligesom alle øvrige fag, der har en skriftlig dimension, til elevernes studieforberedende skrivekompetence (se bilag 4). Dette betyder at man som lærer direkte skal støtte eleverne i at få udbytte af at skrive i såvel matematik som i tværgående sammenhænge. Der skrives meget i matematik, og som matematiklærer har man ofte en stor tavs viden om skrivning i faget. Man ved præcis, hvornår en formulering eller brug af notation ikke følger de gængse normer (det man kalder *fagdiskursen*). Som et eksempel på fagdiskursen i matematik og de naturvidenskabelige fag, kan nævnes at man udtrykker sig objektivt, ofte i passiv og at man benytter det akademiske "vi" frem for "jeg". På trods af mange års uddannelse med skrivning af sådanne tekster er det imidlertid ikke noget man sædvanligvis er bevidst om systematisk at undervise i. Så udfordringen nu bliver at kunne beskrive, forklare, begrunde diskurser og genrer i fagene, samt forskellen mellem fagene. Kort sagt hvordan der kan *undervises* i faglig og tværfaglig skrivning.

Skriftlige opgaver skal ikke kun skrives *efter* man har lært og for at dokumentere at man har lært, men de skal bygges ind i læreprocesser så eleverne lærer at skrive for at udvikle viden. For at kunne arbejde med skrivning på denne måde, må man være opmærksom på, at der er to former for fagligt relevant skrivning. Den ene er *udforskende skrivning*, også kaldet tænkeskrivning eller reflekterende skrivning.. Udforskende skrivning bruges til at udvikle og fastholde tanker, projekter eller et skriftligt produkt. Skriveren behøver ikke at indordne sig under konventioner når bare teksten kommunikerer det den

skal, til dem der skal læse den. Udforskende skrivning kan både bruges til at skrive udkast til opgaver og til produktive tænkeøvelser i timerne. Den er et vigtigt værktøj til at udvikle faglig tænkning og afprøve faglige begreber og ræsonnementer. Det er afgørende at denne slags skrivning aldrig bedømmes.
Den anden type er faglig præsentationsskrivning som er tekster der skrives for at præsentere tanker, viden og ræsonnementer for andre, oftest for lærere, men også for kammerater. Disse tekster skal leve op til de faglige genrekonventioner og tekstnormer som gælder i det givne fag, og bliver typisk bedømt[1]. Traditionelt har man i matematik arbejdet med sidstnævnte type skrivning.

Når man planlægger sin faglige skriveundervisning kan det anbefales at indlægge øvelser hvor eleverne undervejs gennem fx skriveøvelser, resumeer, refleksioner og eksperimenter skal oversætte dele af deres viden til skrift eller grafiske fremstillinger. På denne måde bevidstgøres og uddyber de deres viden og får samtidig produceret ideer og udkast der kan bygges ind i en eventuelt afsluttende opgave/rapport. Dette kan være til stor hjælp for de mange elever, der har svært ved at komme i gang med større skriftlige produkter. Som en yderligere hjælp kan man (primært i begyndelsen) give eleverne en skabelon for det skriftlige produkt, det drejer sig om. Ud over en overskrift for hvert afsnit, kan man måske give eleverne den eller de første sætninger i hvert afsnit. Dette kan både praktiseres ved projektrapporterne men også hvor det drejer sig om et resume eller en traditionel afleveringsopgave. Denne måde at hjælpe eleverne i gang med en opgave, og støtte dem i at "knække koden" for fagsprog og terminologi kaldes *stilladsering*.

I bilag 4 er nævnt 8 studieforberedende skrivekompetencer, og her vil matematik bl.a. kunne bidrage indenfor områderne *genrebevidsthed*, *sproglig korrekthed*, *argumentation*, *anvendelse af citater, figurer, illustrationer* samt *præsentationer*.
Inden for genrebevidsthed kan der være tale om noteskrivning, synopsis, traditionelle opgavebesvarelser, projekter eller "undervisningsmaterialer" som formelsamling, artikel eller et kapitel til en lærebog. I udfærdigelse af skriftlige materialer er den sproglige korrekthed vigtig. Som lærer har man ansvaret for at påpege hvor væsentligt det er, at man også i matematikopgaver, rapporter etc. skriver korrekt mht. stavning og tegnsætning og altid læser korrektur. Særlig fokus skal der naturligvis være på brugen af matematiske fagudtryk og symboler samt fornuftig brug af figurer og disses sammenhæng med teksten.
Et andet område, hvor matematik i høj grad kan bidrage, er ved brug af argumentation, der nøje hænger sammen med den matematiske ræsonnementskompetence. Her handler det om i et kort og præcist sprog at argumentere for, hvad man gør, og hvorfor man kan gøre det. Endelig vil der også være god mulighed for at arbejde med forskellige typer af præsentationer af matematikholdige "tekster" både i det daglige arbejde og i forbindelse med projekterne, der samlet skal dække kernestof og supplerende stof. Her er åbnet op for at dokumentationen for projekterne kan være rapporter, artikler, podcasts, plancher m.m. Hver præsentationsform har sine styrker og svagheder som eleverne skal gøres bevidste om.
Den faglige præsentationsskrivning benyttes kan bl.a. bruges til at undersøge om eleven kan håndtere fagets metoder og hjælpemidler på en fornuftig måde i forhold til de faglige mål. Disse kan omfatte udarbejdelse af:

- journal/ logbog
- afleveringsopgaver
- træningsøvelser
- projektrapport
- it-præsentation
- tests/ prøver

[1] Ellen Krogh (red.) Videnskabsretorik og skrivedidaktik, 77 Gymnasiepædagogik s. 26

I grundforløbet introduceres eleven til fagets skriftlige fremstillingsformer. Her kan man overveje at anvende en portfolio, der består af notater fra undervisningen, til læring af hensigtsmæssig notatteknik i faget. Læreren kan i perioder vælge at kommentere portfolioen i stedet for at rette en almindelig skriftlig opgave. Som dokumentation af mindre forløb og beregninger kan logbog eller journal anvendes.
Træningsøvelser kan anvendes i den daglige undervisning til indlæring af konkrete færdigheder.
Der stilles obligatoriske opgaver med progression i sværhedsgrad. Hjemmeopgaver bør opbygges med et balanceret indhold mellem færdigheds- og anvendelsesorienterede opgaver og egentlige projekter.
Det skriftlige arbejde kan evalueres på flere måder: eleverne kan rette egne eller hinandens opgaver. Ved at rette andres opgaver får eleven ofte øje på, hvor stor betydning dokumentation og korrekt notation betyder. Læreren kan også vælge på forhånd at melde ud, hvilke dele eller med hvilket fokus afleveringen bliver rettet. F.eks. kan man ved en projektrapport i særlig grad kommentere løsningsmodellen eller teoriafsnittet og gøre mindre ud af elevens beregninger. Ved et hjemmeopgavesæt kan det være brug af hjælpemidler eller brug af matematiske ræsonnementer, der er i fokus.

Det er vigtigt, at læreren udarbejder projektoplæggene på en sådan måde, at der i slutningen af forløbet lægges op til en besvarelse, hvor eleven kan demonstrere evnen til selvstændigt at analysere et givet problem og opstille en løsningsmodel. Oplæggene må derfor ikke ligne traditionelle matematikopgaver, hvor alle oplysninger er givet, og eleven ledes gennem besvarelsen med konkrete spørgsmål. Formålet med projekterne er at uddybe elevens forståelse for teorien og træne eleven i at matematisere et praktisk problem. Der kan med fordel samarbejdes med de øvrige fag om projekter.
Ved udarbejdelsen af projektoplæggene kan der hentes inspiration i de oplæg, der blev lavet til forsøget med it-prøven på B-niveau i perioden 2001-06 og de efterfølgende eksamensprojekter.
Arbejdet med et projekt kan foregå i grupper eller selvstændigt og afsluttes med en eller anden form for dokumentation. Ofte vil denne dokumentation være en skriftlig rapport, men som nævnt ovenfor er det også muligt at lave f.eks. en skærmpræsentation, en film, en lærebog, en artikel el. lign.
I stedet for at lade projektet afslutte et emne, kan man også vælge at lade arbejdet med et projekt danne ramme om undervisningen i et emne. Det er således gennem arbejdet med projektet, at eleven introduceres for nyt stof og gennemarbejder det. Projekterne laves i perioder jævnt fordelt over uddannelsestiden, således at læreren kan anvende disse som element til variation af undervisningen. Projekterne danner udgangspunkt for den mundtlige prøve i faget.

Gennem projekterne forsøger eleven selvstændigt at finde en eller flere matematiske løsningsmodel(-ler), og læreren fungerer som vejleder. For nogle elever og grupper vil vejledningen foregå i mange små trin, mens andre vil kunne arbejde selvstændigt og kun have behov for meget lidt vejledning. Det er en balanceakt, som læreren bør indstille sig på i alle projektforløb.
Projekterne træner i særlig grad elevernes modelleringskompetence og deres kommunikations-kompetence. Der bør lægges vægt på, at dokumentationen for et projekt fremstår som en helhed med en god kommunikationsværdi, hvilket vil sige, at besvarelsen kan læses (eller ses) og forstås, selv om læseren ikke kender opgaven på forhånd.

Som nævnt ovenfor, kan dokumentationen antage mange former. Ofte vil et projekt resultere i en rapport. Formålet med en matematikrapport er at give eleverne mulighed for at fremstille skriftlig dokumentation for en konkret problemstilling på et niveau eleven selv vælger. Det er derfor vigtigt at lave en åben problemformulering, så både stærke og svage elever kan finde udfordringer. Herudover kan eleven fordybe sig i dele af den teori, der ligger bag beregningerne. En sådan rapport vil typisk indeholde følgende hovedafsnit:

Opgaveanalyse:
En **kort** beskrivelse af, hvad opgaven går ud på, samt hvilke oplysninger der er givet.
Hvis der f.eks. mangler oplysninger, for at opgaven kan besvares, kan det være nødvendigt, at eleven drager nogle konklusioner og formulerer egne antagelser eller indhenter relevante oplysninger.

Løsningsmodel(ler):
En handlingsplan for, hvordan eleven tænker opgaven løst, og herunder hvilken matematisk teori, der skal anvendes i den relevante situation og om muligt også en begrundelse hvorfor. Dette afsnit træner eleven i at bevæge sig op på et højere abstraktionsniveau end blot at kunne løse en konkret opgave

Dokumentation:
Her skal selve opgaven løses, og alle udregninger dokumenteres, beskrives og evt. illustreres.
Det kan anbefales at eleven medtager et **teoriafsnit**, hvor den benyttede teori opsummeres og udvalgte dele uddybes. Relevante beviser medtages. Denne del er et godt afsæt for den mundtlige prøve.

Vurdering:
En diskussion af den fundne løsning i relation til opgaven, f.eks. de opstillede forudsætninger og antagelser.

Mængden af skriftligt arbejde måles i elevtid, der kan være en uhåndgribelig størrelse. En opgave tager 1 elevtime, hvis en gennemsnitselev er en time om at regne den. Ifølge bekendtgørelsen er der mindst 100 elevtimer til det skriftlige arbejde i matematik B. Mange af disse elevtimer bliver brugt på arbejdet med projekterne, der bredt skal dække emnerne indenfor såvel kernestoffet som det supplerende stof.
Det kan være meget vanskeligt at sætte elevtid på de forskellige opgavetyper. Her er det en idé at bede eleverne fortælle hvor lang tid, de har brugt på en konkret opgave, for at få en fornemmelse af deres tidsforbrug. Omvendt er det også vigtigt at fortælle eleverne, hvor lang tid man forventer, de skal bruge på opgaven, så eleverne ikke bruger alt for lidt eller alt for meget tid på en opgave.

IT

Helt fra htx-uddannelsens start har brugen af avancerede lommeregnere og it været en del af matematikundervisningen. I dag har de fleste elever bærbare computere og brugen af CAS er en forudsætning for arbejdet med projekterne og opgaverne til den skriftlige prøve i matematik A.

It integreres løbende i undervisningen. Som eksempler på anvendelsen af it kan nævnes:

- illustration af matematiske forhold f.eks. animationer, der viser overgang fra differenskvotient til differentialkvotient eller fremkomsten af forskellige typer keglesnit
- som redskab, når eleven selv eksperimenterer f.eks. med forhold ved indskreven eller omskreven cirkel, trekantens areal eller betydningen af konstanterne a, b, og c for forløbet af grafen for en 2. gradsfunktion
- ved gentagne udregninger som f.eks. beregninger af arealsummer ved forskellige inddelinger samt tabelgenerering
- til analytiske beregninger, f.eks. bestemmelse af afledet funktion og stamfunktion, løsning af differentialligninger samt til symbolmanipulation
- numeriske beregninger ved bestemmelse af bestemte integraler, differentialkvotienter samt løsning af ligningssystemer og regression.
- som dokumentationsredskab ved skriftlige besvarelser, f.eks. beregninger, graftegning og tekstbehandling

Der findes et utal af matematikprogrammer af forskellige typer og med forskellige formål. Programmerne kan opdeles i to grupper: tegneprogrammer, der ofte også kan foretage numeriske beregninger og regneprogrammer, der kan lave analytiske beregninger og symbolmanipulation. Eleverne har krav på at få en indføring i et udvalg af disse programmer, og det er vigtig at man med jævne mellemrum arbejder med brugen af disse så eleverne får indarbejdet det nødvendige kendskab til hvad programmerne kan, og hvilken terminologi/syntaks de benytter.
Mængden af internetsider med matematikindhold vokser med stor hast, og dette giver mulighed for at hente inspiration til undervisningsmateriale. På EMUen findes en mængde materialer især for stx, og disse vil i mange tilfælde også kunne bruges for htx. I takt med at htx-lærerne indsender deres eget materiale, vil vi få opbygget vores egen materialesamling. Der findes sider, hvor eleven på egen hånd kan arbejde med matematiske emner og øve specifikke færdigheder. Der arbejdes på en side "Træneren", der kommer til at ligge på EMUen. Søger man på "Interaktive matematikopgaver" finder man links til mange udmærkede sider.
I forbindelse med brugen af CAS-værktøjer vil man undertiden opleve, at ikke alle opgaver kan løses symbolsk, men at man må "nøjes" med en numerisk løsning. Denne problemstilling er værd at tage op i undervisningen:

- Hvordan skelner man mellem de to løsningstyper?
- Hvordan fungerer CAS-værktøjet?
- Hvilken løsningstype er at foretrække i en given situation?
- Hvordan dokumenterer man en løsning, der er fundet numerisk? (indsættelse, grafisk eftervisning etc.)

Ved løsning af opgaver optræder der sommetider "falske løsninger". Her er det relevant at undersøge

- Hvordan afgøres hvilken løsning, der er korrekt?
- Hvilken dokumentation kræves? (figur, indsættelse af værdier.)

Dette er væsentlige spørgsmål, som også er en del af elevens hjælpemiddelkompetence.

Dokumentation

Der kan selvsagt ikke gives en nøjagtig beskrivelse af, hvad en tilstrækkelig dokumentation er. Her må man vurdere, om eleven har redegjort for den matematik, der er anvendt og i hvor høj grad eleven viser matematisk forståelse. Der skal arbejdes med tegning af figurer og skitser – gerne i hånden, for de elever, der bruger alt for lang tid på at lave tegninger på computeren. Især indenfor trigonometri og geometri er figurer uundværlige og der skal lægges vægt på at eleverne laver hjælpetegninger, og at tegningernes benævnelser korresponderer med teksten ved siden af (samt en eventuel opgavetekst).

Eleven har metodefrihed, herunder valg af hjælpemidler. Det er tilladt at bruge it-værktøjernes kommandoer til bestemmelse af for eksempel vektorlængder, arealer, ekstremumspunkter, vinkler m.m. Men eleverne skal være opmærksomme på, at når en række af beregninger erstattes med en enkelt indtastning kræver det ofte ledsagende kommentarer for at dokumentere, at man besidder fx tankegangs- og ræsonnementskompetencen. Disse kan være i form af matematiske argumenter, konkrete vurderinger eller verificering af resultaterne ved indsættelse eller tegning af en figur.

Ved skriftlige besvarelser skal de løsninger, der bestemmes ved hjælp af CAS-værktøjer opfattes som ligeværdige med de løsninger, der fremkommer uden, når løsningen er dokumenteret og om nødvendigt vurderet. Eleven skal være opmærksom på, at når mellemregninger udelades, og det vil ofte ske, når CAS-værktøjer er i brug, bør disse erstattes af en forklarende tekst. Det skal altid fremgå af besvarelsen hvilken matematik, der har været i brug, for at nå frem til den angivne løsning. Her kan være tale om benyttede regneregler eller sætninger. De ligninger, der løses, skal altid opskrives. Desværre er det ikke alle programmer, der er lige velegnet til at dokumentere løsningerne i. Her har man på den enkelte skole en forpligtelse til at gøre eleverne opmærksomme på, at det program, der benyttes til at finde den matematiske løsning på et problem måske ikke kan stå alene, og man derfor må over i f.eks. et tekstbehandlingsprogram for at dokumentere løsningen.

En del af dokumentationen er benyttelse af korrekt matematisk notation, og her skal det pointeres at det i beregningsdelen er det helt i orden at bruge programmets syntaks, men at det tydeligt skal fremgå i tekst og ved opskrivning af ligninger, hvad det er for en matematik, der er i spil, og hvordan problemet løses (f.eks.: "vha. lineær regression bestemmes den bedste rette linje gennem punkterne…", "nu løses ligningssystemet…", "funktionsudtrykket differentieres og man finder nulpunkt for den afledede funktion…" osv.). I resultater, der er tal kan både "," og "." benyttes som decimalseparator.
Ovenstående er en del af kommunikationskompetencen samt symbol- og formalismekompetencen. Der henvises i øvrigt til den årlige evaluering af den skriftlige prøve i Matematik A, som findes på adressen http://www.uvm.dk/Uddannelser-og-dagtilbud/Gymnasiale-uddannelser/Proever-og-eksamen/Evaluering-af-gymnasiale-eksaminer

Evaluering

Løbende (formativ) evaluering

Den løbende evaluerings formål er dels at give eleven respons på vedkommendes arbejde, så dette kan forbedres og dels hjælpe underviseren med at finde elevens niveau ved karaktergivningen – både terminskarakterer og afsluttende standpunktskarakterer.
Beskrivelsen af karaktererne 12, 7 og 02 i både mundtlig og skriftlig matematik A findes på fagets hjemmeside på EMU'en http://www.emu.dk/gym/htx/ma/uvm/eksamen.html

En konkret og forståelig formativ evaluering på elevernes skriftlige og mundtlige arbejde er en forudsætning for, at eleverne udvikler sig og erhverver sig de kompetencer, der er fagets mål. Man kan give skriftlige og mundtlige tilbagemeldinger. Væsentligt er det, at den er fokuseret, så eleven ikke skal forholde sig til mange forskelligartede rettelser på en gang. Med alt for mange rettelser kan det være svært at vide, hvor man som elev skal sætte ind med en særlig indsats. Man kan undertiden fortælle eleverne på forhånd hvad fokus for retningen er: dokumentation, korrekt svar, brug af figurer etc. Især ved matematikprojekterne giver det god mening for både elever og lærer, hvis man fokuserer på et enkelt eller to områder, når man evaluerer.

Afsluttende (summativ) evaluering

Matematik A afsluttes med en skriftlig og en mundtlig prøve. Da prøverne er en del af elevens prøveudtræk, er der mulighed for at en elev enten kommer til mundtlig prøve eller til skriftlig prøve eller eventuelt til begge dele.

Forberedelsesmaterialet
Der er afsat 10 timer på 2 dage til arbejdet med forberedelsesmaterialet til prøverne i matematik A. Oplægget indeholder teori, eksempler og opgaver i et emne i forlængelse af kernestoffet. Eleverne arbejder selvstædigt med materialet og alle hjælpemidler er tilladt inklusivt at modtage vejledning. Det er **ikke** hensigten at der skal undervises i forberedelsesmaterialet.

5-timersprøven
Nogle af spørgsmålene ved 5-timersprøven tager udgangspunkt i forberedelsesmaterialet. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet. Der kan forekomme opgaver, hvor eksaminanderne i et delspørgsmål skal anvende resultatet af et tidligere delspørgsmål. I den forbindelse er det vigtigt at fortælle eksaminanderne, at hvis de mangler et sådan resultat, kan der stadig opnås delvis eller fuld besvarelse for senere delspørgsmål ved at komme med et fornuftigt og velargumenteret forslag til et svar, der kan arbejdes videre med.
Sigtet med denne prøveform er at teste elevens matematikkompetencer, jf. punkt 2.l. Ved prøven har eksaminanden adgang til alle hjælpemidler og it-værktøjer, bortset fra kommunikation med omverdenen. Der henvises i øvrigt til bestemmelserne i eksamensbekendtgørelsen. På Undervisningsministeriets hjemmeside findes tidligere års skriftlige eksamensopgaver samt de tilhørende forberedelsesmaterialer.
På første side i opgavesættet står, hvilke krav der er til besvarelsen. Denne side bør nøje gennemgås med eleverne – ikke blot lige før den skriftlige prøve – men kravene kan tages op i forbindelse med opgaveregning og afleveringsopgaver.

Den mundtlige prøve
Ved den mundtlige prøve indgår spørgsmål indenfor hele kernestoffet samt det supplerende stof, der er arbejdet med. Emnet, behandlet i forberedelsesmaterialet, indgår som supplerende stof, og der skal derfor være spørgsmål i dette emne.
Under forberedelsen må eksaminanden benytte alle hjælpemidler. I forbindelse med den stadig mere udbredte brug af computeren til at tage noter på, vælger nogle elever at lave noterne i forberedelsen på computeren ofte som klippe-klistre fra undervisningsnoterne. Det er vigtigt, at eksaminanden er klar over, hvad formålet med forberedelsestiden er, og hvordan tiden udnyttes bedst muligt. Det vil næppe forbedre elevens præstation, at vedkommende ved prøven medbringer lange detaljerede noter, der er hentet direkte ind fra tidligere notater.
Eksaminanden har mulighed for at medbringe såvel noter, bøger computer/lommeregner etc. under eksaminationen, men igen er det vigtigt, at man i forvejen har drøftet eksaminationens forløb med eleverne. En forud forberedt PowerPoint-præsentation, der læses op, fortæller ikke meget om eksaminandens matematikkundskaber. Derimod har eksaminanden naturligvis lov til at støtte sig til sin disposition/noter i mindre omfang. Det forlanges ikke, at eksaminanden kan huske hele sin præsentation udenad. Hvis eksaminanden finder det relevant at anvende f.eks. en computer til visualisering af en given problemstilling er dette også muligt.
Censor og eksaminator skal være opmærksomme på formålet med den mundtlige prøve, nemlig at eksaminanden skal vise i hvor høj grad vedkommende har tilegnet sig de matematiske kernekompetencer – se afsnittet om bedømmelseskriterierne.

Udformning af mundtlige eksamensspørgsmål

Det anbefales, at et eksamensspørgsmål består af tre delspørgsmål, hvor det første kan formuleres således:

1. Gør kort rede for problemstillingen i projekt nr. …

Man kan eventuelt bede eleven uddybe en konkret problemstilling f.eks. opstillingen af en bestemt funktionsforskrift e. a. Mange projekter involvere modellering, og det vil derfor være yderst relevant, hvis eleven i dette spørgsmål redegør for modelleringsprocessen i den konkrete situation. En sådan redegørelse kan være forberedt på forhånd og give eleven lidt ro og selvtillid inden prøven.
Forløbet af den mundtlige prøve vil derfor være, at eleven kort fortæller om 'ideen' i projektrapporten og, hvis der er bedt om det, derefter redegør for den øvrige del af spørgsmål 1. Spørgsmålet skal dels afdække elevens ejerskab af dokumentationen for projekt og dels vise, på hvilket abstraktionsniveau eleven befinder sig, når det drejer som at gennemgå hovedtrækkene i en række konkrete opgave-besvarelser. Denne del af den mundtlige prøve bør allerhøjst tage 1/3 af eksaminationstiden.

Det/de øvrige delspørgsmål bør udformes således, at eleven ved besvarelsen får mulighed for at demonstrere matematiske kompetencer. Det 2. delspørgsmål knytter sig til den teori, der er arbejdet med i rapporten, og man kan vælge at lade et 3. delspørgsmål handle om et helt andet emneområde end det udtrukne projekt.
Det er vigtigt at forberede eleverne på, hvordan de mundtlige spørgsmål kan se ud, og hvordan den mundtlige prøve foregår. Endvidere skal eleverne gøres opmærksomme på, at det er eleven selv, der prioriterer spørgsmålenes rækkefølge og omfang. Det er således helt i orden at sige meget om det tredje delspørgsmål og mindre om det andet, blot man kommer ind på alle spørgsmål i rimelig udstrækning.

Den samlede mængde af eksamensspørgsmål med tilhørende delspørgsmål skal dække alle emneområder, således at væsentlige områder ikke er udeladt.
Det er vigtigt at delspørgsmålene formuleres bredt, så eleven selv kan vælge niveauet for fremlæggelsen. De skal på den ene side give den sikre elev muligheder for at demonstrere en beherskelse af den matematiske teori, medens de på den anden side kan give den usikre elev muligheder for at demonstrere en "håndværksmæssig" viden om matematiske emner. Dog kan spørgsmålene også blive så brede, at eleven ikke ved, hvad der ønskes præsenteret og bruger alt for meget tid i forberedelsen på at overveje udvælgelsen af indhold.

De to sidste spørgsmål kan f.eks. formuleres:

2. Beskriv begreberne tangentvektor, hastigheds- og accelerationsvektoren.
3. Belys, hvordan integralregning kan bruges til bestemmelse af volumen af omdrejningslegemer.

I spørgsmål 3 kan eleven vælge at bevise sætningerne om volumen af omdrejningslegemer om enten *x*- eller *y*-akse (eller begge). En anden elev vil måske bestemme volumen for en generel kegle eller kugle vha. formlerne for omdrejningslegemer, og en tredje elev vil tage udgangspunkt i en konkret funktion. Man kan vælge at tilføje en række stikord med begreber, som eleven kan (men ikke skal) tage udgangspunkt i, men man skal passe på ikke at stille konkrete "regneopgaver" som eleven vil føle sig forpligtet til at regne på tavlen.

Bedømmelseskriterier

Da ikke alle de matematiske kernekompetencer er lige nemme at evaluere ved hver af de to prøveformer, er bedømmelseskriterierne blevet delt op, så nogle af de faglige mål primært bedømmes ved den mundtlige prøve og andre ved den skriftlige prøve. Det betyder naturligvis ikke, at man ikke tager hensyn til det, hvis en elev ved den mundtlige prøve er i stand til at dokumentere f.eks. hjælpemiddelkompetencen, det er blot ikke et af de faglige mål, der er i fokus her. På samme måde kan det være vanskeligt for en elev at dokumenter ræsonnementskompetence i den skriftlige prøve, hvis ingen af opgaverne lægger op til det, men er man alligevel i stand til det, er det naturligvis fortrinligt.

Vejledende karakterbeskrivelse

Karakterbekendtgørelsen findes på https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=29307. Karakterskalaen er karakteriseret ved at operere med et fejl- og mangelbegreb. Man skal altså bedømme i hvor høj grad en elev har opnået slutmålene for faget.

Nedenfor er angivet retningslinjer for opnåelse af karaktererne 12, 7 og 02 i matematik A Beskrivelsen er naturligvis ikke udtømmende, og man skal derfor ved bedømmelsen fokusere på i hvor høj grad eleven har opnået de kompetencer, der er beskrevet i afsnit 2.1 Faglige mål.

Den skriftlige prøve på niveau A

Karakteren 12
I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet korrekt og hensigtsmæssigt. Hvor det er relevant er løsninger og modeller vurderet. Besvarelsen er veldokumenteret med sikker brug af figurer og symbolsprog.
Der demonstreres stort fagligt overblik på alle felter og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres sagligt for de anvendte løsningsmetoder.
Eksaminanden behersker fagets terminologi og kan skifte mellem forskellige repræsentationsformer.
Kommunikationsværdien er meget høj, idet der på en naturlig måde skiftes mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.
I besvarelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.

Karakteren 7
I besvarelsen benyttes matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – på en fornuftig måde. Der demonstreres et solidt og bredt fagligt overblik, og ud fra matematiske ræsonnementer argumenteres i et vist omfang for de anvendte løsningsmetoder. Løsningen er dokumenteret med en god brug af figurer og symbolsprog.
Eksaminanden er delvist i stand til at opstille og behandle matematiske modeller og vurdere løsningerne.
Kommunikationsværdien er god, idet eksaminanden kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog. Eksaminanden behersker fagets terminologi og har et godt kendskab til sammenhængen mellem forskellige repræsentationsformer.
I besvarelsen forekommer adskillige fejl og mangler.

Karakteren 02

I besvarelsen er matematiske teorier og metoder – herunder relevante IT-værktøjer – benyttet på et meget elementært niveau. Matematiske ræsonnementer anvendes usikkert og usammenhængende. Dokumentationen er mangelfuld med ringe brug af figurer og symbolsprog.
Der demonstreres et beskedent fagligt overblik og eksaminanden har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.
Eksaminanden er i ringe grad i stand til at opstille og behandle simple matematisk modeller, men kan løse elementære opgavetyper. Anvendelsen af fagets terminologi er usikker.
Kommunikationsværdien er beskeden, idet eksaminanden kun i mindre udstrækning kan skifte mellem det matematiske symbolsprog og almindeligt skriftsprog.

Den mundtlige prøve på niveau A

Karakteren 12
Fremstillingen er velstruktureret og fagets terminologi anvendes sikkert. Der veksles problemfrit mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog. Eksaminanden demonstrerer meget stor fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse. Eksaminanden viser et stort overblik på alle felter samt evne til at generalisere. Hvor det er relevant veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.
Ved fremlæggelsen forekommer ingen eller kun få uvæsentlige fejl og mangler.

Karakteren 7
Fremstillingen er godt struktureret, og fagets terminologi benyttes. Der veksles på tilfredsstillende måde mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog.
Eksaminanden demonstrerer en vis fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement – herunder matematisk bevisførelse, der kombineres med konkrete anvendelser. Eksaminanden har et godt overblik på mange områder og kan i nogen grad generalisere. Der veksles mellem begrebernes forskellige repræsentationsformer.
Ved fremlæggelsen forekommer adskillige fejl og mangler.

Karakteren 02
Fremstillingen er ustruktureret. Eksaminanden behersker kun mangelfuldt fagets terminologi og skifter usikkert mellem det matematiske symbolsprog og det daglige talte sprog, samt mellem forskellige repræsentationsformer. Eksaminanden demonstrerer en beskeden fortrolighed med matematisk tankegang og ræsonnement, hvor væsentlige argumenter udelades. I stedet vises eksempler på konkrete anvendelser. Eksaminanden har et mangelfuldt overblik og har kun kendskab til en begrænset del af stoffet.