
Matematik A

Studentereksamen

Forsøg med digitale eksamensopgaver
med adgang til internettet

Torsdag den 12. august 2010
kl. 09.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af helhedsindtrykket i besvarelsen af de enkelte spørgsmål vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

NOTATION og LAY-OUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

REDEGØRELSE og DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 En vektor $\vec{a}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden af $\vec{a}$.
- b) Bestem parameterfremstillingen for den linje l , der har $\vec{a}$ som retningsvektor og går gennem punktet $P = (7, 3)$.

Opgave 2 To rette linjer l og m er givet ved

$$l: y = 2x + 8 \quad \text{og} \quad m: y = -3x + 28.$$

- a) Bestem koordinatsættet til det punkt på linjen l , hvor $x = 7$.
- b) Bestem skæringspunktet mellem l og m .

Opgave 3 En cirkel har centrum i $C(2, 3)$ og radius $r = 5$.

- a) Bestem en ligning for cirklen.

Opgave 4 På internettet findes en on-line adressebog, www.plaxo.com, som har et stærkt stigende antal brugere. I en model antages det, at antallet af brugere af www.plaxo.com kan beskrives ved funktionen

$$N(t) = 477475 \cdot 1,084^t,$$

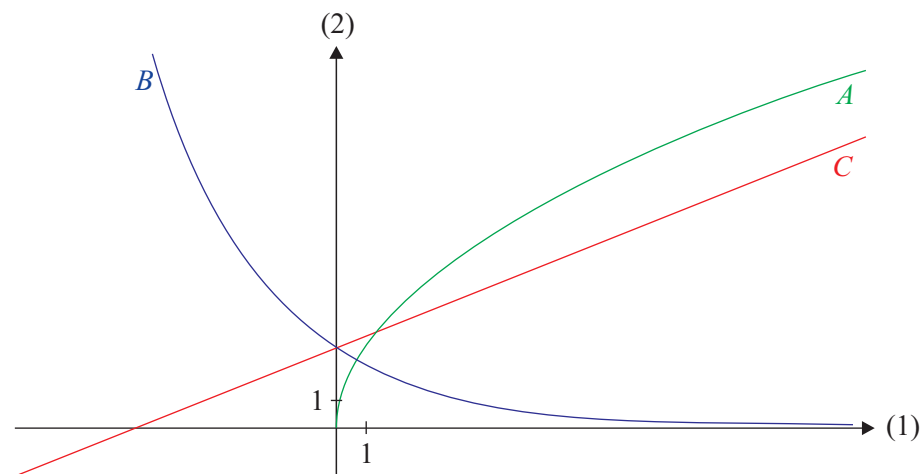
hvor $N(t)$ angiver antallet af brugere til tiden t , og t angiver tiden målt i måneder efter 1. januar 2003.

- a) Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antallet af brugere af www.plaxo.com.

Opgave 5 Tre forskellige vækstmodeller f , g og h er givet ved

$$f(x) = \frac{2}{5}x + 3, \quad g(x) = 3 \cdot 0,8^x \quad \text{og} \quad h(x) = 3 \cdot x^{0,5}.$$

På figuren nedenfor er graferne for f , g og h skitseret.

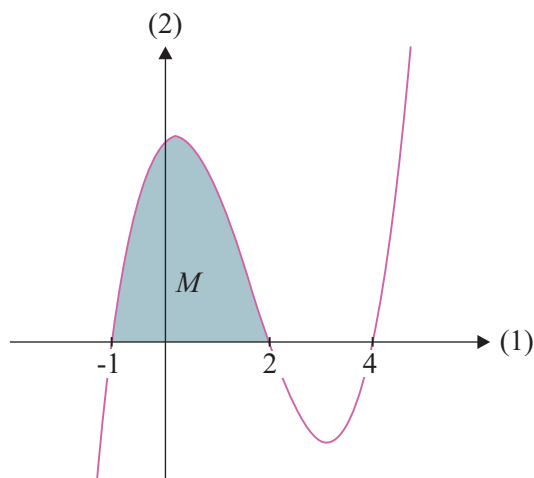


- a) Bestem hvilken af de tre grafer A , B og C , der hører til hver af de tre funktioner f , g og h .

Begrund dit svar.

Opgave 6 På figuren ses grafen for en funktion f . Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $[-1; 2]$ en punktmængde M , der har et areal.

Det oplyses, at $\int_{-1}^4 f(x) dx = 5$, og at $\int_2^4 f(x) dx = -2,6$.



- a) Bestem arealet af M .

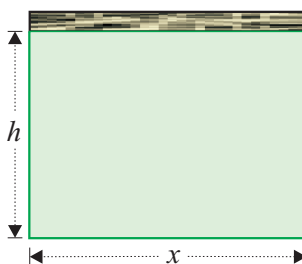
Opgave 7 En funktion f har forskriften

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 8 a) Bestem integralet $\int 5x^4 \cdot e^{x^5+3} dx$.

Opgave 9 På figuren nedenfor ses en model af en rektangulær have på 200 m^2 . Haven skal indhegnes, således at der er hæk på de tre sider og stengærde på den sidste side. Sidelængderne betegnes som vist på figuren.



Prisen for stengærdet er 900 kr. pr. m, og prisen for hækken er 300 kr. pr. m.

- a) Bestem den samlede pris for indhegningen udtrykt ved x .
- b) Bestem x , så den samlede pris for indhegningen er mindst mulig.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 11.00 - 14.00

Opgave 10 I tabellen nedenfor ses udbyttetabet i vårsæd ved givne ukrudtsmængder.

Ukrudtsmængde (målt i hkg pr. ha.)	20	40	60	80	100
Udbyttetab (målt i hkg pr. ha.)	1,88	3,05	4,05	4,95	5,79

I det følgende antages det, at udbyttetabet som funktion af ukrudtsmængden kan beskrives ved en funktion af typen

$$u(x) = b \cdot x^a,$$

hvor x angiver ukrudtsmængden (målt i hkg pr. ha.), og $u(x)$ angiver udbyttetabet (målt i hkg pr. ha.).

- Bestem a og b .
- Bestem ændringen i udbyttetabet, når ukrudtsmængden stiger med 10%.

Kilde: *Publikation fra Miljøministeriet om ukrudt.*

Opgave 11 En stedfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t + 4 \\ -t^2 + 3 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

- Tegn parameterkurven, og bestem koordinatsættet til det punkt på kurven, hvori $t = 3$.
- Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på parameterkurven, hvor tangenten er lodret.

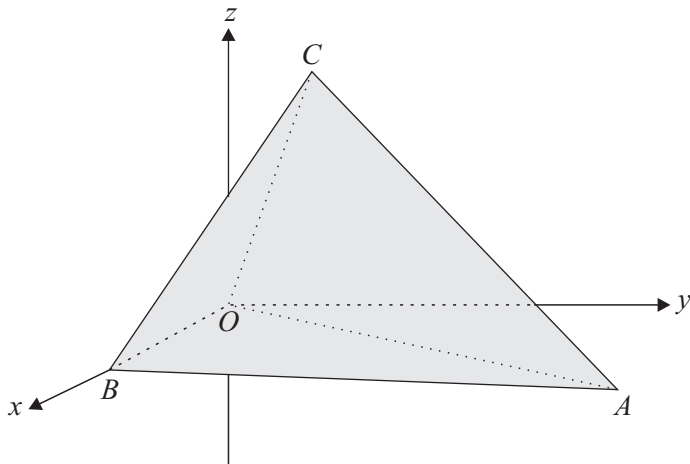
Opgave 12 En ellipse er bestemt ved stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 7 \cos(t) \\ 4 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

- Angiv ellipsens storakse og lilleakse samt koordinatsættet for ellipsens centrum, og bestem ellipsens brændpunkter.

Opgave 13

På figuren nedenfor ses et skævt tetraeder indtegnet i et koordinatsystem, således at hjørnerne er markeret ved punkterne O , A , B og C . Disse har koordinaterne $O = (0,0,0)$, $A = (10,18,-1)$, $B = (13,0,0)$ og $C = (13,8,11)$.



- a) Bestem ligningen for den plan, α , der indeholder trekant OBC .

Den plan β , der indeholder trekant ABC , har ligningen

$$206x + 33y - 24z - 2678 = 0.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem planerne α og β .

Opgave 14

Når en varmluftballon svæver, så styres svævehøjden af temperaturen af luften i ballonen.



I en model antages det, at ballonens højde over jorden kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 1500 - 1000 \sin\left(\frac{\pi}{200}x\right), \quad 0 \leq x \leq 350,$$

hvor x angiver tiden i minutter, og $f(x)$ angiver højden over jorden målt i meter.

- a) Tegn grafen for f , og bestem ballonens maksimale og minimale højde over jorden under flyvningen.
- b) Bestem $f'(200)$, og giv en fortolkning af dette resultat.

- Opgave 15** Ved et sygdomsudbrud i Sydamerika vurderes det, at udviklingen af antal smittede som funktion af tiden t , målt i uger, kan beskrives ved differentialligningen

$$S'(t) = 2,96 \cdot 10^{-7} \cdot S(t) \cdot (500\,000 - S(t)) ,$$

hvor $S(t)$ er antal smittede til tiden t . Det oplyses, at der fra starttidspunktet er 25 000 smittede personer.

- Bestem forskriften for S .
- Tegn grafen for funktionen S i et passende koordinatsystem, og beskriv, hvad tallet 500 000 betyder for udviklingen i antal smittede ifølge modellen.

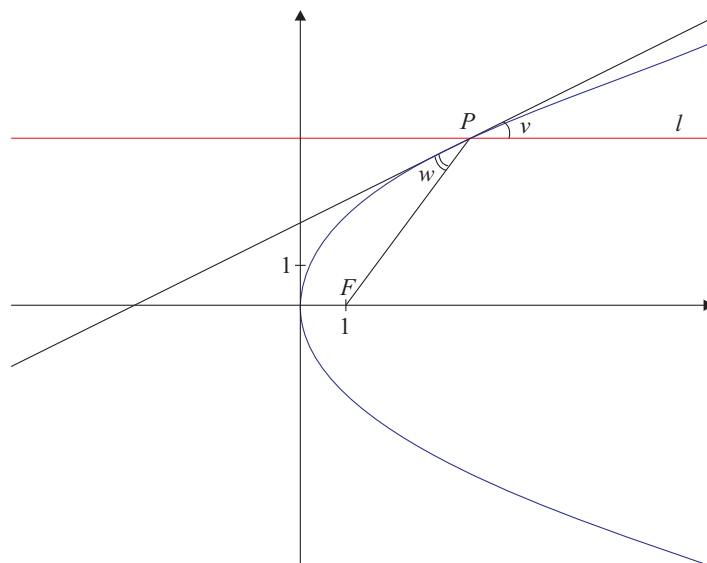
- Opgave 16** I den norske *Tippeligaen* i fodbold vandt Rosenborg mesterskabet både i 2009 og 2010. Undervejs i 2009 sæsonen vandt de 20 kampe ud af de 30 kampe, som sæsonen bestod af. I den netop overståede 2010 sæson lå Rosenborg nr. 1 pr. 9/8 2010 og havde vundet 15 ud af de spillede 22 kampe. En norsk avis udtalte dengang, at Rosenborg i 2010 resultatmæssigt var endnu bedre end i sæsonen 2009.

- Opstil en hypotese, og undersøg på et signifikansniveau på 5 % om, der er belæg for udtalelsen fra den norske avis.

Opgave 17

Parameterkurven for stedfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, hvor $t \in \mathbb{R}$, er en parabel, der er

symmetrisk omkring x -aksen som vist på figuren. Punktet $F = (1, 0)$ kaldes parablens brændpunkt, og FP kaldes brændstrålen, hvor P er et vilkårligt punkt på parablen. På figuren ses tangenten til grafen i punktet P samt linjen l , der går gennem P og er parallel med x -aksen. Vinklen mellem tangenten og linjen l kaldes v , og vinklen mellem tangenten og brændstrålen FP kaldes w .



- Bestem v og w , når $P = (4, 4)$, og vis, at $v = w$ uanset, hvorpå parablen P ligger.

