MATEMATIK
A-NIVEAU-Net
Forberedelsesmateriale

6 timer med vejledning

Forberedelsesmateriale til den skriftelige prøve:

Prøvesæt 2 2010/2011

Forberedelsesmateriale til stx-A-Net MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

3-5 delspørgsmål i delprøve 2 af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af et kernestofemne.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til den skriftlige prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Komplekse tal

Når vi skal løse andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

hvor *a*, *b* og *c* er reelle tal, så bruger vi løsningsformlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ligningens diskriminant opskriver vi som det selvstændige udtryk $d = b^2 - 4ac$, fordi diskriminanten jo har afgørende betydning for antallet af løsning til andengradsligningen.

Der gælder som bekendt, at når $d < 0$, så har ligningen ingen løsninger.

Andengradsligningen

$$x^2 + 1 = 0,$$

har ingen løsninger, idet der ikke er noget *reelt tal*, der ganget med sig selv giver -1. Havde der været en løsning, så skulle vi kunne give mening til udtrykket $\sqrt{-1}$, fordi når vi løser ligningen efter de sædvanlige regler, så får vi

$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1}.$$

Accepterer vi nu, at der findes et sådant tal, så skal der jo gælde, at $(\sqrt{-1})^2 = -1$. I det følgende vil vi antage at tallet $\boldsymbol{i}$ har den egenskab, at $i^2 = -1$. Ud fra ovenstående er det klart, at dette tal *ikke* er *et reelt tal*. Ligningen ovenfor har ingen *reelle tal* som løsninger, men ligningen har det, som vi vil kalde *komplekse tal* som løsninger. Vi vil i det følgende vise, at enhver andengradsligning altid har to løsninger, når vi arbejder inden for de komplekse tal.

Definition 1	De komplekse tal består af alle tal på formen $z = x + y \cdot \boldsymbol{i}$, hvor *x* og *y* er reelle tal. Tallet *x* kaldes den reelle del af *z* og skrives også $\mathrm{Re}(z)$, mens *y* kaldes imaginærdelen af *z* og skrives $\mathrm{Im}(z)$.

Øvelse 1	Eksempler på komplekse tal: $z_1 = 2 + 3\boldsymbol{i}$, $z_2 = 4$ og $z_3 = -5\boldsymbol{i}$. a) Angiv den reelle del af de tre komplekse tal z_1, z_2 og z_3. b) Opskriv selv tre nye komplekse tal.

Regning med komplekse tal

Addition (lægge til), *subtraktion* (trække fra), *multiplikation* (gange) og *division* (dividere) foregår på samme måde for de komplekse tal som for de reelle tal. Man skal blot huske på, at $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Man kan altid kunne reducere sit regneudtryk, så resultatet ender med at stå på formen $x + y \cdot \boldsymbol{i}$.

To komplekse tal er givet ved $z_1 = 2 + 3\boldsymbol{i}$ og $z_2 = 4 - 5\boldsymbol{i}$.

Vi illustrerer de tre første regneoperationer med disse to komplekse tal:

Addition $(+)$	$z_1 + z_2 = (2 + 3\boldsymbol{i}) + (4 - 5\boldsymbol{i}) = 2 + 3\boldsymbol{i} + 4 - 5\boldsymbol{i} = (2 + 4) + (3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{i}) = 6 - 2\boldsymbol{i}.$

Subtraktion $(-)$	$z_1 - z_2 = (2+3\boldsymbol{i}) - (4-5\boldsymbol{i}) = 2+3\boldsymbol{i} - 4 + 5\boldsymbol{i} = (2-4) + (3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{i}) = -2 + 8\boldsymbol{i}.$
Multiplikation $(\cdot)$	$z_1 \cdot z_2 = (2+3\boldsymbol{i}) \cdot (4-5\boldsymbol{i}) = 2\cdot 4 - 2\cdot 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{i}\cdot 4 - 3\boldsymbol{i}\cdot 5\boldsymbol{i} = 8 - 10\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{i} - 15\boldsymbol{i}^2$ Nu udnytter vi at $\boldsymbol{i}^2 = -1$, og så får vi $z_1 \cdot z_2 = 8 + 2\boldsymbol{i} - 15\cdot(-1) = 8 + 2\boldsymbol{i} + 15 = 23 + 2\boldsymbol{i}$

Division af komplekse tal er lidt mere kompliceret, og inden vi introducerer den regneoperation vil vi indføre en ny regneoperation, som er knyttet specielt til de komplekse tal, nemlig *kompleks konjugering*.

Definition 2 Ved den kompleks konjugerede til et komplekst tal $z = x + y\cdot\boldsymbol{i}$ forstås det komplekse tal $\overline{z} = x - y\cdot\boldsymbol{i}$.

Vi illustrerer nu den sidste af de fire regneoperation med de samme to komplekse tal som ovenfor:

Division $(:)$

Vi vil udføre divisionen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3\boldsymbol{i}}{4-5\boldsymbol{i}},$$

idet vi benytter den kompleks konjugerede til z_2, dvs. $\overline{z}_2 = \overline{4-5\boldsymbol{i}} = 4+5\boldsymbol{i}$, til i første omgang at forlænge brøken

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3\boldsymbol{i}}{4-5\boldsymbol{i}} = \frac{2+3\boldsymbol{i}}{4-5\boldsymbol{i}} \cdot \frac{\overline{4-5\boldsymbol{i}}}{\overline{4-5\boldsymbol{i}}} = \frac{2+3\boldsymbol{i}}{4-5\boldsymbol{i}} \cdot \frac{4+5\boldsymbol{i}}{4+5\boldsymbol{i}} = \frac{(2+3\boldsymbol{i})\cdot(4+5\boldsymbol{i})}{(4-5\boldsymbol{i})\cdot(4+5\boldsymbol{i})},$$

Vi ganger parenteserne ud, idet vi i nævneren udnytter en af kvadratsætningerne, dvs. vi får

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+10\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{i}^2}{16-25\boldsymbol{i}^2} = \frac{-7+22\boldsymbol{i}}{16+25} = \frac{-7+22\boldsymbol{i}}{41} = \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}\boldsymbol{i} = -0{,}17 + 0{,}54\boldsymbol{i}.$$

Eksempel 1 Der gælder, at $\overline{z}\cdot z = x^2 + y^2$.

Vi kan eftervise dette ved multiplikation af de to komplekse tal $z = x + y\cdot\boldsymbol{i}$ og $\overline{z} = x - y\cdot\boldsymbol{i}$, idet vi igen udnytter en af kvadratsætningerne, dvs. vi får

$$\overline{z}\cdot z = (x - y\cdot\boldsymbol{i})\cdot(x + y\cdot\boldsymbol{i}) = x^2 - (y\cdot\boldsymbol{i})^2 = x^2 + y^2.$$

Regning med komplekse tal kan nemt udføres på et CAS-værktøj (her TI-Interactive), idet tallet $\boldsymbol{i}$ findes som et indbygget symbol ligesom e og π:

$$(4+3\cdot\boldsymbol{i})\cdot(5-7\cdot\boldsymbol{i}) = 41 - 13\cdot\boldsymbol{i} \quad \text{og} \quad \frac{4+5\cdot\boldsymbol{i}}{6-7\cdot\boldsymbol{i}} = \frac{-11}{85} + \frac{58}{85}\cdot\boldsymbol{i}.$$

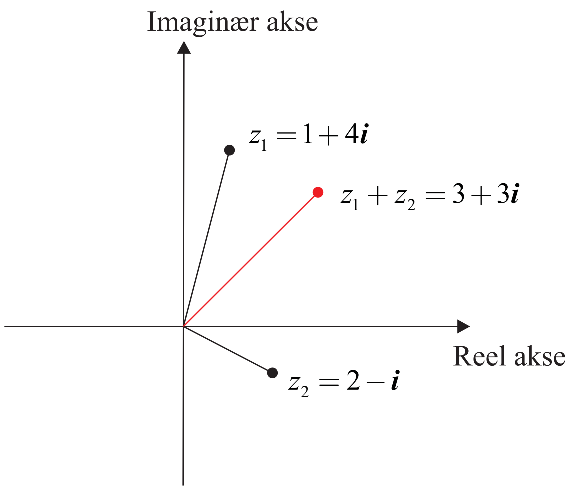
Øvelse 1 Bestem ved håndregning nedenstående 3 komplekse tal og kontrollér resultaterne vha. et CAS-værktøj:

a) $(2+3\boldsymbol{i})-(7-4\boldsymbol{i})$ b) $(2+3\boldsymbol{i})\cdot(7+6\boldsymbol{i})$ c) $\dfrac{(2+3\boldsymbol{i})}{(7+6\boldsymbol{i})}$.

Den komplekse talplan

Man kan afbilde det komplekse tal $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$ i punktet (x_1, y_1) i en plan med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

Alle komplekse tal på formen $x + 0\boldsymbol{i}$ repræsenterer blot alle de reelle tal, fordi den imaginære del er nul. Disse tal afbildes på 1.aksen, og man kalder derfor denne akse for den *reelle akse*. Der gælder altså, at alle de reeelle tal er indeholdt i de komplekse tal. Specielt ser vi, at tallet 1 afbildes i punktet (1,0) svarende til at enheden på den reelle akse er 1.



Alle komplekse tal på formen $0 + y\boldsymbol{i}$, hvor den reelle del er nul kaldes rent imaginære tal. Disse tal afbildes på 2.aksen, som derfor kaldes den *imaginære akse*.

Specielt ser vi her, at tallet $\boldsymbol{i}$ afbildes i punktet (0,1), og derfor kalder vi $\boldsymbol{i}$ *den imaginære enhed*.

I vektorregning kalder vi vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ fra begyndelsespunktet (0,0) til punktet $A(a_1, a_2)$ for stedvektoren til A, og addition af to komplekse tal svarer geometrisk set til addition af stedvektorerne til de punkter som repræsenterer de komplekse tal i den komplekse talplan.

Eksempel 2 To komplekse tal er givet ved $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$ og $z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$.

Ved addition får vi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\boldsymbol{i},$$

og derfor afbildes det komplekse tal $z_1 + z_2$ i punktet $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Dette punkt har netop sumvektoren for de to stedvektorer til hhv. z_1 og z_2 som stedvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Øvelse 2 To komplekse tal er givet ved $z_1 = 6+2\boldsymbol{i}$ og $z_2 = 7-2\boldsymbol{i}$.

a) Tegn de to punkter, der repræsenterer z_1 og z_2 i den komplekse talplan.

b) Bestem længden af stedvektorerne til hvert af de to punkter, som repræsenterer de komplekse tal z_1 og z_2.

c) Bestem for hvert af de komplekse tal z_1 og z_2 den vinkel som disse stedvektorer danner med x-aksen.

Øvelse 3 To komplekse tal er givet ved $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$ og $z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$.

a) Bestem $z_1 - z_2$, og giv en geometrisk fortolkning af tallet.

Øvelse 4 Overvej, at den kompleks konjugerede til $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$, dvs. $\overline{z}_1 = x_1 - y_1\boldsymbol{i}$, geometrisk set blot svarer til at spejle z_1 i den reelle akse.

Modulus og argument

Ved multiplikation og division af komplekse tal er det bekvemt at skrive de komplekse tal på en anden form. I den forbindelse får vi brug for begreberne *modulus* af et komplekst tal og *argument* for et komplekst tal.

Definition 3 Et komplekst tal er givet ved $z = x + y\boldsymbol{i}$.

Ved modulus af z, som betegnes $|z|$, forstår vi længden af stedvektoren til det punkt (x, y), der repræsenterer z i den komplekse talplan, dvs.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sætning 1 Et komplekst tal er givet ved $z = x + y\boldsymbol{i}$.

Da gælder der, at $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Øvelse 5

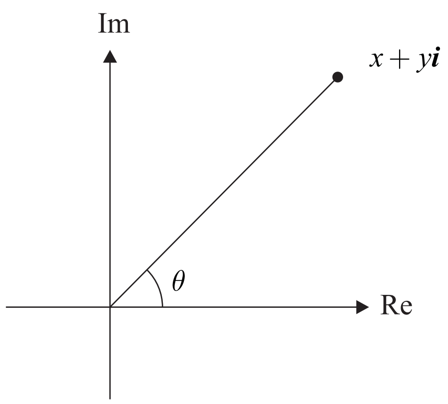
a) Vis, at sætning 1 gælder for det komplekse tal $z = -2 + 5\boldsymbol{i}$.

b) Bevis sætning 1.

Betragt et komplekst tal $z = x + y\boldsymbol{i}$. Vi vil vise, at

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{i}),$$

hvor $|z|$ er modulus for z, og θ er vinklen (regnet i positiv omløbsretning) mellem førsteaksen og stedvektoren til det punkt, der repræsenterer z i den komplekse talplan (se figur).



Øvelse 6 *Først ser vi på et taleksempel*: Et komplekst tal er givet ved $z_1 = 3 + 2\boldsymbol{i}$.

a) Tegn stedvektoren til z_1, og bestem vinklen θ_1 mellem stedvektoren til z og førsteaksen regnet i positiv omløbsretning.

b) Bestem modulus af z_1, og udregn $x_1 = |z_1| \cdot \cos(\theta_1)$ og $y_1 = |z_1| \cdot \sin(\theta_1)$.

Dernæst ser vi på det generelle tilfælde: Betragt et komplekst tal $z = x + y\boldsymbol{i}$. Lad være θ vinklen (regnet i positiv omløbsretning) mellem førsteaksen og stedvektoren til det punkt, som repræsenterer
z i den komplekse talplan.

c) Vis, at $x = |z| \cdot \cos(\theta)$ og $y = |z| \cdot \sin(\theta)$.

d) Vis nu, at $z = |z| \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{i})$.

Definition 4 Ved de *polære koordinater* for det komplekse tal z forstås talparret (r, θ), hvor $r = |z|$ og θ er vinklen (regnet i positiv omløbsretning) mellem førsteaksen og stedvektoren til det punkt, som repræsenterer z i den komplekse talplan.

Tallet z kan skrives på formen

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \boldsymbol{i}).$$

Dette skriver vi også som

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\theta \cdot i},$$

og vi siger i begge tilfælde, at z er angivet på *polær form*.

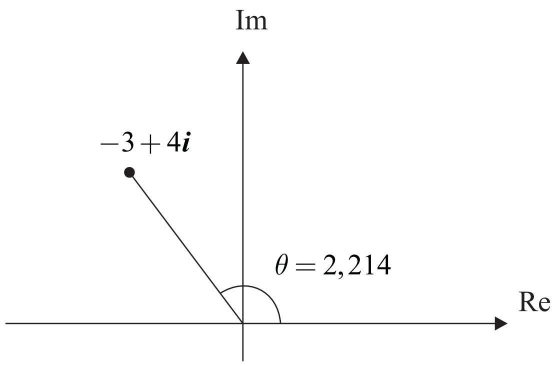
Vinklen θ kaldes *argumentet* for z, og angives som: $\mathrm{Arg}(z)$.

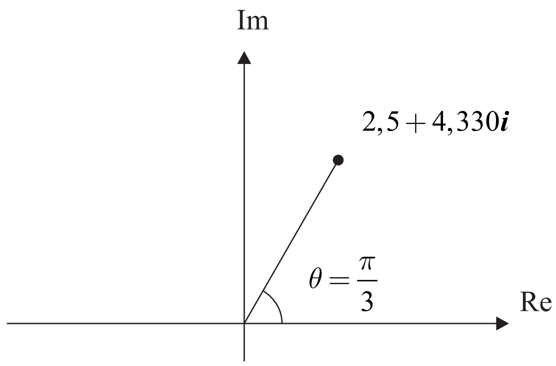
Den overraskende skrivemåde med brug af $\mathrm{e}^{\theta \cdot i}$ anvendes af CAS-værktøjerne og bag dette ligger en sammenhæng mellem eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner, som netop viser sig i den komplekse talplan, men som vi ikke vil komme nærmere ind på her.

CAS-værktøjerne kan let regne frem og tilbage mellem polære og rektangulære koordinater (her TI-Interactive):

$$(-3 + 4 \cdot \boldsymbol{i}) \ \text{toPolar} \rightarrow \mathrm{e}^{(2.214 \cdot \boldsymbol{i})} \cdot 5 \quad \text{og} \quad 5 \cdot \mathrm{e}^{(\pi/3 \cdot \boldsymbol{i})} \rightarrow 2.5 + 4.330 \cdot \boldsymbol{i}.$$

Bemærk, at vinklerne her er regnet i radianer.





Hvis (r, θ) repræsenterer et komplekst tal z på polær form, så vil $(r, \theta + p \cdot 2\pi)$, $p \in \mathbb{Z}$ repræsentere det samme komplekse tal, fordi når vi lægger $p \cdot 2\pi$ til θ, så svarer det jo blot til at løbe et helt antal gange rundt om (0,0). Den værdi blandt $\theta + p \cdot 2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, der ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$ kaldes *hovedargumentet* for z.

Bemærk, at tallet 0 i den komplekse talplan svarer til skæringspunktet mellem den reelle akse og den imaginære akse. Vi vil fremover kalde dette punkt for O .

Øvelse 7 Tre komplekse tal er givet ved $z_1 = 2+3\boldsymbol{i}$, $z_2 = 2-3\boldsymbol{i}$, $z_3 = -7\boldsymbol{i}$ og $z_4 = -3-4\boldsymbol{i}$.

a) Tegn de punkter som repræsenterer z_1, z_2 og z_3 i den komplekse talplan.

b) Angiv z_1, z_2 og z_3 på polær form, og kontroller modulus og argument for hvert af de tre komplekse tal på figuren fra a).

Øvelse 8 Beregn modulus af og argumentet for hvert af de komplekse tal:

a) $z_1 = 2+2\boldsymbol{i}$ b) $z_2 = 2-2\boldsymbol{i}$ c) $z_3 = (2+2\boldsymbol{i})\cdot(2-2\boldsymbol{i})$.

Sætning 2 For ethvert kompleks tal z gælder, der at

$$\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z) \text{ og } |\overline{z}| = |z|.$$

Bevis: Skriver vi z på polær form $z = r\cdot(\cos(\theta)+\sin(\theta)\cdot\boldsymbol{i})$, dvs. $|z| = r$ og $\operatorname{Arg}(z) = \theta$, fås

$$\overline{z} = \overline{r\cdot(\cos(\theta)+\sin(\theta)\cdot\boldsymbol{i})} = r\cdot(\cos(\theta)-\sin(\theta)\cdot\boldsymbol{i}),$$

og da $-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$ og $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, så får vi

$$\overline{z} = r\cdot(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\cdot\boldsymbol{i}).$$

Heraf ses, at $|\overline{z}| = r$ og $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\theta$.

Multiplikation og division i polære koordinater

Hvis to komplekse tal z_1 og z_2 er givet i polære koordinater, altså ved modulus og argument, kan multiplikation og division udtrykkes simpelt.

Sætning 3 For ethvert komplekst tal $z \neq 0$ gælder der, at

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \text{og} \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z).$$

Bevis: Vi skriver z på formen $z = r\cdot(\cos(\theta)+\sin(\theta)\cdot i)$, hvor $r = |z|$ og $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Da er den komplekst konjugerede til z givet ved $\overline{z} = r\cdot(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\cdot i)$, og derfor får vi ved at forlænge med $\overline{z}$ og anvende sætning 1:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r\cdot(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\cdot i)}{r^2} = \frac{1}{r}\cdot(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\cdot i).$$

Nu er $\frac{1}{z}$ skrevet på polær form, og vi ser, at $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$ og at $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta$.

Sætning 4 For to komplekse tal z_1 og z_2 gælder der, at

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ og } \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2).$$

Bevis: Vi skriver z_1 og z_2 på formen

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\boldsymbol{i}) \text{ og } z_2 = r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\boldsymbol{i}),$$

hvor $r_1 = |z_1|$ og $\theta_1 = \operatorname{Arg}(z_1)$, og tilsvarende $r_2 = |z_2|$ og $\theta_2 = \operatorname{Arg}(z_2)$.

Ved multiplikation får vi således

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\boldsymbol{i}) \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\boldsymbol{i})$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\boldsymbol{i} + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\boldsymbol{i} + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\boldsymbol{i}^2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\boldsymbol{i} + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\boldsymbol{i} - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\boldsymbol{i})$$

ved brug af de to additionsformler for de trigonometriske funktioner:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)$$

følger det nu at

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\boldsymbol{i}).$$

Nu er $z_1 \cdot z_2$ skrevet på polær form, og det fremgår at $|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ og $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$.

Øvelse 9 Et komplekst tal er givet ved $z = e^{\theta \cdot \boldsymbol{i}} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\boldsymbol{i}$, dvs. z har modulus 1, $|z| = 1$.

Et andet komplekst tal er givet ved $w = |w| \cdot e^{\varphi \cdot \boldsymbol{i}} = |w| \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\boldsymbol{i})$.

a) Tegn en skitse, der viser de punkter i den komplekse talplan, som repræsenterer de tre komplekse tal z, w og $z \cdot w$.

b) Formuler på baggrund af skitsen en påstand om, hvilken sammenhæng der er mellem de to komplekse tal w og $z \cdot w$, når z har modulus 1.

Øvelse 10 To komplekse tal er givet ved $z_1 = 3 + 2 \cdot i$ og $z_2 = 4 \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot i}$.

a) Benyt resultatet af øvelsen ovenfor til at bestemme de to komplekse tal, der fremkommer ved at dreje hhv. z_1 og z_2 vinklen $\frac{\pi}{3}$ omkring O.

Sætning 5 For to komplekse tal z_1 og z_2 gælder der, at

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ og } \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2).$$

Øvelse 11 Bevis sætning 5 ved at anvende sætning 4 på ligningen: $z_2 = z_1 \cdot \dfrac{z_2}{z_1}$.

Øvelse 12 To komplekse tal er givet ved $z_1 = -2-4\boldsymbol{i}$ og $z_2 = 1-7\boldsymbol{i}$.

a) Bestem modulus og argument for z_1 og z_2, og angiv z_1 og z_2 på polær form.

b) Angiv ved anvendelse af sætning 4 og sætning 5 $z_1 \cdot z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$ på polær form.

c) Tegn de fire komplekse tal z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$ ind i et koordinatsystem.

To komplekse tal er givet ved $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$ og $z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$.

d) Giv en geometriske beskrivelse af, hvordan de to komplekse tal $z_1 \cdot z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$ fremkommer af z_1 og z_2.

Sætning 6 For et komplekst tal z gælder der, at

$$\left|z^n\right| = |z|^n \text{ og } \operatorname{Arg}\left(z^n\right) = n \cdot \operatorname{Arg}(z),$$

hvor n er et helt tal.

Bevis: Beviset er et *induktionsbevis*, som bygger på at en bestemt egenskab går i arv fra et tal i rækken til det næste tal i rækken. Denne bevistype anvendes ofte, når man skal vise, at en bestemt formel gælder for alle naturlige tal 1, 2, 3, 4, ...

Vi sikrer os allerførst, at det første tal i rækken er ”bærer af egenskaben”, dvs. at vores formler giver mening for det første tal i rækken, som er $n=1$. Når $n=1$, så får vi

$$\left|z^1\right| = |z| = |z|^1 \text{ og } \operatorname{Arg}\left(z^1\right) = \operatorname{Arg}(z) = 1 \cdot \operatorname{Arg}(z),$$

dvs. formlen gælder for $n=1$. Fortsætter vi til det næste tal i rækken $n=2$, så får vi

$$|z \cdot z| = |z||z| = |z|^2 \text{ og } \operatorname{Arg}\left(z^2\right) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) = 2 \cdot \operatorname{Arg}(z),$$

altså gælder sætningen også for $n=2$. Dvs. det første (og det andet) tal i rækken er ”bærer af egenskaben”. Sådan kunne vi fortsætte, hvis talrækken var begrænset, men her skal vi jo vise, at formlerne gælder for *alle* hele tal. Derfor laver man det lille trick, at man antager, at *et tilfældigt tal* i rækken er ”bærer af egenskaben”, og derefter viser man så, at det efterfølgende tal bliver ”bærer af egenskaben”, og dermed har man jo vist at alle tallene i rækken er ”bærer af egenskaben”.

Vi antager derfor nu, at det m´te tal i rækken er ”bærer af egenskaben”, dvs. at formlen gælder for $n=m$

$$\left|z^m\right| = |z|^m \text{ og } \operatorname{Arg}\left(z^m\right) = m \cdot \operatorname{Arg}(z).$$

Vi vil nu vise, at så bliver det næste tal i rækken $n=m+1$ også ”bærer af egenskaben”, dvs. så vil formlerne også gælde for $n=m+1$

$$\left|z^{m+1}\right| = |z|^{m+1} \text{ og } \operatorname{Arg}\left(z^{m+1}\right) = (m+1) \cdot \operatorname{Arg}(z).$$

Ved brug af potensregnereglerne og sætning 4 samt antagelsen om, at sætningen gælder for $n = m$, får vi

$$\left|z^{m+1}\right| = \left|z^m \cdot z\right| = \left|z^m\right| \cdot |z| = |z|^m \cdot |z| = |z|^{m+1}$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\left(z^{m+1}\right) &= \operatorname{Arg}\left(z^m \cdot z\right)\\ &= \operatorname{Arg}\left(z^m\right) + \operatorname{Arg}(z)\\ &= m \cdot \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z)\\ &= (m+1) \cdot \operatorname{Arg}(z).\end{aligned}$$

Vi har nu vist, at tallet $n = m+1$ er ”bærer af egenskaben”, netop hvis tallet før $n = m$ er ”bærer af egenskaben” – altså hvis et tal i rækken er ”bærer”, så *arver* det næste tal i rækken egenskaben! Men vi ved jo, at $n = 1$ er ”bærer”, altså er *alle* de efterfølgende tal i rækken også ”bærere”! Hermed er induktionsbeviset fuldført.

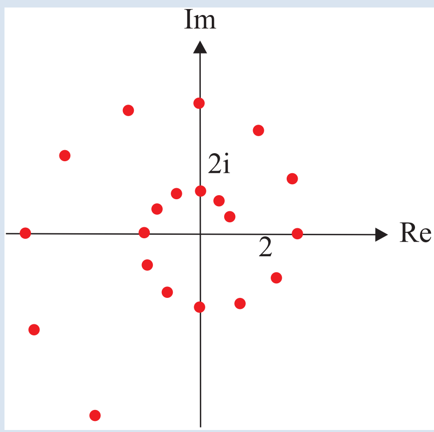
Vi kan altså ifølge sætning 6 skrive det komplekse tal z^n på formen

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n \cdot \theta) + \sin(n \cdot \theta)\boldsymbol{i}\right),$$

hvor $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Eksempel 3 Et komplekst tal er givet ved $z = 1{,}1 \cdot e^{\frac{\pi}{6}\boldsymbol{i}}$.

Så kan tallene z^n, hvor $n = 1, 2 \ldots, 20$, afbildes i den komplekse talplan som vist på figuren.



Ved omskrivning får vi nemlig

$$z^n = (1{,}1 \cdot e^{\frac{\pi}{6}\boldsymbol{i}})^n = 1{,}1^n \cdot e^{n \cdot \frac{\pi}{6}\boldsymbol{i}}$$

$$z^n = 1{,}1^n \cdot (\cos(n \cdot \frac{\pi}{6}) + \sin(n \cdot \frac{\pi}{6})\boldsymbol{i}).$$

Da $|z| = 1{,}1 > 1$, så vil $\left|z^n\right| = |z|^n = 1{,}1^n$ blive større og større, når n gennemløber $n = 1, 2 \ldots, 20$, og tilsvarende vil $\operatorname{Arg}\left(z^n\right) = n \cdot \operatorname{Arg}(z)$ blive større og større, når n gennemløber $n = 1, 2 \ldots, 20$.

Øvelse 13 Et komplekst tal er givet ved $z = 2{,}3 \cdot e^{\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}}$.

a) Tegn punkterne der repræsenterer de komplekse tal z^n, $n = 1, 2 \ldots, 20$ i den komplekse talplan.

Ligningen $z^n = a$

Inden vi går i gang med andengradsligningen, vil vi først se på n'te-gradsligningen $z^n = a$, og derefter på den simple andengradsligning $z^2 = a$, hvor a er et komplekst tal.

Sætning 7

Ligningen $z^n = a$, hvor a er et komplekst tal, har løsningerne

$$z = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{p2\pi}{n}) + \sin(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{p2\pi}{n})\boldsymbol{i}\right), \quad p = 0,1,2,\ldots,n-1,$$

hvor $\theta = \operatorname{Arg}(a)$.

Bevis:

Vi finder først modulus af z. Ifølge sætning 6 gælder

$$|z^n| = |z|^n \ ,$$

og da $|z^n| = |a|$ får vi

$$|z^n| = |z|^n = |a| \ ,$$

og dermed

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \ .$$

Herefter finder vi argumentet for z. Ifølge sætning 6 gælder der, at

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \cdot \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(a),$$

dvs.

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{\operatorname{Arg}(a)}{n} \ .$$

Som tidligere nævnt repræsenterer (r,θ) og $(r,\theta + p \cdot 2\pi)$, hvor p er et helt tal, det samme komplekse tal. Da argumentet for a er θ, så vil $(r,\theta + p \cdot 2\pi)$, hvor p er et helt tal, også være argument for a

$$\operatorname{Arg}(a) = \theta + p \cdot 2\pi, \quad p \in \mathrm{Z}$$

og dermed

$$\mathrm{n} \cdot \operatorname{Arg}(z) = \theta + p \cdot 2\pi, \quad p \in \mathrm{Z}$$

og ved division med n får vi

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{\theta}{n} + \frac{p}{n} \cdot 2\pi, \quad p \in \mathrm{Z}.$$

Bemærk, at dette giver forskellige vinkler for $p = 0,1,2,\ldots n-1$.

Derfor kan løsningerne til ligningen $z^n = a$ skrives som

$$z = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{p2\pi}{n}) + \sin(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{p2\pi}{n})\boldsymbol{i}\right), \quad p = 0,1,2,\ldots,n-1 \ .$$

Af løsningsformlen til ligningen $z^n = a$ ser vi, at alle løsninger har samme modulus. Har man fundet løsningen for $p = 0$ og afsat den i den komplekse plan, finder vi blot den næste løsning ved at dreje den første løsning vinklen $\frac{2\pi}{n}$ omkring O. De n løsninger vil altså ligge som hjørner i en regulær n-kant med centrum i O.

Man bruger ofte symbolet $\sqrt[n]{a}$ for en vilkårlig af de n løsninger i ligningen $z^n = a$. Når man løser en konkret ligning, vælger man så $\sqrt[n]{a}$ til at være én bestemt løsning.

Eksempel 4 Vi vil løse ligningen $z^5 = 32$.

Modulus af z er givet ved $|z| = \sqrt[5]{32} = 2$.

Argumentet af z er 0, da 32 ligger på den positive del af den reelle akse. Argumenterne for de 5 løsninger er så

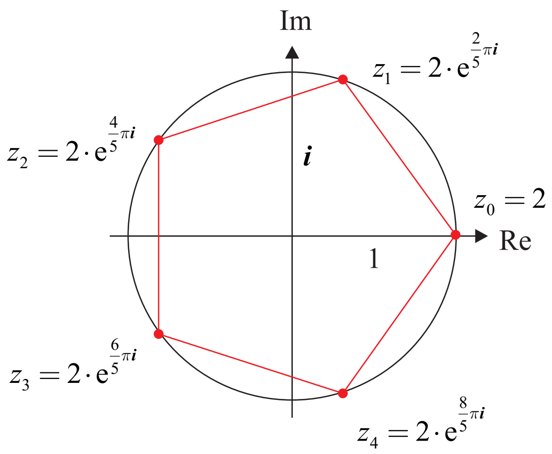
$$\mathrm{Arg}(z) = 0 + \frac{p}{5} \cdot 2\pi = 0, \quad p = 0,1,2,3,4.$$

Altså er argumenterne til løsningerne $0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi$ og $\frac{8}{5}\pi$.

Løsningerne til ligningen $z^5 = 32$ bliver derfor

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi \boldsymbol{i}}, \quad z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{4}{5}\pi \boldsymbol{i}}, \quad z_3 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{6}{5}\pi \boldsymbol{i}} \quad \text{og} \quad z_4 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{8}{5}\pi \boldsymbol{i}}.$$

De 5 løsninger er illustreret på figuren nedenfor.



Løsninger til ligningen $z^5 = 32$

Ligningen kan også let løses ved hjælp af et CAS-værktøj (her TI-Interactive):

$$\mathrm{csolve}(z^5 = 32, z) \rightarrow$$
$$z = \mathrm{e}^{1,25664 \cdot \boldsymbol{i}} \cdot 2 \text{ or } z = \mathrm{e}^{-1,25664 \cdot \boldsymbol{i}} \cdot 2 \text{ or } z = \mathrm{e}^{2,51327 \cdot \boldsymbol{i}} \cdot 2 \text{ or } z = \mathrm{e}^{-2,51327 \cdot \boldsymbol{i}} \cdot 2 \text{ or } z = 2.$$

Bemærk at CAS-programmet angiver hovedargumentet for de komplekse tal, dvs. det argument der ligger i intervallet $]-\pi;\pi]$. Fx er hovedargumentet for $z = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{6}{5}\pi \cdot \boldsymbol{i}}$ lig med $-\frac{4}{5}\pi \approx -2,51327$.

Ligningen $z^2 = a$

Inden vi går i gang med den generelle andengradsligning, vil vi først se på den simple andengradsligning, $z^2 = a$.

Sætning 8 Andengradsligningen $z^2 = a$ har løsningerne

$$z = \pm\sqrt{|a|}(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i})$$

hvor $|a|$ er modulus af a, og $\operatorname{Arg}(a) = \theta$.

Bevis: Af sætning 7 ses, at ligningen $z^2 = a$ har rødderne

$$z_0 = \sqrt{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i}\right) \text{ og } z_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}+\pi) + \sin(\tfrac{\theta}{2}+\pi)\cdot \boldsymbol{i}\right).$$

Da $\cos(\tfrac{\theta}{2}+\pi) = -\cos(\tfrac{\theta}{2})$ og $\sin(\tfrac{\theta}{2}+\pi) = -\sin(\tfrac{\theta}{2})$ ifølge enhedscirklen, gælder der, at

$$z_1 = \sqrt{|a|}\left(-\cos(\tfrac{\theta}{2}) - \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i}\right) = -\sqrt{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i}\right)$$

dvs. $z_1 = -z_0$.

Altså har ligningen $z^2 = a$ løsningerne

$$z = \pm\sqrt{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i}\right).$$

Vi vil nu definere, hvad der skal forstås ved kvadratroden af et komplekst tal:

Definition 5 Kvadratroden af et komplekst tal a er givet ved

$$\sqrt{a} = \sqrt{|a|}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot \boldsymbol{i}\right),$$

hvor $\theta = \operatorname{Arg}(a)$.

Med denne definition kunne vi formulere sætning 8 således:

Andengradsligningen $z^2 = a$ *har rødderne* $\pm\sqrt{a}$.

Vi vil se på beregningen af kvadratrødder i nogle eksempler.

Eksempel 5 Vi vil løse ligningen $z^2 = 4$.

Tallet $a = 4$ er jo et reelt tal, som ligger på den positive del af den reelle talakse.

Derfor er argumentet for a : $\theta = \operatorname{Arg}(a) = 0$, og modulus af a : $|a| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$.

Heraf følger, at $\tfrac{\theta}{2} = 0$ og $\sqrt{|a|} = 2$, og dermed bliver løsningerne til ligningen $z^2 = 4$ som ventet

$$z = \pm 2(\cos(0) + \sin(0)\cdot \boldsymbol{i}) = \pm 2 .$$

Ved at erstatte tallet 4 i eksemplet ovenfor med et vilkårligt reelt tal a, hvor $a \geq 0$, kan vi se, at symbolet $\sqrt{a}$ har samme betydning inde for de reelle tal og de komplekse tal, når altså blot $a \geq 0$.

Eksempel 6 Vi vil løse ligningen $z^2=-1$.

Tallet $a=-1$ er et reelt tal, som ligger på den negative reelle akse. Modulus af a er: $|a|=1$, og argumentet for a er: $\mathrm{Arg}(a)=\theta=\pi$. Dermed er $\sqrt{|a|}=1$, og $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Løsninger til ligningen $z^2=-1$ bliver således

$$z=\pm 1(\cos(\tfrac{\pi}{2})+\sin(\tfrac{\pi}{2})\cdot \boldsymbol{i})=\pm \boldsymbol{i}.$$

Ved brug af definitionen ovenfor får vi: $\sqrt{-1}=1(\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})\cdot \boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}$. Vi ser altså, at det stemmer overens med det valg, vi foretog ved indførelsen af de komplekse tal.

Øvelse 14 Vis ved at generalisere ud fra eksemplet ovenfor, at hvis $a\geq 0$, så er $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot \boldsymbol{i}$.

Eksempel 7 Vi vil løse ligningen $z^2=2-3\boldsymbol{i}$.

Her er $|a|=\sqrt{13}=3{,}60555$ og $\theta=\mathrm{Arg}(a)=-0{,}98279$, dvs. $\dfrac{\theta}{2}=-0{,}49140$.

Løsningerne bliver derfor

$$z=\pm\sqrt{3{,}60555}\cdot(\cos(-0{,}49140)+\sin(-0{,}49140)\cdot \boldsymbol{i})$$

eller

$$z=\pm(1{,}67415-0{,}89598\cdot \boldsymbol{i}).$$

Vi har nu set tre eksempler på beregning af kvadratrødder af komplekse tal. Man kan ifølge definition 5 uddrage kvadratroden af alle komplekse tal, mens man indenfor de reelle tal kun kan uddrage kvadratroden af et tal, som er større end eller lig med nul. Inden for de reelle tal gælder forskellige regneregler for rødder, som fx $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Disse regneregler gælder ikke altid inden for de komplekse tal.

Øvelse 15 Sæt $a=b=-1$ og vis, at brug af regnereglen $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ kan føre til en modstrid.

Andengradsligningen $az^2+bz^2+c=0$

Sætning 9 Andengradsligningen $az^2+bz+c=0$, a ≠ 0, har løsningerne

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a},$$

hvor $d=b^2-4ac$.

Bevis: Da a ≠ 0, kan vi omskrive andengradsligningen som følger:

$az^2+bz+c=0$

$4a^2z^2+4abz+4ac=0$ *Ganger med $4a$*

$4a^2z^2+4abz+b^2=b^2-4ac$ *Lægger b^2 til og trækker $4ac$ fra på begge sider*

$(2az+b)^2=b^2-4ac$ *Anvender kvadratsætning på venstre side*

Nu kalder vi det, der står på venstre side af lighedstegnet for y^2 og det, der står på højre side for *d*, og får så ligningen

$$y^2=d.$$

Denne ligning har ifølge sætning 8 løsningen

$$y=\pm\sqrt{|d|}(\cos(\tfrac{\theta}{2})+\sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot\boldsymbol{i}),$$

hvor θ er et argument for *d*.

Da netop $\sqrt{d}=\pm\sqrt{|d|}(\cos(\tfrac{\theta}{2})+\sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot\boldsymbol{i})$, får vi $y=\pm\sqrt{d}$, og dermed for $y=2az+b$:

$$2az+b=\pm\sqrt{d}$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$$ *Trækker b fra og dividerer med $2a$ på begge sider*

Vi får altså, at løsningsformlen får det samme udseende som for reelle tal.

Eksempel 8 Vi vil løse ligningen

$$z^2+(1-5\boldsymbol{i})z-8-4\boldsymbol{i}=0.$$

Ligningen har diskriminanten

$$d=(1-5\boldsymbol{i})^2-4\cdot1\cdot(-8-4\boldsymbol{i})\ =8+6\boldsymbol{i}.$$

Vi får så modulus af d til $|d|=\sqrt{8^2+6^2}=10$, og vi finder argumentet θ for d ud fra de to ligninger $\cos(\theta)=\frac{8}{10}$ og $\sin(\theta)=\frac{6}{10}$.

Løsningen er $\theta=0{,}64350$ og dermed er

$$\tfrac{\theta}{2}=0{,}32175.$$

Nu kan vi beregne kvadratroden af d ved

$$\sqrt{d} = \sqrt{10}(\cos(0{,}32175) + \sin(0{,}32175)\boldsymbol{i}) = 3 + \boldsymbol{i} \,,$$

og endelig kan vi beregne løsningerne til

$$z = \frac{-(1-5i) \pm (3+\boldsymbol{i})}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1+3\boldsymbol{i} \\ -2+2\boldsymbol{i} \end{cases} .$$

Ligningen kan også løses med et CAS-værktøj (her TI-Interactive):

$$\text{csolve}(z^2 + (1-5\cdot\boldsymbol{i})\cdot z - 8 - 4\cdot\boldsymbol{i} = 0,\ z) \rightarrow z = 1+3\cdot\boldsymbol{i} \quad \text{or} \quad z = -2+2\cdot\boldsymbol{i}.$$

Andengradsligninger med reelle koefficienter

Sætning 10 Hvis a, b og c er reelle tal, og $d < 0$, så er de to rødder i andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0\,, \quad \text{hvor } a \neq 0,$$

hinandens konjugerede.

Bevis: Fra øvelse 14 ved vi, at $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot i$, hvor a er et reelt tal.

Her er d et reelt negativt tal, dvs. modulus af d er: $|d| = -d$, og dermed er

$$\sqrt{d} = \sqrt{-d}\cdot\boldsymbol{i} = \sqrt{|d|}\cdot\boldsymbol{i} \,.$$

Vi får nu

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|d|}}{2a}\cdot\boldsymbol{i} \quad \text{og} \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|d|}}{2a}\cdot\boldsymbol{i} \,.$$

Da $\frac{-b}{2a}$ og $\frac{\sqrt{|d|}}{2a}$ begge er reelle tal, er $z_2 = \overline{z_1}$ og omvendt $z_1 = \overline{z_2}$.

Vi ser altså, at i det tilfælde, hvor en andengradsligning med reelle koefficienter ikke har nogen reelle rødder, vil der være to komplekse rødder, der er hinandens konjugerede.

Eksempel 9 Vi vil løse andengradsligningen $z^2 - 2z + 2 = 0$.

Ligningen har diskriminanten $d = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4$, dvs.

$\sqrt{d} = \sqrt{|d|}\cdot\boldsymbol{i} = \sqrt{4}\cdot\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}$, og løsningerne bliver således $z_1 = \frac{2+2\boldsymbol{i}}{2} = 1+\boldsymbol{i}$ og

$z_2 = \frac{2-2\cdot\boldsymbol{i}}{2} = 1-\boldsymbol{i}$.

Øvelse 16 Løs andengradsligningen $2z^2 - 12z + 50 = 0$, og illustrér løsningerne i den komplekse talplan.

En simpel anvendelse

De komplekse tal har mange anvendelser bla. indenfor fysik (vekselstrøm), fraktaler mm. Det vil føre for vidt at komme ind på disse her. I stedet vil vi illustrere en simpel anvendelse indenfor plangeometrien.

Eksempel 10 Betragt trekant ABC, hvor $A(1,2)$, $B(-3,4)$ og $C(5,6)$. Vi vil rotere denne trekant $33°$ omkring O til en ny trekant $A_1B_1C_1$. Vi kan betragte trekanten i den komplekse talplan, hvor hjørnepunkterne repræsenterer de komplekse tal $A=1+2\boldsymbol{i}$, $B=-3+4\boldsymbol{i}$ og $C=5+6\boldsymbol{i}$.

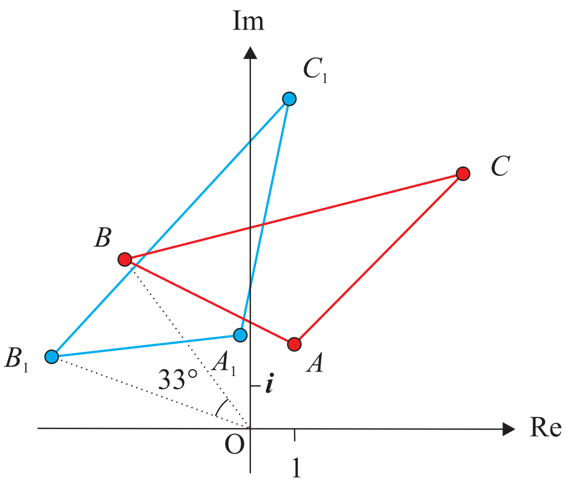
Da $33° = \frac{33°}{360°}\cdot 2\pi = \frac{33°}{180°}\cdot \pi = 0{,}575959$ radianer fremkommer den nye trekant ved at multiplicere tallene A, B og C med $z = \mathrm{e}^{0{,}575959\cdot \boldsymbol{i}} = 0{,}838671 + 0{,}544639\cdot \boldsymbol{i}$.

Vi gennemfører beregningerne i et CAS-program (her TI-Interactive!):

$$A := 1+2\boldsymbol{i} :: B := -3+4\boldsymbol{i} :: C := 5+6\boldsymbol{i} :: z := \mathrm{e}^{\frac{33}{180}\pi\cdot\boldsymbol{i}}$$
$$A_1 := A\cdot z \rightarrow -.250608 + 2.22198\cdot\boldsymbol{i}$$
$$B_1 := B\cdot z \rightarrow -4.69457 + 1.72077\cdot\boldsymbol{i}$$
$$C_1 := C\cdot z \rightarrow .925519 + 7.75522\cdot\boldsymbol{i}.$$

Dvs. hjørnepunkterne i den nye trekant (se figur) repræsenter de tre komplekse tal

$$A_1 = -0.251 + 2.222\boldsymbol{i} \quad B_1 = -4.695 + 1.721\boldsymbol{i} \quad C_1 = 0.926 + 7.755\boldsymbol{i}.$$

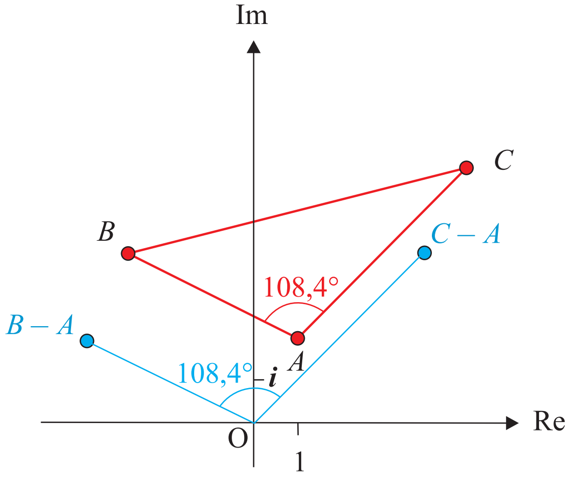


Ved at betragte trekanten i den komplekse talplan kan vi ligeledes let finde er række størrelser og punkter i trekanten:

Midtpunktet af siden AB:	$\frac{A+B}{2} = \frac{1+2\boldsymbol{i}+(-3+4\boldsymbol{i})}{2} = -1+3\boldsymbol{i}$
Tyngdepunktet for trekant ABC:	$\frac{A+B+C}{3} = \frac{(1+2\boldsymbol{i})+(-3+4\boldsymbol{i})+(5+6\boldsymbol{i})}{3} = \frac{3+12\boldsymbol{i}}{3} = 1+4\boldsymbol{i}$

Vinkel A:

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{B-A}{C-A}\right)=\mathrm{Arg}(B-A)-\mathrm{Arg}(C-A)=108{,}4°.$$



Øvelse 17 Rotér trekant ABC i ovenstående eksempel $55°$ omkring O, og illustrér resultatet i den komplekse talplan.

Øvelse 18 Betragt trekant ABC i den komplekse talplan, hvor hjørnepunkterne er repræsentanter for de komplekse tal $A=-2+6\boldsymbol{i}$, $B=1+5\boldsymbol{i}$ og $C=1-8\boldsymbol{i}$.

a) Bestem midtpunktet af hver af de tre sider i trekanten.

b) Bestem vinklerne i trekanten.

c) Bestem trekantens tyngdepunkt.

Trekant ABC roteres $105°$ omkring O, hvorved der fremkommer en ny trekant $A_1B_1C_1$.

d) Bestem de komplekse tal, som hjørnepunkterne i trekant $A_1B_1C_1$ er repræsentanter for i den komplekse talplan, og illustrér trekant ABC og trekant $A_1B_1C_1$ i den komplekse talplan.

Materialet er en let omskrevet version af en note, som er skrevet af Hanne Østergaard, Næstved Gymnasium, og venligt stillet til rådighed for kommissionen. Noten kan findes her: http://www.matnatverdensklasse.dk/uv-mat/cas/kompleks/index.htm.