
Matematik A

Studentereksamen

Forsøg med digitale eksamensopgaver
med adgang til internettet

Forberedelsesmateriale

Torsdag den 12. august 2010
kl. 09.00-14.00

Parameterkurver

Vi har tidligere set på en linjes parameterfremstilling, f.eks. af typen:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R},$$

og hvor $\overrightarrow{OP}$ er stedvektor til punktet $P = (x, y)$, som ligger på linjen og er afhængig af parameteren t .

Vi kan betragte punktet $P = (x, y)$, som en partikel, der over tid gennemløber linjen. Dvs partiklens position på linjen til tiden t er bestemt ved stedfunktionen

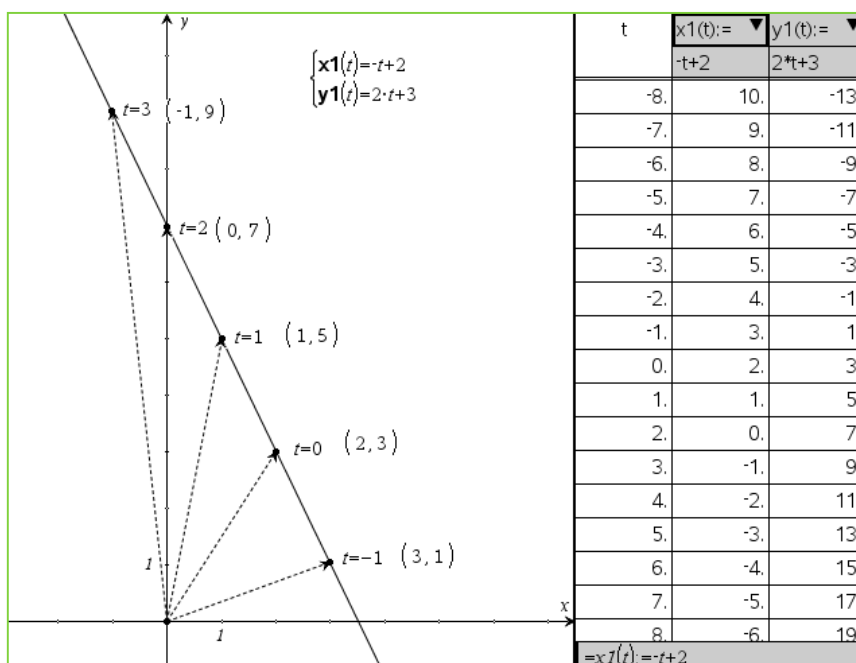
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 - 1 \cdot t \\ 3 + 2 \cdot t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Fx er partiklens position til tiden $t = 2$ beskrevet ved stedvektoren

$$\vec{s}(2) = \begin{pmatrix} 2 - 1 \cdot 2 \\ 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dvs partiklen befinder sig på y -aksen i punktet $P = (0, 7)$, når $t = 2$. Tilsvarende kan partiklens position bestemmes ved en stedvektor for enhver værdi af t , således at partiklen gennemløber hele linjen, når t gennemløber de reelle tal.

Nedenfor ses parameterkurven (dvs linjen) for stedfunktionen $\vec{s}(t)$, hvor partiklens position til forskellige tidspunkter er indtegnet sammen med de tilhørende stedvektorer. Tabellen til højre beskriver partiklens position til en række tidspunkter.



Figur 1

Ovenstående kan generaliseres til at omfatte meget andet end linjer, idet stedfunktionen for en partikel, der gennemløber en given parameterkurve over tid er defineret ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in R,$$

og funktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er reelle funktioner. Disse kaldes koordinatfunktioner for stedfunktionen.

Parameterkurven for $\vec{s}(t)$ består af de punkter, der har $\vec{s}(t)$ som stedvektor, når t gennemløber de reelle tal eller et interval i de reelle tal.

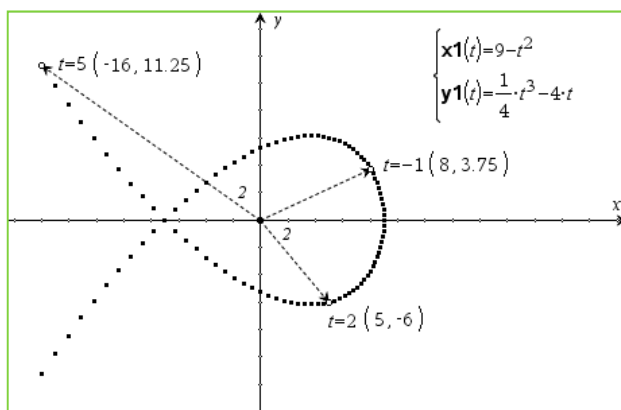
Eksempel 1

Vi betragter parameterkurven for stedfunktionen

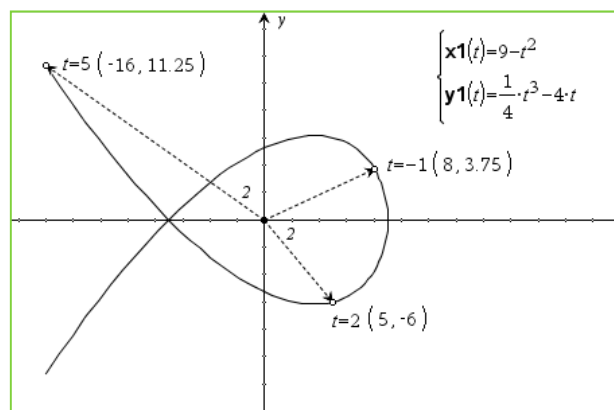
$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 9 - t^2 \\ \frac{1}{4}t^3 - 4t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in R.$$

Når man tegner parameterkurver i et matematikprogram, så skal man typisk angive skridtlængden for parameteren t samt det interval, parameteren skal gennemløbe. Parameterkurver er helt glatte kruver, ligesom grafer for reelle funktioner. Men hvis den skridtlængde, man vælger, er for lang, så vil kurven i nogle programmer vises, som var den sammensat af linjestykker. I disse tilfælde må man ændre skridtlængden, så kurven fremstår glat.

På figuren nedenfor har vi anvendt skridtlængde 0.1, og vi har tegnet kurven i parameterintervallet $-5 \leq t \leq 5$. På figur 2 ses de beregnede punkter, og på figur 3 fremstår parameterkurven sammenhængende. Desuden ses på begge figurer stedvektorerne til 3 udvalgte punkter.



Figur 2



Figur 3

Vi bestemmer parameterkurvens skæringspunkter med akserne.

Stedfunktionen har koordinatfunktionerne

$$x(t) = 9 - t^2 \quad \text{og} \quad y(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4t.$$

Vi bestemmer skæringspunkter med x -aksen, idet vi sætter y -koordinatfunktionen lig med nul, dvs vi løser ligningen

$$\frac{1}{4}t^3 - 4t = 0,$$

og med CAS, dvs $\text{solve}(\frac{1}{4}t^3 - 4t = 0, t)$, får vi

$$t = -4 \vee t = 0 \vee t = 4.$$

Dvs parameterkurven skærer x -aksen, når $t = -4$, $t = 0$ og når $t = 4$.

Vi bestemmer x -koordinaten i skæringspunkterne, idet vi indsætter de fundne parameterværdier i x -koordinatfunktionen. Dvs vi får

Parameterværdi	Beregning	Skæringspunkt med x -aksen
$t = 0$	$x(0) = 9$	$P_0 = (9, 0)$
$t = -4$	$x(-4) = -7$	$P_{-4} = (-7, 0)$
$t = 4$	$x(4) = -7$	$P_4 = (-7, 0)$

Heraf ses, at punktet $(-7, 0)$ er et dobbeltpunkt, hvilket også fremgår af figuren ovenfor.

Skæringspunkterne med y -aksen bestemmes ligesom ovenfor, nu er det jo blot x -koordinatfunktionen, der skal være nul. Dvs vi løser ligningen

$$9 - t^2 = 0,$$

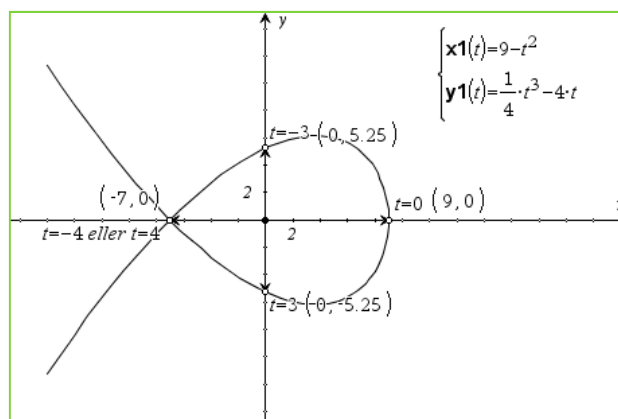
og med CAS, dvs $\text{solve}(9 - t^2 = 0, t)$, får vi

$$t = -3 \vee t = 3.$$

Dvs parameterkurven skærer y -aksen, når $t = -3$ og $t = 3$. Vi bestemmer y -koordinaten i skæringspunkterne, idet vi indsætter de fundne parameterværdier i y -koordinatfunktionen. Dvs vi får

Parameterværdi	Beregning	Skæringspunkt med y -aksen
$t = -3$	$y(-3) = 5.25$	$P_{-3} = (0, 5.25)$
$t = 3$	$y(3) = -5.25$	$P_3 = (0, -5.25)$

Nedenfor er alle 5 skæringspunkter indtegnet.



Figur 4

Øvelse 1

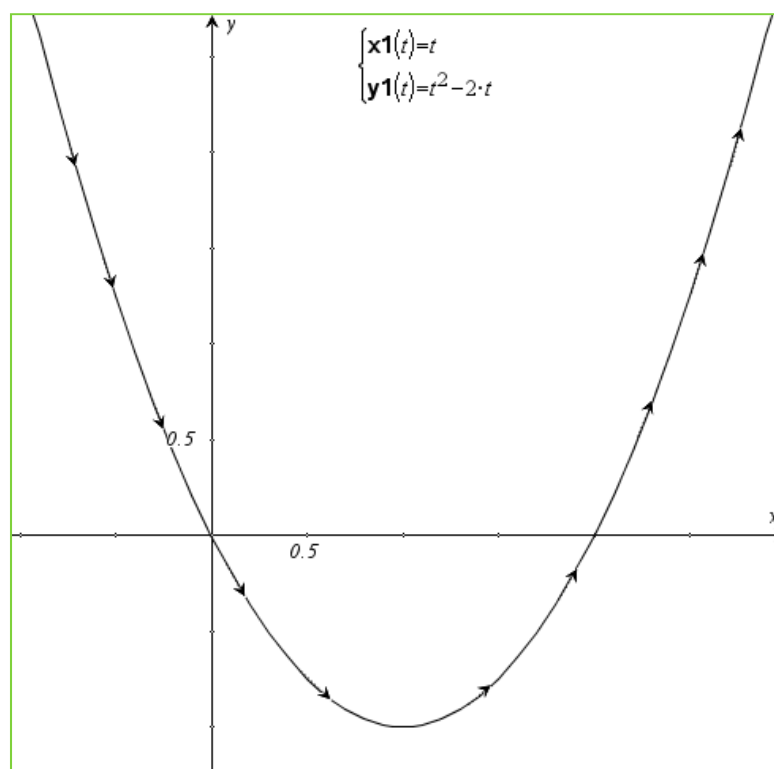
Tegn parameterkurven og gennemfør ovenstående beregninger i dit CAS-program.

Øvelse 2

På figuren ses parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Parameterkurven er en parabel.



Figur 5

Beregn koordinatsættene til udvalgte punkter, hvor $-1 \leq t \leq 3$, og benyt dette til at argumentere for at parablens gennemløb går fra parablens venstre gren ned mod toppunktet videre op ad parablens højre gren som vist på figuren.

Øvelse 3

a) Tegn parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 - t^4 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestem koordinatsættene for de punkter, hvori parameterkurven skærer koordinatsystemets akser.

Hastighedsvektor og tangent

Vi definerer en hastighedsfunktion $\vec{v}(t)$ til stedfunktionen $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, hvor $t \in R$, ved

$$\vec{v}(t) = \vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in R$$

og hvor $x'(t)$ og $y'(t)$ er koordinatfunktionernes afledede funktioner. Dvs når man differentierer en stedfunktion ved at differentiere hver koordinatfunktion for sig, så får man hastighedsfunktionen.

Hastighedsfunktionen $\vec{v}(t)$ kaldes også for hastighedsvektoren i punktet med parameterværdien t , og man kan vise, at hvis den ikke er nulvektoren, er den retningsvektor for parameterkurvens tangent i punktet med parameterværdi tiden t .

Eksempel 2:

En stedfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 - t^3 \\ 4t - t^2 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in R.$$

Koordinatfunktionerne er her

$$x(t) = 4t^2 - t^3 \quad \text{og} \quad y(t) = 4t - t^2.$$

De afledede af koordinatfunktionerne er

$$x'(t) = 8t - 3t^2 \quad \text{og} \quad y'(t) = 4 - 2t.$$

Hastighedsfunktion er således givet ved

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 8t - 3t^2 \\ 4 - 2t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in R.$$

Vi bestemmer hastighedsvektoren til parameterkurven i punktet, hvor parameterværdien er $t = 1$, dvs i punktet $P_1 = (x(1), y(1)) = (3, 3)$. Vi indsætter derfor $t = 1$ i hastighedsfunktionen, og vi får

$$\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hastighedsvektoren i punktet $P_1 = (3, 3)$ er således $\vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vi vil nu bestemme det punkt, hvori hastighedsvektoren er vandret, dvs det punkt, hvori parameterkurven har vandret tangent.

Hastighedsvektorens koordinatfunktioner er

$$x'(t) = 8t - 3t^2 \quad \text{og} \quad y'(t) = 4 - 2t.$$

Hastighedsvektoren er netop vandret, når dens lodrette udstrækning er nul, dvs når

y' - koordinatfunktionen er nul. Vi løser derfor ligningen

$$y'(t) = 0,$$

og med CAS, dvs $\text{solve}(y'(t) = 0, t)$, får vi

$$t = 2.$$

Dvs hastighedsvektoren er vandret, når $t = 2$, dvs i punktet $P_2 = (x(2), y(2)) = (8, 4)$. Hastighedsvektorens koordinater er

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vil nu bestemme de punkter, hvori hastighedsvektoren er lodret, dvs de punkter, hvori parameterkurven har lodret tangent.

Hastighedsvektoren er netop lodret, når dens vandrette udstrækning er nul, dvs når x -koordinatfunktionen er nul. Vi løser derfor ligningen

$$x'(t) = 0$$

og med CAS, dvs $\text{solve}(x'(t) = 0, t)$, får vi

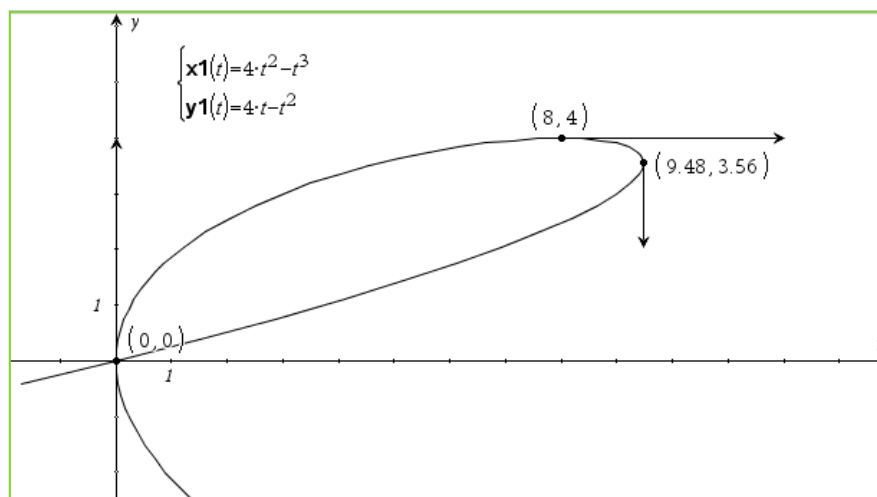
$$t = 0 \vee t = \frac{8}{3}.$$

Dvs hastighedsvektoren er lodret, når $t = 0$, og når $t = \frac{8}{3}$, dvs i punkterne $P_0 = (x(0), y(0)) = (0, 0)$ og $P_{\frac{8}{3}} = (x(\frac{8}{3}), y(\frac{8}{3})) = (\frac{256}{27}, \frac{32}{9}) = (9.48, 3.56)$.

De to hastighedsvektorer har altså koordinaterne

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}(\frac{8}{3}) = \begin{pmatrix} x'(\frac{8}{3}) \\ y'(\frac{8}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.33 \end{pmatrix}.$$

De tre hastighedsvektorer er alle tegnet ind på parameterkurven nedenfor.



Figur 6

Vi ser, at parameterkurven har et dobbelt punkt i $(0, 0)$. I dette punkt er der således både en lodret tangent og en skrå tangent. Vi bestemmer den skrå hastighedsvektor, idet vi bestemmer den anden parameterværdi i dobbelt punktet ved at løse ligningen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

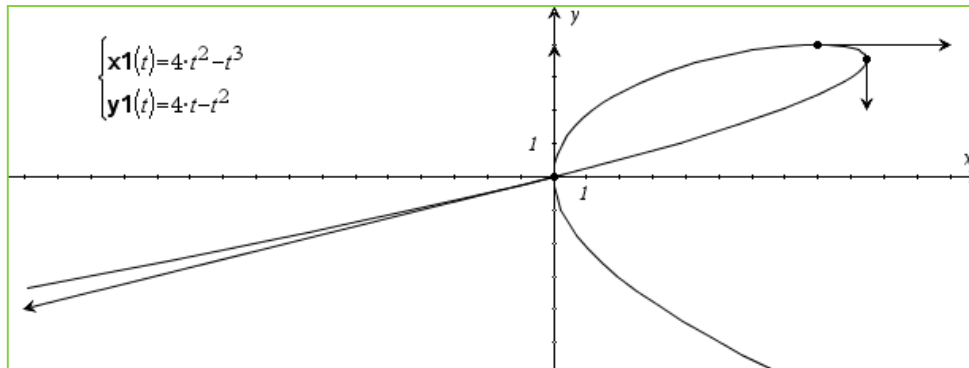
og med CAS, dvs $\text{solve}(\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t)$, får vi

$$t = 0 \vee t = 4.$$

Dvs den anden parameterværdi er $t = 4$, og den skrå hastighedsvektor i dobbelpunktet bliver da

$$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} x'(4) \\ y'(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Nedenfor er også denne hastighedsvektor tegnet ind sammen med de vandrette og de lodrette hastighedsvektorer.



Figur 7

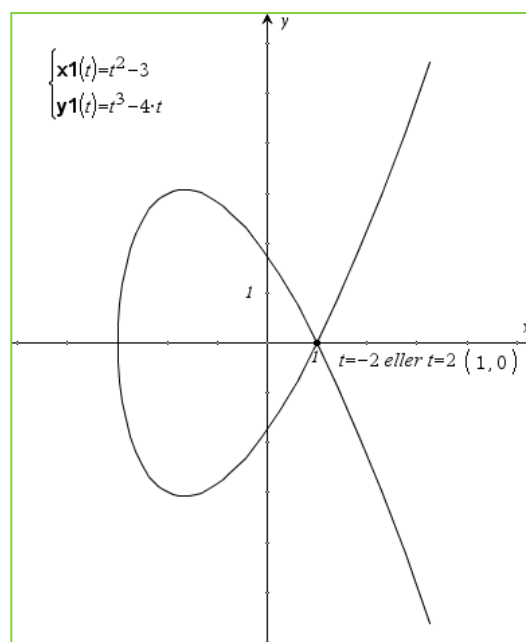
Eksempel 3

En stedfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Parameterkurven har et dobbelpunkt, hvori de to parameterværdier er $t = -2$ og $t = 2$, dvs i punktet $Q = (2^2 - 3, 2^3 - 4 \cdot 2) = Q(1, 0)$.

Vi tegner parameterkurven



Figur 8

Vi vil bestemme vinklen mellem parameterkurvens to tangenter i dobbelpunktet. Først bestemmer vi hastighedsvektorerne.

Hastighedsfunktion er givet ved

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 4 \end{pmatrix}, \text{ hvor } t \in \mathbb{R}.$$

Hastighedsvektorerne til parameterkurven i dobbelpunktet, hvor parameterværdierne er $t = -2$ og $t = 2$, har derfor koordinaterne

$$\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-2)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Vi kan bestemme vinklen mellem disse to hastighedsvektorer ved den sædvanlige formel til beregning af vinkler mellem vektorer, dvs

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}(-2) \cdot \vec{v}(2)}{|\vec{v}(-2)| |\vec{v}(2)|}.$$

Vi skal altså bestemme hastighedsvektorenes længder. Vi beregner længden af vektorerne ved den sædvanlige længdeformel, dvs

$$|\vec{v}(-2)| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

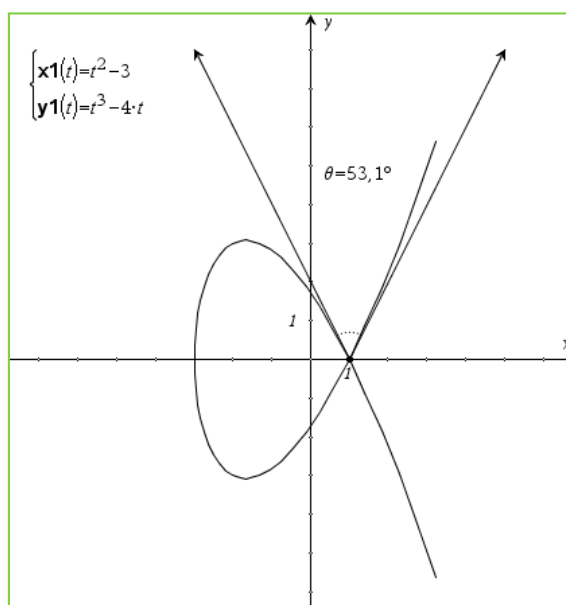
$$|\vec{v}(2)| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}.$$

Vi indsætter nu i vinkelformlen, dvs

$$\cos(\theta) = \frac{-16 + 64}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{80}} = \frac{3}{5}$$

og dermed er vinklen mellem vektorerne $\theta = 53,1^\circ$.

Begge hastighedsvektorer samt vinklen imellem dem er tegnet ind på parameterkurven nedenfor.



Figur 9

Bemærk, at hastighedsvektorens retning er afhængig af den måde, hvorpå punktet gennemløber kurven, når t gennemløber de reelle tal.

Vi bestemmer en ligning for hver af tangenterne, l_1 og l_2 , idet hastighedsvektorerne er retningsvektorer for tangenterne. Dvs tværvektorerne til disse er normalvektorer for tangenterne. Vi får da, at normalvektoren for l_1 er $\vec{n}_{l_1} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, og normalvektoren for l_2 er $\vec{n}_{l_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

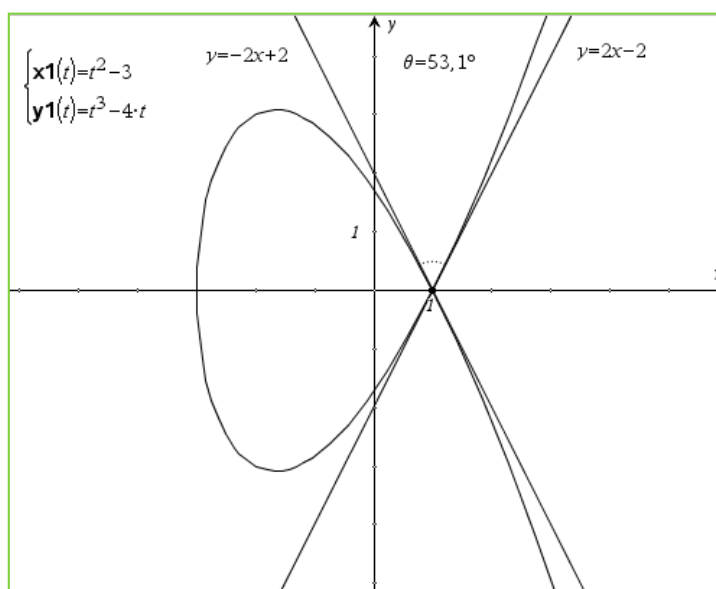
Vi ved at dobbeltpunktet $Q(1,0)$ ligger på begge tangenter, så derfor bliver ligningerne for de to tangenter

$$\begin{aligned} l_1 : -8(x-1) + (-4)(y-0) &= 0 \\ -8x - 4y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} l_2 : -8(x-1) + 4(y-0) &= 0 \\ -8x + 4y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Nedenfor ses parameterkurven, hvor de to tangenter er indtegnet.



Figur 10

Øvelse 4

- a) Tegn parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix},$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

- b) Bestem parameterværdien i de punkter på kurven, hvori der enten er vandret eller lodret tangent, og bestem koordinatsættet til disse punkter.

Kurven har et dobbeltpunkt, hvori de to parameterværdier er $t = -\sqrt{3}$ og $t = \sqrt{3}$.

- c) Bestem de to hastighedsvektorer i dobbeltpunktet, og bestem vinklen imellem disse.
d) Bestem ligningerne for hver af de to tangenter i dobbeltpunktet.

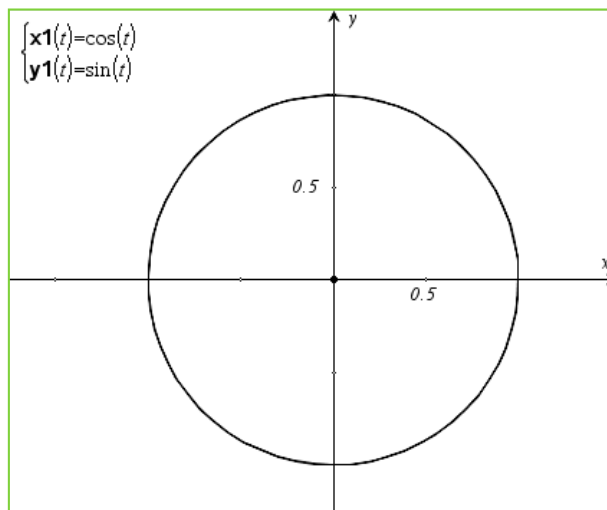
Cirkler som parameterkurver

I det følgende skal vi undersøge cirkler som parameterkurver.

Eksempel 4

På figuren nedenfor ses stedfunktionen for parameterkurven

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

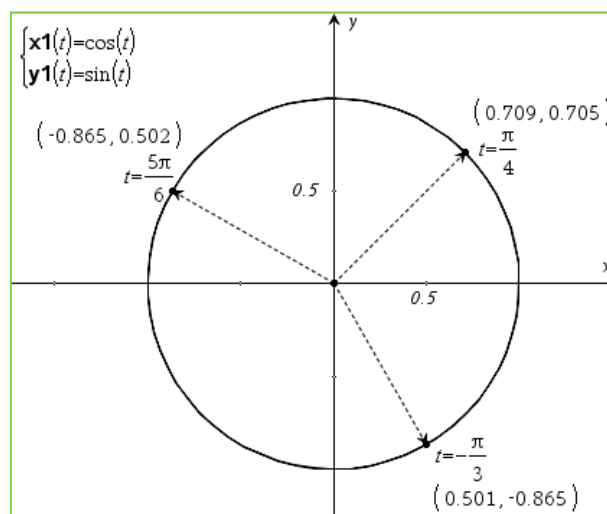


Figur 11

Parameterkurven er en enhedscirkel, dvs en cirkel med centrum i (0,0) og radius 1.

Parameterkurven fremkommer ved, at vi for alle værdierne t i parameterintervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ bestemmer stedvektoren og afsætter det tilhørende punkt. Nedenfor ses de tre stedvektorer for parameterværdierne

$$t = \frac{\pi}{4}, \quad t = -\frac{\pi}{3} \quad \text{og} \quad t = \frac{5\pi}{6}.$$



Figur 12

Øvelse 5

Bestem tre andre punkter på enhedscirklen.

Stedfunktionen for cirkler med en anden radius og et andet centrum, får vi ved at ændre på koordinatfunktionerne i stedfunktionen. Øvelsen nedenfor behandler netop dette.

Øvelse 6

Parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

er en cirkel.

- a) Tegn parameterkurven, og bestem centrum og radius for denne cirkel.

Undersøg nu stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ved på skift at lade x_0 , y_0 og r variere.

- b) Sæt $x_0 = -2$ og $y_0 = 4$. Lad r variere.
Hvilken betydning har r for parameterkurvens udseende?
- c) Sæt $x_0 = -2$ og $r = 3$. Lad y_0 variere.
Hvilken betydning har y_0 for parameterkurvens beliggenhed?
- d) Sæt $y_0 = 4$ og $r = 3$. Lad x_0 variere.
Hvilken betydning har x_0 for parameterkurvens beliggenhed?

Øvelse 7

- a) Bestem stedfunktionen for en cirkel med radius på 5 og centrum i (3,7).
b) Tegn cirklen.

Øvelse 8

Betragt stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Bestem hastighedsvektoren for $t = \frac{\pi}{3}$.
b) Tegn parameterkurven og den fundne hastighedsvektor.

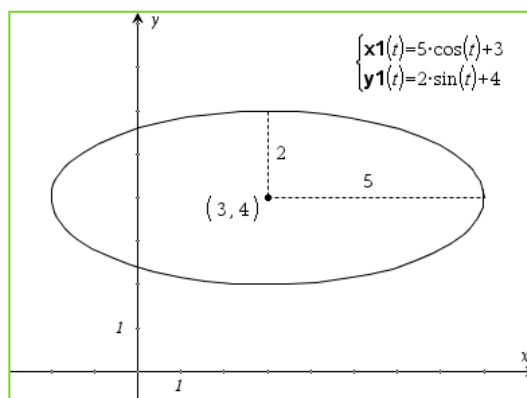
Ellipser som parameterkurver

I det følgende skal vi undersøge ellipser som parameterkurver.

Eksempel 5

Figuren viser parameterkurven for stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Figur 13

Parameterkurven kaldes en ellipse med centrum i $(3, 4)$, storakse $a = 2 \cdot 5 = 10$ og lilleakse $b = 2 \cdot 2 = 4$.

Øvelse 9

Undersøg stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ved på skift at lade x_0 , y_0 , a og b variere.

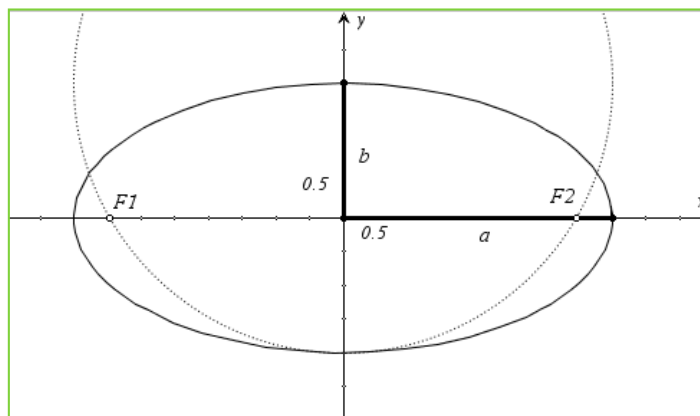
- Sæt $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ og $b = 2$. Lad a variere.
Hvilken betydning har a for parameterkurvens udseende?
- Sæt $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ og $a = 5$. Lad b variere.
Hvilken betydning har b for parameterkurvens udseende?
- Sæt $x_0 = 3$, $a = 5$ og $b = 2$. Lad y_0 variere.
Hvilken betydning har y_0 for parameterkurvens beliggenhed?
- Sæt $y_0 = 4$, $a = 5$ og $b = 2$. Lad x_0 variere.
Hvilken betydning har x_0 for parameterkurvens beliggenhed?

Øvelse 10

- Bestem en stedfunktion for en ellipse med centrum i $(-1, 2)$, vandret storakse på 14 og lodret lilleakse 6.
- Tegn parameterkurven for ellipsen.

Brændpunkter

Vi betragter ellipsen med centrum i $(0,0)$ og storakse $2a$ samt lilleakse $2b$ (se figur), hvor $a > b$. Ellipsens brændpunkter, F_1 og F_2 , er defineret som skæringspunkterne mellem ellipsens storakse og cirklen med centrum $P = (0,b)$, og radius a .



Figur 14

Øvelse 11

Vis, at afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt til brændpunkterne er

$$|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ hvor } a > b.$$

Øvelse 12

Betrakt en ellipse med centrum i $C = (x_0, y_0)$, vandret storakse $2a$ og lodret lilleakse $2b$, hvor $a > b$.

Vis, at denne ellipse har brændpunkterne

$$F_1 = (x_0 - \sqrt{a^2 - b^2}, y_0) \quad \text{og} \quad F_2 = (x_0 + \sqrt{a^2 - b^2}, y_0).$$

Hvis $P = (x, y)$ er et tilfældigt punkt på ellipsen kaldes linjestykkerne PF_1 og PF_2 brændstrålerne fra P .

Øvelse 13

- Bestem F_1 og F_2 for ellipsen i eksempel 5.
- Tegn ellipsen og afsæt et tilfældigt punkt $P = (x, y)$ på parameterkurven.
- Bestem længden af brændstrålerne fra P .
- Undersøg ved at variere $P = (x, y)$, hvad der gælder for afstanden $|PF_1| + |PF_2|$.

Øvelse 14

Vi ser igen på en ellipse med centrum i $C = (x_0, y_0)$, vandret storakse $2a$ og lodret lilleakse $2b$, hvor $a > b$, som jo har stedfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ hvor } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

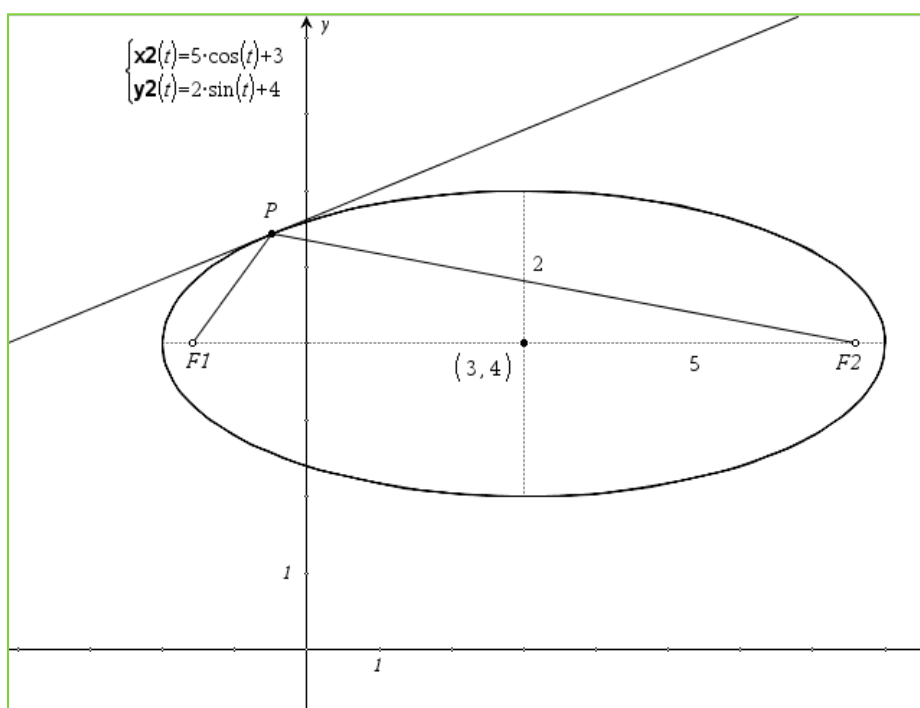
Lad $P = (x, y)$ være et punkt på ellipsen.

Vis, at $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, når F_1 og F_2 betegner ellipsens brændpunkter.

Øvelse 15

Vi ser igen på ellipsen fra eksempel 5.

- Tegn ellipsen, og afsæt et tilfældigt punkt $P = (x, y)$ på parameterkurven.
- Tegn brændstrålerne fra P , og tegn tangenten til parameterkurven i punktet P .
- Bestem vinklen mellem hver af brændstrålerne fra P og tangenten i P (se figur).



Når en lysstråle rammer en tangent til en kurve i et punkt P , så vil den vinkel lysstrålen rammer tangenten med være den samme som den vinkel lysstrålen forlader tangenten med. Dette udnyttes i en nyrestensknuser, hvor man knuser nyresten med ultralyd dvs uden operative indgreb. Ultralydskilden er placeret i en ellipses ene brændpunkt, mens patientens nyre placeres i det andet brændpunkt. Herefter sendes ultralyd ud mod ellipsen, hvor det reflekteres og sendes præcist over i det andet brændpunkt, hvor det rammer nyrestenen.

