Matematik A - Stx

Vejledning / Råd og vink

Gymnasieafdelingen 2010

Alle bestemmelser, der er bindende for undervisningen og prøverne i de gymnasiale uddannelser, findes i uddannelseslovene og de tilhørende bekendtgørelser, herunder læreplanerne. Denne Vejledning/Råd og vink indeholder forklarende kommentarer til nogle af disse bestemmelser, men indfører ikke nye bindende krav. Desuden gives eksempler på god praksis samt anbefalinger og inspiration, og den udgør dermed et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse.

Indholdsfortegnelse

0. Introduktion

Undervisningsvejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens forskellige punkter samt en række råd og vink til tilrettelæggelsen af undervisningen. Citater fra læreplanen er angivet med citationstegn.

Det er lærerens ansvar at tilrettelægge en undervisning, der giver eleverne mulighed for at opfylde kravene i læreplanen. Dette ansvar kan ikke overlades til en given lærebog. Læreren skal kende læreplanen i alle detaljer og skal selv træffe en række beslutninger om, hvordan de forskellige punkter udmøntes på netop dette hold på netop denne studieretning.

På fagets side på emu'en, www.mat.dk, og på siden www.uvmat.dk ligger materialer, der frit kan anvendes, og som rummer forslag til forløb og noter inden for alle faglige områder, oplæg til fagligt samarbejde og ideer til studieretningsprojekter, inspiration til mundtlige eksamensspørgsmål, vejledning til udformning af skriftlige opgaver og projekter samt meget andet.

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret *de faglige mål*, som eleverne skal nå i undervisningen i matematik. De faglige mål er grundlag for både skriftlig og mundtlig eksamen og for de afsluttende standpunktskarakterer. De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3.

I læreplanens afsnit 3 om tilrettelæggelse er formuleret en række krav til tilrettelæggelse af undervisningen, der alle tager sigte på, at eleverne gennem forskellige arbejdsformer skal opnå en dybere forståelse af, hvad matematik er, hvordan matematik anvendes, og hvorledes matematik gennem et samspil med andre fag kan bidrage til en behandling af givne problemer, og til at man vinder ny indsigt. Der er i afsnittet lagt stor vægt på elevernes selvstændige arbejde med stoffet.

0.1 Niveauerne

Matematikfaget optræder i gymnasiet på tre niveauer:

- Et almendannende C-niveau, der skal give alle elever bedre muligheder for at forstå og forholde sig til problemstillinger fra omverdenen, i andre fag, fra samfundsdebat eller privatliv.
- Et B-niveau med hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik, både med sigte på fagligt samspil i gymnasiet og på at opnå kompetencer til at kunne gennemføre videregående uddannelser, hvor matematik indgår.
- Et A-niveau, der via den måde, hvorpå der arbejdes med modellering og problembehandling samt arbejdes med matematisk teori og metode, skal give eleverne muligheder for at opnå kompetencer til at kunne gennemføre længerevarende matematikholdige uddannelser.

De enkelte niveauers karakteristika afspejles i undervisningens tilrettelæggelse.

1. Fagets identitet og metoder

Blandt de faglige mål indgår, at eleverne skal kunne:

- ”demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling

– demonstrere viden om fagets identitet og metoder”

Dette betyder, at der ikke alene skal undervises *i* matematik, men også *om* matematik. Når faget indgår i et samarbejde med andre fag, uanset om det er i almen studieforberedelse, eller det er et fagligt samarbejde i en studieretning, så skal eleverne kunne inddrage og anvende relevante matematiske metoder, redegøre for disse i et sprog, som man også uden for faget kan forstå, samt forholde sig til fagets muligheder og begrænsninger i arbejdet med den konkrete sag.

I læreplanens afsnit 1.1 og 1.2 er der givet en kompakt beskrivelse af fagets identitet og af det overordnede formål med undervisningen. Når dette skal udmøntes i undervisningsforløb, kan man bl.a. lade sig inspirere af den beskrivelse af faget, der gives gennem *KOM-rapporten* med *de otte matematikkompetencer*. I det afsluttende kapitel *Hvad er matematik?* er dette foldet ud og eksemplificeret.

2. Tilrettelæggelse

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Som lærer må man være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning hver gang, man tager fat på et nyt emne. Dette gælder i særlig grad i starten af 1. g. Den måde, matematikken præsenteres på i lærebøger, er ikke nødvendigvis den samme som den måde, eleverne lærer faget på. Elevernes tilegnelse af fagligt stof vil i nogle sammenhænge starte med lærerens præsentation af bestemte metoder, men i andre sammenhænge starte med, at eleverne prøver sig frem. Forståelse for fagets deduktive opbygning forudsætter en abstraktionsevne, som langsomt må opbygges og trænes af eleverne, bl.a. gennem de eksperimentelle tilgange til faget. Eleverne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, så de kan aktivere det i relevante situationer, og det sker bedst ved, at eleverne aktivt og selvstændigt arbejder med faget. Derfor kræver matematiklæring bl.a., at eleverne går i dialog med hinanden og med læreren for herigennem at udvikle deres begrebsbeherskelse.

2.1. Den indledende undervisning - grundforløbet

Den indledende undervisning er af central betydning for hele det efterfølgende forløb, uanset om faget er valgt på C-, B- eller A-niveau. Langt de fleste elever møder op med store forventninger: Nu skal der ske noget nyt! Og det skal der – nye kammerater, en skole med hundredvis af unge på ens egen alder, en ny klasse. Alle skal gøre en indsats for at få det hele til at fungere, så eleverne hver dag glæder sig til at komme i skole – nye fag, nye lærere og nye spændende faglige emner.

Det anbefales at tilrettelægge undervisningen, så eleverne fra første færd lærer noget nyt. Endvidere at man tidligt evaluerer, om de har lært noget. Sådanne løbende evalueringer tjener både til, at man som lærer reflekterer over sin undervisning – hvad virker, og hvad virker åbenbart ikke? – og til at eleverne får hurtige og præcise tilbagemeldinger på, hvor deres svage punkter er osv.

Der er ingen generel evidens, der kan begrunde, at man begynder 1.g med kursusforløb om brøkregning, parentesregler og reduktioner. Det kan heller ikke anbefales at starte i 1.g med en eller anden screening, der kan vise eleverne, at de ikke rigtig har lært noget i folkeskolen. Tværtimod vil det være værdifuldt for elevernes arbejde med faget på det højere niveau, som de nu møder, om man kan inddrage og bygge på forskellige elementer, de har med sig fra folkeskolens matematikundervisning. Eleverne på et givet hold har normalt ret forskellige forudsætninger; nogle mestrer algebraisk manipulation og ligningsløsning, andre har en del 'hvide pletter', og atter andre har måske tidligt i skoleforløbet fået den opfattelse, at de bare ikke kan lære matematik. En så heterogen forsamling kan ikke homogeniseres ved et 'brush-up-kursus' i starten af 1.g. Den pædagogiske opgave er at give alle elever en vis selvtillid og en tro på, at selv om ikke alle kan nå toppen, kan alle komme pænt over bundlinjen.

Tilrettelæggelse og gennemførelse af den indledende undervisning kræver en god planlægning af holdets matematiklærer. Det er ikke en god planlægning blot at følge lærebogen fra side 1 og fremefter. Planlægning af den indledende undervisning indebærer, at der tages kontakt til de øvrige lærere, klassen har, for at få de første gensidige overvejelser om fagligt samarbejde:

- med NV og naturvidenskabelige fag om fx variabelsammenhænge, databehandling og regression
- med samfundsfag C om fx statistiske emner, indekstal, variabelsammenhænge i tabelform, grafisk og ved formeludtryk via regression
- med idræt om fx indsamling og behandling af data fra målinger på eleverne selv og/eller deres præstationer
- med dansk og sprogfag om skriftlighed
- med alle fag om AT-forløb.

Når læreplanen skal udmøntes i undervisning, skal man huske hele tiden at have både kernestof og supplerende stof med i overvejelserne. Endelig skal eleverne have reelle muligheder for at skifte hold ved det kommende studieretningsforløb, og derfor bør der mellem matematiklærerne være aftalt et fælles minimumsprogram for grundforløbet.

2.1.1 Et eksempel på en plan for den indledende undervisning

Den indledende undervisning på grundforløbet kunne eksempelvis tilrettelægges således (rækkefølgen bør afgøres af samarbejdet med andre fag):

- *Hvad er matematik?*
  Fx: Korte indslag om emner som: vinkelsum, areal og Pythagoras læresætning – hvor ved vi det fra? Kan vi generalisere? Kan vi argumentere herfor? Tal, at tælle, talsans – symbolers betydning for matematik. Negative tal, brøker, π, $\sqrt{2}$, 10^{100} – hvordan forklares, hvad disse talsymboler står for? Uendelighed? Eksperimenter og leg med tal og geometri.
- *Variabelbegrebet og lineære sammenhænge*
  Fx: Naturligt sprog og symbolsprog. Repræsentationsformer for variabelsammenhænge. Grafer og lineære sammenhænge. Regression og regneark, evt. med datamateriale fra NV. Udledning og tolkning af $y = ax + b$. Undersøgelse af, hvilken betydning en variation af koefficienterne har for det grafiske forløb. Opstille og løse simple lineære ligninger. Evt. introduktion af et CAS-program på computer.
- *Lineære og eksponentielle vækstmodeller*

Fx: Karakteristiske egenskaber ved lineær vækst og ved eksponentiel vækst. Procentregning og kapitalfremskrivning. Generalisering til eksponentielle modeller. Naturligt sprog og symbolsprog, afkode, tolke og opstille modeller. Modellering med data fra andre fag. Fordobling og halvering. Lille projekt om forbrænding af alkohol og af medicin, om afkøling eller om andet. Evt. anvendelse af et CAS-program på computer.

– *Indledende trigonometri*
  Fx: Ensvinklede trekanter. Trigonometriske funktioner og beregninger i den retvinklede trekant. Lille projekt om højdebestemmelse eller landmålingsøvelser eller andet. Evt. introduktion af et dynamisk geometriprogram på computer og eksperimenter med indledende konstruktionsgeometri.
– *Indledende statistik*
  Fx: Hvad er, og hvad kan statistik? Kategoriske og numeriske variable. Deskriptiv statistik, evt. med datamateriale fra samfundsfag eller idræt – gruppering og ikke-gruppering, grafiske værktøjer som prikdiagram, boksplot, histogram og sumkurve. Deskriptorer – ord og begreber til at beskrive empiriske fordelinger. Evt. introduktion af et statistisk værktøjsprogram på computer.

Hvis lærebogen ikke støtter lærerens ønsker fuldt ud, så findes der med stor sandsynlighed forløb blandt emu'ens mange materialer, der kan hentes og rettes til.

2.2. Planlægning af studieretningsforløbet

Gymnasiet er *et studieretningsgymnasium*, hvor det faglige samarbejde skal spille en central rolle. Det faglige samarbejde skal i almindelighed bidrage til, at eleverne opnår en dybere indsigt i matematikkens rolle aktuelt og historisk i behandlingen og løsningen af alskens problemer. Samtidig skal eleverne forberedes bedst muligt på at løse *de to store tværgående opgaver i 3.g*: Studieretningsprojektet og den afsluttende prøve i almen studieforberedelse.

I læreplanens afsnit 3.4 hedder det: "Når matematik A indgår i en *studieretning*, skal dele af det faglige stof vælges, så det giver mulighed for en styrkelse af det faglige samspil i studieretningen. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen.
Der skal tilrettelægges sammenhængende undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Dette skal ske gennem et samarbejde med andre fagområder eller ved at inddrage elevernes kendskab til disse fagområder. De forløb, hvor matematik A indgår i et samarbejde med andre fag, skal fremgå af undervisningsbeskrivelsen."

Udmøntningen af dette kræver, at *lærerne i studieretningsfagene* er i gensidig kontakt, og at man disponerer det faglige stof, så der er mulighed for et samarbejde. Det kunne dreje sig om:
– en fælles politik på skolen mht. brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvilket både er relevant for samarbejdet med samfundsfag og for samarbejdet med naturvidenskabelige fag
– et samarbejde i mat-fys studieretninger om bestemte emner inden for variabelsammenhænge, differentialregningen og sidenhen inden for differentialligninger

- et samarbejde i mat-samf studieretninger om bestemte emner inden for variabelsammenhænge, om statistik og hypotesetest og sidenhen om økonomiske modeller
- et samarbejde i mat-bio studieretninger om vækstmodeller og sidenhen om epidemimodeller og om sandsynlighedsregning og statistik
- et samarbejde i mat-kemi studieretninger om løsning af ligningssystemer med flere ubekendte, og sidenhen om differentialligninger og reaktionskinetik
- et samarbejde i mat-mus studieretninger om tonesystemer og brøkregning og sidenhen om harmoniske svingninger.

Det er også vigtigt, at der er kontakt til og samarbejde med *lærerne i fællesfag* som dansk, historie, religion, oldtidskundskab, engelsk og billedkunst. Dels er der mange samarbejdsmuligheder inden for almen studieforberedelse, der både kan forberede eleverne på den afsluttende prøve og bidrage til at opfylde læreplanen; ved den afsluttende prøve i almen studieforberedelse kan også fag på C-niveau deltage. Og dels er det en fælles opgave for alle fag at *tone studieretningerne*, så eleverne får en klar opfattelse af, hvad der især kendetegner den, de er med i. Dette skal bidrage til at forberede eleverne til studieretningsprojektet, hvor eleverne ifølge læreplanen skal ”fordybe sig i og formidle en faglig problemstilling inden for et selvvalgt område *i tilknytning til deres studieretning*”, men hvor alle fag på mindst B-niveau kan deltage.

Der kunne være tale om et samarbejde mellem:
- matematik og historie med parallelle eller direkte fælles forløb om bestemte perioder og begivenheder
- matematik og dansk om formidling af matematiske emner i bestemte genrer
- matematik og religion om erkendelsesmæssige spørgsmål
- matematik og engelsk eller andre sprogfag om store personligheder eller specielle litterære værker
- matematik og oldtidskundskab om den særlige rolle matematik spillede i Grækenland
- matematik og billedkunst om særlige matematisk inspirerede male- og tegneteknikker.

På emu’en, på universiteternes hjemmesider og en række andre steder ligger mange forløb og ideer til fagligt samspil, til forløb, hvor matematik indgår i almen studieforberedelse, og til studieretningsprojekter med matematik. Det kan være en god ide i den daglige undervisning at lægge små ideer og spor ud, der inspirerer eleverne frem mod de afsluttende store prøver.

Den overvejende del af undervisningen foregår i faget selv. Tilrettelæggelsen af dette drejer sig om: Hvorledes udmøntes kernestof og supplerende stof, så de faglige mål nås. Det supplerende stof skal ikke realiseres gennem en række ultrakorte indslag. Det skal ifølge læreplanen være ”sammenhængende forløb”, men det må gerne integreres i undervisningsforløb med kernestoffet.

2.3 Undervisning i færdigheder

Kravet til beherskelse af elementære færdigheder og mestring af algebraisk manipulation er meget forskellig på C, B og A. I den indledende undervisning kan man med fordel sætte fokus på bestemte

færdigheder, når det er relevant i forbindelse med bestemte emner, og siden vende tilbage til det i andre sammenhænge, fx:
- *regningsarternes hierarki* i forbindelse med opgaver vedrørende lineære udtryk
- *formelhåndtering* i forbindelse med geometriske emner som arealer og Pythagoras' læresætning
- *brøkregning* i forbindelse med ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger
- *brug af koordinatsystemer* i forbindelse med variabelsammenhænge
- *løsning af ligninger* i forbindelse med variabelsammenhænge og med geometriske opgaver
- *parentesregler* i forbindelse med rentesregning
- *procentregning* i forbindelse med rentesregning og eksponentiel vækst, og med statistik og indekstal
- *potensregler* i forbindelse med eksponentielle sammenhænge og senere potenssammenhænge
- *grafkending* i forbindelse med vækstmodeller og senere polynomier
- *kvadratsætninger* i forbindelse med cosinusrelationerne, og senere 2. gradspolynomier og omskrivninger inden for den analytiske geometri

De forskellige færdigheder og regler skal holdes ved lige. Det kan ske gennem små øvelser i de første minutter af nogle af lektionerne, gennem traditionelle skriftlige opgaver eller ved at lade eleverne selv formulere opgaver og udfordre hinanden.

2.4. Undervisningsdifferentiering

Det er vigtigt at tilrettelægge undervisningen, så alle elever får matematiske succesoplevelser i undervisningen. Det er med til at styrke elevernes matematiske indlæring, men også elevernes interesse for matematikfaget.

På mange matematikhold er elevernes matematiske evner imidlertid ofte temmelig spredte. Ved planlægningen af undervisningen bør det derfor medtænkes, at både den fagligt svage og den fagligt stærke elev får fagligt udbytte af undervisningen. Hele klassen behøver således ikke arbejde med nøjagtig det samme stof.

Der findes mange måder at foretage undervisningsdifferentiering på. Nogle eksempler kan være:
- Opgaver på forskellige niveauer evt. med nogle tvungne opgaver og en række valgfrie opgaver.
- En given opgave kan typisk foldes mere eller mindre ud afhængig af niveau. Ved konstruktion af sådanne opgaver kan det være anvendeligt at tænke i de forskellige niveauer i SOLO-taksonomien.
- Gennemgang af lektie kun for elever med problemer med lektien. De øvrige elever kan arbejde med andre ting.
- Ved bevisførelse kan eleverne individuelt vælge, om de vil deltage i tavlegennemgang eller selv arbejde med beviserne (evt. ud fra en "opskrift"). Elever, som selv arbejder med beviser, gennemgår senere beviset på tavlen for læreren.
- De stærkere elever kan fx konstruere hjemmeopgaver, som hele klassen skal regne.
- De stærkere elever kan holde korte oplæg om perspektivering af emnet. Fx. et oplæg om logaritmernes historie og/eller konstruktion af logaritmetabeller, når der arbejdes med logaritmer.
- De stærkere elever kan arbejde med flere og/eller sværere beviser.
- Ved temaopgaver (se afsnit 2.7) er det oplagt at have opgaveformuleringer på forskellige niveauer.

Differentiering bør ikke udelukkende foregå efter niveau. Der kan også *differentieres efter interesse*. Der er stor forskel på, hvilken form for indlæring eleverne foretrækker. Nogle elever vil helst regne opgaver, andre foretrækker at arbejde med beviser, og andre igen vil helst eksperimentere sig frem til ny viden. Det er vigtigt, at alle disse elevtyper stimuleres i undervisningen. Man kan eksperimentere med, at eleverne selv i nogle forløb vælger den metode, de foretrækker. Læreren har naturligvis det overordnede ansvar og bør sørge for, at der veksles mellem de forskellige tilrettelæggelser for gennemgang af stof, så det ikke hele tiden er den samme elevtype, der fanges.

På www.uvmat.dk ligger et større inspirationsmateriale med ideer til undervisningsdifferentiering inden for mange forskellige emner.

2.5 Eksperimenterende tilgang

Både matematikkens analytiske side og syntetiske skal være til stede i undervisningen. Den analytiske side rummer den spørgende, den undersøgende, den induktive tilgang, sammenfattet i udtrykket *den eksperimenterende tilgang*. Den syntetiske side rummer gennemgang af definition, sætning, bevis og fremlæggelse af afprøvede matematiske metoder, sammenfattet i udtrykket *de deduktive sider ved matematik*.

Ny viden, som eleverne skal opnå, skal ikke altid være kogt ned i en afsluttet form som fx en sætning og et tilhørende bevis. Den eksperimenterende tilgang er en arbejdsform, der kan give eleverne indsigt i modellering og ræsonnement som del af en proces, hvor de opnår ny viden. Den eksperimenterende arbejdsform minder om en induktiv arbejdsform, hvor elever skal prøve at komme fra eksempler til det generelle. I andre sammenhænge minder den eksperimenterende arbejdsform om en tilgang, hvor eleverne ser strukturer ud fra simuleringer.

På emu'en findes en række eksempler på forløb med eksperimenterende tilgang. En del af dette er samlet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*), der ligger på emu'en i elektronisk form. Andet er samlet i bogen *MATHIT*, der ligeledes ligger på emu'en i elektronisk form, og hvor fokus er de nye muligheder for at anvende en eksperimenterende tilgang, som har åbnet sig med tilgængeligheden af de matematiske værktøjsprogrammer.

2.5.1 Eksempler på eksperimenterende forløb

Hvis arbejdsformen skal blive en naturlig del af matematikundervisningen, skal eleverne præsenteres for den fra starten. Men det faglige indhold og de faglige udfordringer må naturligvis tilpasses holdet, niveauet og den matematiske modenhed. Eksempler på en eksperimenterende tilgang kunne være:

– *Klassisk geometri - egenskaber for højder, medianer og midtnormaler i en trekant:* I den indledende geometri kan eleverne selv argumentere for formler for vinkelsummer i en n-kant på basis af sætningen om vinkelsummen i en trekant, selv finde formler for arealer af parallelogrammer, trapezer mv., eller de kan selv i et dynamisk geometriprogram eksperimentere og formulere sætninger om trekanters karakteristiske linjer og de om- og indskrevne cirkler. Eleverne samler deres arbejde i en temarapport (se 2.7) om klassisk geometri. Til den mundtlige prøve kan eksperimenterne og konstruktionerne gennemføres interaktivt og eleverne kan på denne måde vise deres evne til matematisk ræsonnement. På A-niveau skal eksperimenterne efterfølges af beviser for egenskaberne. Se mere om en mulig tilrettelæggelse af forløbet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*, nævnt i afsnit 2.5).

- *Simulering af skattemodel:* Eleverne skal prøve at modellere et skattesystem i et regneark, og de skal argumentere for fordele og ulemper ved skattesystemet ved hjælp af simuleringer foretaget i regnearket. Forløbet kan udmærket ske i samarbejde med samfundsfag og ligge som et forløb med supplerende stof – stykkevist lineære sammenhænge og uligheder – efter et forløb om lineære sammenhænge. Sværhedsgraden kan justeres ved, at eleverne selv skal konstruere regnearket, eller de får det udleveret. På http://fou.emu.dk/offentlig_show_projekt.do?id=144836 er simuleringen af det danske skattesystem præsenteret med regneark. Hvis forløbet afsluttes med en temarapport (se 2.7), kan eleverne ved den mundtlige prøve demonstrere simulering af parametrene og på denne måde vise deres evne til matematisk ræsonnement.

- *De elementære funktioners karakteristiske egenskaber:* Ved hjælp af et CAS-program skal eleverne selv variere relevante parametre, lægge tangenter og flytte disse langs kurver, skære linjer og kurver og formulere nogle sammenhænge, som de siden skal gennemføre matematiske argumenter for. I forløbet kan indlægges en række udfordringer til de stærkere elever.

- *Spaghettimatematik:* Eleverne skal i grupper, fx parvis prøve at knække fx 10 stykker spaghettier i tre stykker så tilfældigt som muligt. Ud fra disse eksperimenter skal de prøve at danne trekanter med de tre stykker og derefter komme med et bud på betingelserne for, at de tre stykker kan danne en trekant, og videre på sandsynligheden for, at vi får en trekant. Forløbet kan udmærket udgøre et forløb med supplerende stof – uligheder grafisk og analytisk - efter et forløb om lineære sammenhænge. Forløbet kan også afsluttes med eller indgå i temarapport, det har en god teoretisk tyngde og vil egne sig fint til den mundtlige prøve. Se mere om en mulig tilrettelæggelse af forløbet i bogen *Eksperimentel Matematik* (*XM-bogen*, nævnt i afsnit 2.5).

- *Simulering i statistik af et stikprøvemateriale:* På emu'en ligger et materiale, der præsenterer kravene til kernestoffet inden for emnet statistisk hypotesetest. I dette materiale indgår en præsentation af, hvorledes man kan løse sådanne problemer med en eksperimenterende tilgang.

2.6 It – matematiske værktøjsprogrammer

I læreplanens afsnit 3.3 hedder det: " Undervisningen tilrettelægges, således at lommeregnere, it og matematikprogrammer bliver væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning. I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning, til symbolsk differentiation og integration samt til løsning af differentialligninger. Endvidere indgår anvendelse af lommeregnere, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning."

Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af værktøjsprogrammer, og det vil samtidig styrke mulighederne for fagligt samarbejde. Læreplanens betoning af den eksperimentelle tilgang peger på, at der bør være adgang til værktøjer, der kan håndtere eksperimentel (dynamisk) geometri og eksperimentel (dynamisk) statistik. Besvarelser af skriftlige opgaver med anvendelse af sådanne værktøjer er accepteret helt på linje med andre typer besvarelser.

Det tager tid at lære at bruge et bestemt program. Derfor bør man på et hold inddrage de værktøjsprogrammer, man har valgt at arbejde med, så tidligt som muligt, og inddrage dem hyppigt og ikke bare af og til. Det tager også tid for lærerne selv at lære at bruge dem – og programmerne ændres jævnligt, så næste gang man har et hold på A-niveau, er der måske kommet en opdateret version, der adskiller sig betydeligt fra den tidligere – eller skolen har besluttet at gå over til et nyt program. Nogle steder har man også den situation, at eleverne sidder med forskellige programmer. Med sådanne vilkår er det en blindgyde, hvis man først vil tage programmerne i brug, når man via kurser eller selvstudium er blevet 'superbruger'. Overvej i stedet, hvordan hele klassen kan inddrages som ressource, hvordan man kan give ansvar til bestemte elever og overlade til dem at hjælpe kammerater med tekniske problemer, hvordan en fælles bestræbelse på at beherske et værktøjsprogram kan udvikle og styrke samarbejdsklimaet på holdet.

I bogen *MATHIT* med tilhørende hjemmeside kan man finde en række eksempler på, hvordan it begrundet i fagdidaktiske overvejelser med fordel kan integreres i matematikundervisningen på alle niveauer.

Som en hjælp til lærerens planlægning af forløb inden for faglige emnekredse som vækstmodeller, geometri og statistisk hypotesetest, og hvor der skal arbejdes intensivt med værkstøjsprogrammer, kan man på emu'en og andre steder finde inspiration og manualer til en række standardprogrammer.

2.7 Temaopgaver

Ifølge læreplanen skal "en betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projektforløb eller større temaopgaver over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof, eller problemstillinger der er genstand for fagsamarbejde."

Det er vigtigt, at man fra første færd i planlægningen inddrager overvejelser om, hvilke temaopgaver, holdet skal lave. For kravet til den mundtlige prøve er, at "en betydelig del af eksamensspørgsmålene skal være udformet, således at det er muligt at inddrage gennemførte projektforløb og temaopgaver med tilhørende elevrapporter."

Temaopgaver repræsenterer en måde at organisere stoffet på. Nogle lærere vil foretrække at gennemføre nogle traditionelle kursusforløb ind imellem eller som optakt til større temaopgaver. Andre vil foretrække at dække hele det faglige stof med temaopgaver, således at disse tilsammen udgør prøvegrundlaget.

Projektforløb og temaopgaver kan være designet på to forskellige måder:

1. En temaopgave kan være *knyttet til et bestemt undervisningsforløb* om et afgrænset fagligt emne som fx: trigonometri, deskriptiv statistik, lineære og eksponentielle vækstmodeller, monotoniundersøgelser, logistisk vækst, integralregning, afstande i rummet.
2. En temaopgave kan også være tænkt *på langs af det samlede forløb* og være bygget op ud fra et fagligt emne, der er i spil adskillige gange gennem hele undervisningen fra simple sammenhænge til mere komplekse, fra anvendelser og opgaver til en mere teoretisk gennemgang, fra rent matematiske til et fagligt samarbejde. Temaopgaven kan samle de forskellige behandlinger af emnet op til en helhed: vækstmodeller, afstande og vinkler, optimering, statistiske metoder, arealberegning. Eller være bygget op ud fra en matematisk kompetence: matematisk modellering, matematisk ræsonnement. Eller kombinere de to måder at samle stoffet på til helheder.

Den første type afgrænsede temaopgave kan have den fordel, at man så at sige gør emnerne færdige efterhånden. En sådan lineær tilgang giver et overblik, mens man er på vej gennem stoffet. En af svaghederne kan være, at man ikke så let får et samlet overblik over stoffet. Og ved den mundtlige prøve kan der være stor forskel i sværhedsgraden på de enkelte spørgsmål.

Den anden type temaopgaver på langs kan have den fordel, at der skabes sammenhæng i hele forløbet for eleverne, og at det giver muligheder for at organisere den mundtlige prøve, så stof fra den indledende undervisning integreres med det mere komplekse stof fra den senere undervisning. Sværhedsgraden af de enkelte spørgsmål vil være mere ækvivalente, og samtidig vil hver temaopgave give både den svagere og den stærkere elev muligheder for at præstere på sit eget niveau. En af vanskelighederne er, at det for læreren kræver at større planlægningsarbejde fra starten, og at man i planlægningen har et overblik over hele pensum. Derfor vil denne form være sværere at anvende på tilvalgshold.

Temaopgaven formuleres af læreren og bør altid rumme både matematisk ræsonnement (som det forventes på et A-niveau), anvendelser gennem opgaveregning og behandling af mere komplekse problemer. Temaopgaver kan være en god ramme om integration af kernestof og supplerende stof.

Temaopgaver besvares af eleverne i form af en *temarapport*. Denne kan udmærket være lavet i et gruppearbejde. Elevernes temarapporter skal ikke nødvendigvis læses og rettes til bunds af læreren. Nogle dele som anvendelser af teori på skriftlige opgaver kan være rettet som traditionelle skriftlige opgaver. Andre dele er kommet til veje gennem et gruppearbejde under lærerens vejledning og tjener i sidste ende som elevens forberedelsesmateriale til den mundtlige prøve.

På emu'en ligger en række eksempler på temaopgaver.

2.8 Skriftlighed

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner.”

Man lærer ikke matematik uden at skrive. At formulere sig skriftligt under de krav til præcision og formidling, der gælder, bidrager til at skærpe den matematiske tankegang. Det skriftlige arbejde skal på den ene side tilrettelægges, så det peger frem mod de afsluttende skriftlige opgaver: den skriftlige eksamen i faget selv, skrivningen af studieretningsprojektet og udformningen af AT-synopsis i 3.g. På den anden side skal arbejdet med temarapporter, hvor eleverne selv organiserer stoffet til den mundtlige prøve, udformes, så det støtter begrebsindlæringen og evnen til at formidle et kompliceret stof. Eleverne vil først blive rigtig gode til at skrive matematiske tekster, når de kan sige noget om, hvad matematik er for en slags disciplin.

På www.uvmat.dk ligger et omfattende inspirationsmateriale til arbejdet med den skriftlige matematik, både med eksempler på besvarelser af eksamensopgaver og kommentarer til større matematikprojekter, til studieretningsprojekter og til AT-synopser.

I løbet af få år vil eksamensopgaverne blive stillet digitalt, og alle elever skal arbejde med de matematiske værktøjsprogrammer på computer. Når skriftlige opgaver og rapporter afleveres digitalt, må det give anledning til at overveje strategier i rettearbejdet. I stedet for at rette i bund så kan man med fordel lægge rettelser og kommentarer ind, så eleverne efterfølgende selv skal rette op og forbedre deres besvarelse eller rapport. Når lærerne får indarbejdet at give en elektronisk tilbagelevering af skriftlige produkter før lektionen, så kan en del af elevernes lektier være, at de har sat sig ind i kommentarerne, hvorved man kan nøjes med ganske få fokuspunkter i selve timen, ja måske ikke altid behøver at gøre det til et selvstændigt punkt.

2.9 Mundtlighed

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: ”Den enkelte elevs forståelse af matematik skal udvikles gennem arbejde med mundtlig formidling.” Og videre i læreplanens afsnit 3.2: ”En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion. Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse, bearbejdning og præsentation af forelagte matematiske tekster.”

Eleverne skal tale matematik. I klassens diskussioner om nye matematiske begreber og metoder, og i pararbejde og gruppearbejde, hvor de både skal diskutere opgaveløsning og matematiske beviser og ræsonnementer. Eleverne møder nye ord og begreber næsten i hver eneste time, og det tager tid at forstå dem og lære at bruge dem. Det er i denne sammenhæng som med sprog generelt: Eleverne lærer det først og fremmest ved at bruge ordene og begreberne, og hver elev skal udfordres på sit niveau. Lad eleverne fx læse en lille matematisk tekst højt fra en lærebog eller fra en tekstopgave. Lad dem fx beskrive et grafisk forløb med brug af de begreber, de kender, for andre elever, der på det grundlag skal skitsere grafen – og brug det som grundlag for en diskussion af præcision i sprogbrug.

Meget af dette foregår bedst i et *gruppearbejde*, hvor eleverne først skal diskutere en strategi for løsning af et stillet problem, før de kaster sig ud i det. Lad dem diskutere en fremgangsmåde til at beregne afstande og højder ude i et terræn, og lad grupperne beskrive deres strategi for hinanden for at afprøve, om de kan kommunikere om det, før de går ud og løser problemet; ved at tale om det til andre opdager man lettere evt. svage punkter. Den samme arbejdsform kan praktiseres i arbejdet med statistik eller i et fagligt samarbejde i en studieretning om bestemte problemer.

2.10 Lektier

Det er vigtigt at få lagt gode arbejdsrutiner fast fra starten. Klassens lærere bør sikre, at lektien i såvel matematik som i andre fag er overkommelig for alle elever. Da eleverne er så forskellige, bør der tænkes progression og undervisningsdifferentiering ind i lektierne fra første færd: Nogle kan nå langt og bør få udfordringer, men alle skal kunne nå det grundlæggende, der bringer dem over bundlinjen. Eleverne behøver heller ikke nødvendigvis have samme lektie for, fx kan elever regne forskellige opgaver, eller have forskellige stykker teori for, som de så skal gennemgå for hinanden i timen. Det ville også bidrage til at styrke mundtligheden.

Det er vigtigt, at eleverne er klar over formålet med lektielæsning: Skal de træne færdigheder via nogle opgaver? Skal de indøve metoder, som de helst skal kunne huske udenad? Hvilke matematiske begreber i teksten, som de skal læse, skal de kunne redegøre for med eget sprog? Når der gives lektier for i en lærebog, er det en god ide *at stille nogle præcise spørgsmål til teksten*, som eleverne skal svare på og samtidig give dem nogle anvisninger på at læse teksten. Det kan fx af og til være en god ide at få eleverne til at læse teksten højt – så læser man ikke henover de svære ord og begreber. Og hvad er det præcis, der forventes af dem i timen? Skal de blot forberede sig til en gennemgang af nyt stof, eller skal de fx i grupper gennemgå eksempler eller små beviser for hinanden?

Både opgaveark til det daglige arbejde i klassen, oplæg til temaopgaver og de skriftlige afleveringsopgaver bør stilles, så der er en indbygget progression. Ikke alle kan nå alt inden for den givne elevtid eller det afsatte antal lektioner, men alle bør kunne nå det mest nødvendige inden for det pågældende faglige emne.

3. De enkelte faglige emner

De faglige mål, som eleverne skal opnå i undervisningen i matematik, er formuleret i læreplanens afsnit 2.1. De særlige faglige mål, som eleverne skal opnå med henblik på de skriftlige prøver, er yderligere udmøntet gennem de stillede opgavesæt. Det følgende er således alene nogle supplerende kommentarer.

3.1 Ligninger

I alle fag, der anvender matematik, indgår løsning af ligninger eller ligningssystemer. Eksempler fra andre fag bør jævnligt inddrages for at illustrere, hvordan samme matematiske problem kan have mange forskellige fremtrædelsesformer og for at vise forskelle og ligheder i terminologi og variabelbetegnelser.

Gennem arbejdet med et righoldigt eksempelmateriale skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger, og have opbygget en indsigt i, at løsning sker gennem gentagne anvendelser af 'omvendte operationer'.

Det forventes i øvrigt, at eleverne kan håndtere spørgsmål som:

- for hvilke tal c har ligningen $f(x) = c$ netop én løsning?
- angiv for enhver værdi af konstanten *a* antallet af løsninger til ligningen ..., hvor konstanten kan indgå forskellige steder i et funktionsudtryk, fx ligningen $x^2+ax+2 = 0$

Det forventes ikke, at eleverne kan bestemme værdimængder.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: For hvilke værdier af *x* er medicinkoncentrationen større end/mindre end en given værdi?

3.2 Statistik og sandsynlighedsregning

Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes på rent matematikfagligt grundlag. Hvor det er muligt, er det en stor fordel for indlæring af begreber og metoder, at det foregår i et samarbejde med andre fag som samfundsfag, idræt eller biologi, hvorfra et talmateriale tilvejebringes.

Eleverne forventes at kunne anvende simple statistiske deskriptorer og simple grafiske præsentationer i en beskrivelse af et datamateriale. Hvis de selv skal tegne histogrammer, vil talmaterialet være opdelt i intervaller med samme intervalbredde.

Den sandsynlighedsteoretiske formalisme og det formelle begreb ”stokastisk variabel” indgår ikke i det fælles kernestof.

Vedrørende *statistisk hypotesetest med brug af chi-i-anden fordelingen* forventes eleverne at kende og kunne anvende begreberne:

- population og stikprøve
- nulhypotese og alternativ hypotese
- antalstabeller (krydstabeller) og deres opbygning
- teste for uafhængighed af inddelingskriterier (homogenitetstest) og for repræsentativitet ift. underliggende fordeling (goodness of fit)
- samlet teststørrelse samt udregne de enkelte bidrag hertil
- *p*-værdier
- signifikansniveau, kritisk værdi og signifikant forskel
- frihedsgrader
- repræsentativitet og systematiske fejl (bias) samt skjulte variable (konfundering) i en diskussion af konklusioner draget ud fra resultater af en statistisk test.

Begreber og metoder er præsenteret i et materiale, der er placeret på emu’en.

Det forventes, at eleverne ved den skriftlige prøve kan håndtere og besvare opgaver som *de vejledende eksamensopgaver inden for emnet statistisk hypotesetest*. Disse opgaver ligger som et bilag på samme side som denne undervisningsvejledning.

3.3 Funktioner, grafer og variabelsammenhænge

Funktionsbegrebet og de elementære funktioner, der er omtalt i læreplanens afsnit om kernestof, kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper. Eksempelvis kan

- det abstrakte funktionsbegreb og polynomier blive præsenteret under arbejdet med at opstille de relevante sammenhænge i optimeringsopgaver
- eksponentielt voksende og aftagende funktioner blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald
- sinus og cosinus som funktioner af reelle tal blive præsenteret i sammenhæng med behovet for at kunne modellere fænomener, der udviser periodisk svingning.

Eleverne forventes at kunne beskrive *de elementære funktioners karakteristiske egenskaber* med begreber som definitionsmængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema og asymptotiske forløb. Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, forventes eleverne at kunne argumentere for disses betydning for det grafiske forløb. Til de karakteristiske egenskaber hører yderligere:

- sammenhængen mellem grad og antal nulpunkter for polynomier
- sammenhængen mellem diskriminant, toppunktets beliggenhed og antal nulpunkter for 2. gradspolynomier
- begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant, og sammenhængen mellem a^x og e^{kx} for eksponentielle udtryk
- regneregler for logaritmefunktioner
- sammenhængen mellem procentvækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner
- periodicitet for sinus og cosinus.

3.4 Differentialregning, integralregning og differentialligninger

Matematisk modellering med brug af differentialregning, opstilling af differentialligninger og anvendelse af integralregning til løsning af sådanne bør inddrage eksempelmaterialer fra andre fag – hvor det er muligt fra fag i studieretningen. Håndtering af disse problemstillinger forudsætter, at eleverne er fortrolige med de emner, som er omtalt i kernestoffet.

I en række opgaver vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de typer af regneforskrifter, der er behandlet i undervisningens gennemgang af de elementære funktioner og regnereglerne for differentiation. I sådanne tilfælde forventes det ifølge læreplanen, at *eleverne kan anvende it-værktøjer til at differentiere eller integrere givne udtryk*. Eleverne må også gerne anvende et værktøjsprogram til at løse differentialligninger, men ved skriftlig eksamen vil differentialligninger, der skal løses, altid kunne omskrives til en af de typer, der er omtalt i kernestoffet.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende indebærer studiet af sammenhængen mellem f' og begreber som monotoniforhold og lokale ekstrema inddragelse af kontinuitetsbegrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling.

I en række sammenhænge vil det være naturligt at tænke kernestof og supplerende stof sammen. Eksempelvis følgende:

- I læreplanens omtale af det supplerende stof hedder det bl.a., at der skal gennemføres ”sammenhængende forløb med vægt på *ræsonnement og bevisførelse* inden for infinitesimalregning samt deduktive forløb over udvalgte emner”. I kernestoffet indgår *beviset for analysens fundamentalsætning* om sammenhæng mellem areal og stamfunktion. Det kan måske tænkes sammen.
- I læreplanens omtale af det supplerende stof hedder det også, at der skal gennemføres ”sammenhængende forløb om differentialligningsmodeller”. I kernestoffet indgår opstilling og kvalitativ analyse af differentialligninger samt løsning af bestemte typer. Det kan måske tænkes sammen.

3.5 Geometri og vektorer

Det forventes, at eleverne kender begreber og terminologi vedrørende trekanters højder, medianer og vinkelhalveringslinjer, men det er ikke en del af kernestoffet at kende til indskrevne og omskrevne cirkler eller til egenskaber ved skæringspunktet mellem omtalte linjer.

Det forventes, at eleverne på A-niveau kan opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer med anvendelse af trigonometri, herunder at de kender sinus- og cosinusrelationerne.

Det forventes, at eleverne behersker regnereglerne for vektorer og de elementære operationer som:

- at finde tværvektor til en given vektor i planen
- at bestemme skalarproduktet mellem to vektorer og kunne fortolke dette tal
- at kunne bestemme determinanten mellem to vektorer i planen og kunne fortolke dette tal
- at kunne bestemme krydsproduktet mellem to rumgeometriske vektorer og kunne fortolke denne vektor
- at kunne finde projektionen af en vektor på en vektor.

Den analytiske geometri behandles både i 2 og i 3 dimensioner som en vektorbaseret koordinatgeometri, hvor eleverne ved skriftlig eksamen forventes at kunne:

- opstille og omskrive ligninger for cirkler og kugler samt bestemme tangenter og tangentplaner
- omskrive frem og tilbage mellem ligning og parameterfremstilling for linjer i planen
- bestemme ligning for planer og parameterfremstilling for linjer i rummet
- bestemme evt. skæringspunkter mellem linjer, mellem linjer og planer, og mellem linjer og cirkler, henholdsvis linjer og kugler
- bestemme vinkler mellem linjer, mellem linjer og planer og mellem to planer
- Bestemme afstande mellem punkter og i planen: afstand fra punkt til linje og i rummet fra punkt til plan.

For at udvikle elevernes læringsstrategier på flere felter inden for geometrien kan man med fordel lade eleverne illustrere og bearbejde geometriske objekter i dynamiske geometriprogrammer. Har man arbejdet med det fra første færd, vil det være lettere for eleverne at anvende 2D og 3D geometriprogrammer, når man arbejder med den analytiske geometri. Det kan også anvendes til at skabe undervisningsdifferentiering. Ved skriftlige prøver må de løse opgaver ved hjælp af dynamiske geometriprogrammer.

3.6 Matematisk ræsonnement

Eleverne skal møde den matematiske teori og selv arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet og inden for alle områder af undervisningen. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem, *hvad man ved*, *hvad man antager,* og *hvad man ønsker at vide*. Det gælder, uanset om emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. I skriftlige rapporter og mundtlig fremstilling skal de kunne fremlægge denne indsigt på en sådan måde, at det matematiske argument og den matematiske tankegang fremstår klart. I bedømmelseskriterierne indgår det som noget overordnet, at eleverne skal demonstrere indsigt i matematisk teori.

Uanset hvilke emner der arbejdes med på det enkelte hold, forventes det, at eleverne opnår en sådan indsigt i fagets deduktive natur, at de uden vanskeligheder forstår at *skelne mellem forudsætninger, definitioner og sætninger*, samt at de kan redegøre for, dvs. selvstændigt fremlægge, de *bærende ideer i en række centrale beviser* inden for forskellige af fagets områder. Denne side af matematikkens væsen kan introduceres allerede i 1. g gennem et eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for eleveksperimenter, for en diskussion af kategorier som forudsætninger, sætning og bevis samt en diskussion af det induktive contra det deduktive, og som samtidig rummer fascinerende problemstillinger. Sådanne materialer findes på emu'en.

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori, og tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig. Via en drøftelse af de anvendte forudsætninger giver det samtidig indblik i matematikkens opbygning.

4. Evaluering

Evalueringer kan have mange former. Egentlige prøver i matematik bør altid tilrettelægges med et pædagogisk sigte – de dygtige elever skal udfordres, men man skal samtidig have alle med. Prøver i bestemte faglige emner bør først afholdes, når de elever, der gør en indsats, har lært så meget, at de har mulighed for at levere en præstation, der giver dem en tilpas selvtillid.

4.1 Den mundtlige prøve

Ifølge læreplanens afsnit 4.2 skal ”de endelige spørgsmål til den mundtlige prøve meddeles til eleverne før prøven og *skal tilsammen dække de faglige mål og det faglige indhold*.” Spørgsmålene skal drøftes med eleverne, så de forstår, hvad spørgsmålene præcist går ud på. Det kan ske løbende eller i forbindelse med repetitionen. I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”Efter hvert forløb eller i forbindelse med en repetition demonstreres, hvorledes det faglige stof kan udmøntes i eksamensspørgsmål.”

Man kan med fordel bygge hele eller hovedparten af den mundtlige prøve op på grundlag af temaopgaver. Med temaopgavernes kombination af simpel problembehandling, matematisk ræsonnement og modellering og behandling af mere komplekse problemer giver det eksaminanderne mulighed for at demonstrere en bred indsigt i pågældende emne. Det giver samtidig rum for både den stærke og den svage elev, så de hver får bedre mulighed for at demonstrere, hvad de kan. Hvis man vælger at bygge prøvegrundlaget op af temaopgaver på langs, (se afsnit 2.7) giver det gode muligheder for at lave eksamensspørgsmål, som virkelig ækvivalerer hinanden, og hvor alle spørgsmål rummer hele registret af sværhedsgrader.

Man kan godt fravælge knapt så vellykkede undervisningsforløb, men man kan ikke fravælge faglige emner til den mundtlige prøve. Prøven omfatter hele læreplanen fra 0 til A – der findes ingen differenslæreplan for opgradering fra et niveau til et højere.

Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Der må gerne være dubletter. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.

Det enkelte eksamensspørgsmål skal være så *præcist formuleret*, at der ikke kan være tvivl om, hvilket stofområde der vil blive eksamineret i. Udtryk som ”du kan evt. komme ind på...” eller ”hvis der bliver tid ...” skal undgås.

Eksamensspørgsmålene må hverken indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen.

Eksamensspørgsmålet er todelt med *en forholdsvis kort overskrift – fx temaopgavens overskrift – og en uddybende undertekst* med et eller flere konkrete delspørgsmål. De(t) konkrete spørgsmål er det stof, eksaminanden selv skal komme med et oplæg om. Samtaledelen bevæger sig inden for de rammer, som overskriften udstikker. *På emu'en er der en række eksempler på udformning af eksamensspørgsmål*.

Der er ingen fast regel for, hvor længe hver af de to faser i eksaminationen skal være, men normalt bør der afsættes godt halvdelen af eksamenstiden til første del. Eksaminanden skal have mulighed for en selvstændig fremlæggelse og ikke for hurtigt afbrydes.

Samtalen kan tage udgangspunkt i nogle elementer fra første del – eller hvis overskriften er en temarapport, inddrage elementer herfra, som eksaminanden ikke har berørt, og give vedkommende mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelser af noget teori, at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over det faglige område. I samtaledelen kan man ikke afkræve eksaminanden bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem. Fejl og faglige misforståelser kan give anledning til opklarende spørgsmål, men dette må ikke udvikle sig til undervisning.

Eksaminanderne må have *alle hjælpemidler*, lærebøger, notater, rapporter, skriftlige afleveringer, computer, dispositioner til spørgsmålene mv. med både til forberedelsen og i selve eksamenslokalet, men de må naturligvis ikke kommunikere med omverdenen. Eksaminanderne skal ikke bruge forberedelsestiden på at skrive en eventuel disposition, de har lavet hjemmefra, over på et andet stykke papir, men på at forberede sig på det spørgsmål, de har trukket.

Under selve eksaminationen må eksaminanden støtte sig til notater eller henvise til en rapport, men skal før prøvens afholdelse være gjort opmærksom på, at oplæsning eller afskrift af sådanne notater ikke tæller positivt med i bedømmelsen. Det samme gælder oplæsning fra en PowerPoint.

4.2 Den skriftlige prøve

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det: ”Til den skriftlige prøve gives der 5 timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål, beskrevet i pkt. 2.1. Prøven er todelt. Første delprøve skal besvares uden brug af andre end særligt tilladte hjælpemidler. Efter udløbet af første delprøve afleveres besvarelsen heraf. Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.”

De stillede prøvesæt siden 2008 illustrerer dels omfang og opbygning af sådanne sæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være. De stillede sæt er dog ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt findes på Undervisningsministeriets hjemmeside.

4.2.1 Formulering og besvarelse af eksamensopgaver

I delprøven med hjælpemidler må eleverne altid anvende deres værktøjsprogrammer i løsning af opgaverne. I afsnittet om helhedsindtrykket er beskrevet de væsentligste krav til udformning af en eksamensbesvarelse. På www.uvmat.dk ligger et omfattende autentisk materiale om skriftlighed i matematik, herunder om hvorledes samme opgave kan besvares til fuldt point med brug af forskellige metoder og forskellige værktøjsprogrammer.

Brug af ord som ’skitse’ og ’tegn’ er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlige for opgavens besvarelse.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'beregn skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske kontra numeriske og grafiske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte eleverne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode, samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl.

Det forventes ligeledes, at eleverne opnår indsigt i, hvorledes man i opgaver, hvor det er relevant, kan argumentere ved hjælp af den afledede funktion. I delprøven med hjælpemidler kan der optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj.

Eksaminanderne må også gerne løse en differentialligning med brug af et CAS-værktøj, men i alle opgaver, hvor der skal løses en differentialligning, vil denne kunne omskrives til en af de typer, der er omtalt under kernestoffet.

Det forventes, at eksaminanderne kan opstille henholdsvis lineære, eksponentielle og potensmodeller ud fra data ved brug af regression, men det forventes ikke ved den skriftlige eksamen, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. Fx vil symbolet $f(x)$ både kunne anvendes til at betegne en funktion og en funktionsværdi. Og vektorer og punkter identificeres frit med deres repræsentation på koordinatform.

Der anvendes som standard dansk decimalkomma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser. Vi vil tillade os at skrive: (1.5 , 4) i stedet for (1,5 , 4). Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

4.2.2 Første delprøve

Til første delprøve forventes eleven at kunne:

Forståelsesindhold:

- Opstille enkle formler, ligninger og differentialligninger ud fra en sproglig beskrivelse
- Redegøre for konstanternes betydning i det grafiske forløb for første- og andengradspolynomier samt eksponentielle funktioner
- Fortolke af konstanter i lineære og eksponentielle vækstmodeller
- Anvende viden om fordoblings- og halveringskonstant for eksponentiel vækst
- Anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- Fortolke værdien af afledet funktion
- Aflæse væksthastighed grafisk
- Anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal

Formelindhold:

- Anvende nulreglen og løse simple første- og andengradsligninger
- Anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk
- Sætte tal ind i formler
- Anvende Pythagoras' læresætning
- Foretage beregninger i ensvinklede trekanter
- Isolere ukendte størrelser
- Bestemme regneforskrifter for lineære og eksponentielle funktioner
- Differentiere polynomier, e^x, $\ln(x)$ og x^a, herunder $\frac{1}{x}$ og $\sqrt{x}$
- Anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- Bestemme en tangentligning
- Bestemme integraler af polynomier, e^x, x^a og $\frac{1}{x}$
- Anvende de regneregler for integration, som er beskrevet i kernestoffet
- Redegøre for om en given funktion er en løsning til en differentialligning
- Anvende reglerne for vektorregning
- Anvende vektorielle værktøjer til at svare på spørgsmål om ortogonalitet, parallelitet og areal
- Opstille parameterfremstillinger og ligninger for linjer i planen
- Omskrive cirkelligninger med henblik på at bestemme centrum og radius.

4.2.3 Bedømmelsen af opgavebesvarelserne

I alle prøvesæt til skriftlig eksamen i matematik indgår de enkelte spørgsmål med samme vægt i bedømmelsen. Det er tydeligt markeret, hvad der forstås ved et spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål vil der indgå både en vurdering af den matematiske korrekthed, og om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. I alle skriftlige prøvesæt er dette *helhedsindtryk* beskrevet i de følgende fem kategorier:

- *Tekst*. Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.
- *Notation og layout.* Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.
- *Redegørelse og dokumentation*. Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.
- *Figurer*. I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.
- *Konklusion*. Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

4.3 Bedømmelseskriterier og taksonomi

Bedømmelsen er altid en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål, som er angivet i pkt. 2.1. I læreplanens afsnit 4.3 er givet en systematisk liste over, hvilke specifikke matematiske kompetencer man kigger efter.

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, *som er relevante* for pågældende eksamensspørgsmål. Ved den mundtlige prøve indgår en eventuel rapport ikke i bedømmelsen. Der tages alene hensyn til den mundtlige præstation. Når bedømmelsen er knyttet til de faglige mål, betyder det også, at den tager udgangspunkt i, hvad der grundlæggende karakteriserer pågældende niveau. Således lægges der fx på A-niveau særlig vægt på, om eksaminanden demonstrerer indsigt i matematisk teori.

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse. Når der *afgives karakterer*, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. Som et bilag til undervisningsvejledningen ligger på samme side karakterbeskrivelser, der i skematisk form viser, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på A-niveau.

4.4 Karakterbeskrivelser af karaktererne 02, 7 og 12

Stx A Mundtligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål. Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teoribygning.	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et foreliggende matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et matematisk ræsonnement	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig i et klart sprog med ubesværet anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag..

Stx A Skriftligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt.

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	- kan opstille og tolke modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om opstilling og tolkning af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	- kan anvende it-værktøjer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

5. Hvad er matematik – fagets identitet og metoder.

Der skal gennemføres en undervisning om matematik med det formål, at eleverne skal kunne:

- ”demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
- demonstrere viden om fagets identitet og metoder”

I læreplanens afsnit 1.1 og 1.2 er der givet en kompakt beskrivelse af fagets identitet:
”Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.”

Der findes en rig litteratur om fagets identitet og metoder, som der kan trækkes på, når dette skal udmøntes i undervisningsforløb. *KOM-rapportens* beskrivelse af faget kan anvendes til at strukturere arbejdet med dette.

5.1 Matematisk tankegang

Matematisk tankegang er i slægt med al anden videnskabelig tankegang, som eleverne møder i andre fag. *Begreber* dannes gennem *abstraktion*, der for matematikfaget indebærer reduktion, eliminering af variable og en simplificering af forudsætninger. Abstraktion rummer således et *informationstab*, men dette er nødvendigt, for at vi kan begynde at stille og svare på spørgsmål om fænomenet. Man kan ikke undersøge alt på én gang. Samtidig rummer abstraktion en mulighed for *at se mønstre* og opdage, at forskellige fænomener kan beskrives med samme begreber og opfører sig ensartet.

”Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første *overvejelser om tal og form*”. Der findes hverken tal eller trekanter, variable eller koordinatsystemer i naturen. De er skabt af mennesker. Tallet 7 er ikke 7 personer eller 7 æbler. Tal og det at tælle er givetvis udviklet samtidigt, og fra første færd *repræsenteres* de abstrakte begreber forskelligt, alt efter formålet: sprogligt (syv), en bunke (på syv) sten, en indstilling på en abacus, et talsymbol (7). Men hvad forstås da ved tallet 38 eller 5492 eller meget, meget større tal? Lad eleverne svare på det, og lad dem gå på opdagelse i talord i dansk og i fremmedsprog. Hvorfor hedder talordene som de gør? Er der slægtskab? Tallenes kulturhistorie rummer gode muligheder for et fagligt samarbejde.

Forholdet mellem tal og det at tælle demonstrerer samtidig, hvorledes matematik bestandig sprænger sine grænser ved *domæneudvidelse*. Der opstår regningsarter, aritmetik. Når antal repræsenteres ved rene abstrakte talsymboler, kan algoritmiske beskrivelser af løsning af bestemte problemer udtrykke gennem *regneregler* og i *formler*. Lad fx eleverne arbejde med matematiske problemer, som de er formuleret hos babylonierne, i den arabiske matematik eller i Cardanos renæssancematematik.

Hvad forstås ved så enkle udtryk som 2 + 3 = 5? Sandhedsværdien afhænger af, hvad tallene er symboler for. Fremgår det eksplicit, hvad sagen drejer sig om, skal dette også indgå, *når resultater af matematisk behandling kommunikeres*.

Tallenes beskrivelseskraft er så stor, at de rummer farer for forførelse. Jo større *muligheder* for forenklet beskrivelse og jo mere omfattende regnekraft, jo større tiltrækning kan sådanne metoder rumme, og desto vigtigere er det at inddrage *de begrænsninger* en sådan beskrivelse rummer: Hvad gemmer sig bag gennemsnittet? Kan egenskaber virkelig beskrives lineært på en skala fra 1 til 10? Kan sundhed udtrykkes i et BMI-tal?

5.2 Matematisk sprog

Matematikkens udvikling har altid været knyttet til løsning af problemer (fra det omgivende samfunds kulturelle eller teknologiske udvikling eller internt fra selve matematikkens udvikling). .*Problembehandlingens* første skridt er at give problemerne en matematisk form, dvs. formulere det i et *matematisk sprog*. Dette sprog har udviklet sig gennem hele kulturhistorien. Der indføres *symboler* for variable og geometriske størrelser, der udvikles *grafiske metoder* til at præsentere et datamateriale eller demonstrere variabelsammenhænge. Det giver muligheder for overblik og for at se nye sammenhænge. Det er en helt fundamental metode i matematik at kunne oversætte frem og tilbage *mellem naturligt sprog og symbolholdigt sprog*, dvs. at opstille og at fortolke matematiske udtryk.

Men en grafisk præsentation af større talmaterialer i form af diagrammer eller i form af variabelsammenhænge i koordinatsystemer – eller forskellige repræsentationer af samme data – er med et matematisk symbolsprog så enkelt at fremstille og rummer samtidig en sådan beskrivelseskraft, at den også indebærer en risiko for forførelse. Det er vigtigt både at inddrage metodernes *muligheder* og *begrænsninger* i undervisningen. Favner diagrammet hele historien? Er der ikke skjulte variable på spil, så sammenhængen vi ser kun er tilsyneladende?

5.3 Matematikkens udvikling

Det symbolholdige sprog giver muligheder for at stille helt nye spørgsmål – såvel matematikinterne spørgsmål som spørgsmål i forbindelse med modellering. Og når de hidtidige metoder ikke rækker, er svaret ikke altid at renoncere, men er i matematik ofte gennem en *domæneudvidelse at skabe en ny verden*, hvor spørgsmålet kan besvares symbolsk, at studere denne nye verden og siden tolke resultater herfra i helt nye sammenhænge. Komplekse tal opstår i arbejdet med løsning af abstrakte ligninger og viser sig gennem geometrisk og analytisk tolkning at kunne anvendes i landmåling og at være central i beskrivelsen af elektriske fænomener. Og i denne nye matematiske verden har klassiske matematiske problemer overraskende smukke og enkle løsninger. Logaritmer opstår i arbejdet på at lette omfattende astronomisk beregningsarbejde og åbner for en ny verden af funktionsklasser, der er centrale i teorien for differentialligninger. Et middeltal for bestemte stikprøver giver godt nok ikke information om det bagvedliggende, men en iagttagelse af, at middeltallet for de forskellige stikprøver udviser en stabilitet giver anledning til at rejse nye spørgsmål og udvikle nye statistiske metoder. Og omvendt: Når grækerne ikke udviklede deres forestillinger og teorier om tal i nær samme omfang som inden for geometriens område, kan det skyldes, at de ikke udviklede talsymboler. Beregninger på en abacus var åbenbart tilstrækkelige.

En vigtig metode i matematikkens bestandige udvidelse af den verden, vi opererer i, er *generaliseringens metode*: Bestemte fænomener kan muligvis anskues som specialtilfælde af noget større. Formlen for vinkelsummen kan generaliseres fra trekanter til polygoner. Det analytiske udtryk for Pythagoras læresætning kan generaliseres fra 2 til 3 dimensioner og give anledning til at overveje afstandsbegreber i højere dimensioner – og andre afstandsbegreber. Linjers hældningskoefficienter kan generaliseres kan generaliseres til egenskaber ved krumme kurver. Arealbestemmelse ud fra rektangler kan generaliseres til integralregningens beregninger af vilkårlige arealer.

5.4 Matematisk ræsonnement

Når matematikken kan *argumentere med sikkerhed* – bl.a. for at sådanne generaliseringer er holdbare, eller at Pythagoras læresætning i to dimensioner er sand – så skyldes det for det første, at man i matematik gennemfører en mere vidtrækkende abstraktion end i andre fag: De egenskaber, man ønsker at studere, 'uddestilleres' i ren form, for efterfølgende at blive anvendt som udgangspunkt for *definitioner* af matematiske begreber og for formuleringen af *de matematiske forudsætninger* og *aksiomer*, vi bygger vores videre undersøgelse på. Og det skyldes for det andet, at det matematiske ræsonnement i sidste ende er *strengt logisk*: Selv om vi ikke underviser i formallogik i gymnasiet, så er det grundlæggende matematiske argument – *Hvis A så B* – funderet her.

Matematik bygger – i modsætning til mange andre fag – på *det udelukkede tredjes princip*: Svaret er sandt eller falsk, ja eller nej. Men altid på grundlag af givne forudsætninger og aksiomer.

Elevernes arbejde med at tilegne sig ideen i denne *aksiomatisk-deduktive metode* og udvikle deres evne til *matematisk ræsonnement* kan foregå på mange måder og ofte med et gensidigt udbytte i et samarbejde med andre fag. Lad dem analysere kortere eller længere argumentationskæder. Lad dem gennem *en eksperimenterende tilgang* selv arbejde sig frem til, hvordan vi i matematik generaliserer og argumenterer for holdbarheden af dette. Giv dem eller lad dem selv finde andre *beviser* end de allerede gennemgåede – eller lad dem finde fejl i argumentationskæder.

5.5 Vekselvirkning mellem anvendelser og teoribygning

Det er også udviklende at sætte *fokus på selve metoden*, for at illustrere hvorledes "videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori". *Aksiomer* er hverken forankret i himlen eller faldet ned derfra, og matematik er ikke en meningsløs leg med aksiomer og definitioner: Euklids aksiomer er næppe skabt før kendskabet til sætningen om trekanters vinkelsum eller til Pythagoras læresætning – men snarere udformet *for at skabe fast grund under de matematiske argumenter* for disse sætninger. Og så åbnede det for langt mere i den verden. Lad eleverne arbejde med tekster og opgaver med henblik på at svare – og *formidle svarene* – på spørgsmål som:

– Hvad i det ægyptiske samfunds organisering kunne begrunde, at de udviklede brøkregning?

- Hvordan foregik regningsarterne i praksis før decimaltal og positionstalsystemet blev skabt – og hvad kan begrunde udviklingen af decimaltallene?
- Hvilke faktiske problemer kunne motivere udviklingen af differentialregningen – og hvornår skabes det formelle og aksiomatiske grundlag?
- Hvornår og ud fra hvilke problemer opstod sandsynlighedsregningen, og hvornår tog man fat på at skabe et fast grundlag herfor, der også rakte til at løse problemer, hvor der er uendeligt mange valgmuligheder?
- Hvornår og hvordan blev de reelle tals fundamentale egenskaber aksiomatisk beskrevet, og hvilke grundlæggende problemer i analysen skulle dette løse.
- Hvad var det for praktiske, logistiske problemer for den amerikanske krigsførelse under 2. verdenskrig, der førte til udviklingen af en helt ny gren af matematikken, lineær programmering?

Matematik er ikke kun udviklet ud fra en behandling af stadigt nye problemer fra omverdenen og fra andre fag. Også problemer i faget selv giver anledning til at skabe nye verdener. I et samarbejde med andre fag eller i et forløb i almen studieforberedelse kunne man fx studere *de metodiske overvejelser* bag udviklingen af den ikke-euklidiske geometri og de grundlæggende *etiske og videnskabsteoretiske* problemer dette rejste i lyset af Kants absolutisering af den euklidiske geometri. Andre emner, der kunne indgå på samme vis, kunne være *uendelighedsbegrebet* (hos grækerne og hos Cantor), infinitesimalregningens *uendeligt små størrelser* (hos Newton og Berkeley) eller *fraktale dimensioner*.

5.6 Den æstetiske dimension og de matematiske beviser

At stræbe efter at opbygge en verden, der transcenderer det konkrete, deler matematik med visse andre fag, bl.a. de kunstneriske fag, og *den æstetiske dimension* er en stærk motiverende faktor i udøvelsen af matematik fra det simpleste til avanceret forskning. I matematik bygges disse verdener op ud fra overvejelser, som er beslægtet med tilsvarende i fag som billedkunst og musik, selv om hvert fag naturligvis har sin udformning af *formelle regler* og sine krav til *den logiske argumentation*. Grundlaget for de matematiske verdener er altid søgt udformet så enkelt som muligt i pagt med tilsvarende traditioner i filosofien, og samtidig udformet uden indre modsigelser: Den samme påstand kan ikke både være sand og falsk. Og på dette grundlag er der i matematisk teori udkrystalliseret flere accepterede strategier til *at bevise matematiske sætninger*: induktionsbeviser, direkte beviser, indirekte beviser, beviser ved kontraposition. Og i andre typologier: eksistensbeviser og konstruktionsbeviser. Eleverne bør på A-niveau selv arbejde med alle disse typer af beviser.

5.7 Matematisk modellering

Når matematikken bringes i spil og anvendes til behandling af anliggender uden for matematikken selv, sker dette gennem *en aktiv modelbygning eller modellering*. Det kan dreje sig om:
- Opstilling af geometriske modeller, der beskriver og håndterer figurer, flader og former og prøver at finde mønstre og strukturer
- Opstilling af statistiske modeller, der beskriver og håndterer indsamlede data fra omverden og prøver at tolke forandringer, opstille prognoser og at finde sammenhænge mellem de oprindelige kildedata
- Opstilling af dynamiske modeller, der beskriver og håndterer bevægelse og interaktion, processer og vækstfænomener og prøver at fremskrive og forudsige en udvikling.

Matematisk modellering indeholder en række elementer, der er i spil alt afhængig af den konkrete sag:

- For det første må der ske en afgrænsning og sproglig beskrivelse af det problem eller den situation, der skal modelleres. Dernæst skal der foretages en oversættelse fra naturligt sprog til matematisk sprog af de objekter, fænomener, relationer mv., der er i spil: Der indføres numeriske variable som tid, vægt, koncentration og alder og kategoriale variable som køn, ansættelse, nationalitet og institutionstype. Et billede af virkeligheden repræsenteres ved en matematisk figur, en forandring i tid repræsenteres ved en differentialkvotient osv. Denne *matematisering* foregår på flere niveauer og kan ofte med fordel ske i et samarbejde med andre fag.
- Oversættelse af den oprindelige komplekse situation eller problem til et matematisk problem vil altid ske gennem idealiseringer, abstraktion, antagelse af bestemte forudsætninger osv., dvs. der er sket et *informationstab*. Der kan være *bias* (systematiske fejl) i en indsamlet stikprøve.
- Når dette er givet en matematisk form, så anvendes de relevante matematiske metoder til at behandle den matematiske model og løse de matematiske problemer, der nu er formuleret. Første trin vil ofte være deskriptive og grafiske metoder, der repræsenterer materialet i en form, hvorfra man kan stille yderligere spørgsmål.
- Og endelig sker der en *validering* af den matematiske model ved at oversætte tilbage fra det matematiske sprog til det oprindelige og bedømme holdbarheden af de matematiske resultater. Ved at inddrage andre fag kan man med større sikkerhed svare på, om resultaterne er holdbare eller kan forklares med *skjulte variable* (konfundering) eller med en stor usikkerhed i forsøgsopstillingen mv.
- Gennem en *kommunikation* med andre fag skal der således ske en kritisk analyse af modelbygningen og af modellens holdbarhed og gyldighed.

5.8 Matematikkens hjælpemidler

I den matematiske behandling af givne problemer i fx en geometrisk eller statistisk model er der altid blevet inddraget *hjælpemidler*, fra abacus og passer og lineal, over tabeller til dynamiske geometriprogrammer og statistiske værktøjsprogrammer. Omvendt har hjælpemidlerne altid virket tilbage på matematikkens udvikling og de stadige bestræbelser gennem historien på at forstå strukturer i det, man undersøger, og forstå matematikkens egen indre struktur. I det gamle Grækenland havde man mange forskellige hjælpemidler, men Euklid vælger to af disse ud og inkluderer i sine fem forudsætninger (*aksiomer*), hvad passeren og linealen (uden målestok) matematisk set kan hjælpe med til, når man skal løse et geometrisk problem. Denne refleksion over, hvad de to hjælpemidler kan og ikke kan, fik enorm betydning for matematikkens udvikling. Regnemaskiner og i dag statistiske værktøjsprogrammer har givet mulighed for at behandle store datamængder og at se sammenhænge i en tilsyneladende kaotisk verden, sammenhænge som kan afprøves ved at opstille hypoteser ud fra materialet. Det er en integreret del af at modellere og problembehandle at kunne inddrage relevante hjælpemidler og at kunne *reflektere over disses muligheder og begrænsninger*. Se i øvrigt mere herom i *MATHIT-bogen* (se afsnit 2.6), der ligger til fri afbenyttelse på emu'en.