

Matematisk formelsamling til A-niveau

- i forsøget med netadgang til skriftlig eksamen¹

Forord

Matematisk formelsamling til A-niveau er udarbejdet for at give et samlet overblik over de formler og det symbolsprog, der knytter sig til kernestoffet for dette niveau i gymnasiet og på hf. Selv om alle hjælpemidler i dag er tilladt ved en del af den skriftlige eksamen, vil en formelsamling være praktisk at have for eleverne, også i det daglige arbejde. Formelsamlingen har derimod ingen juridisk status, og kernestoffet til skriftlig eksamen er ikke defineret af den.

For overblikkets skyld er medtaget formler for areal og rumfang af en række elementærgeometriske figurer.

Endvidere indeholder formelsamlingen en liste over matematiske standardsymboler. Hensigten hermed er dels at give eleverne et hurtigt overblik, dels at bidrage til, at undervisere og forfattere af undervisningsmaterialer kan anvende ensartet notation, symbolsprog og terminologi. Listen over matematiske standardsymboler går derfor ud over kernestoffet, men holder sig dog inden for det matematiske univers i gymnasiet og på hf.

En række af formlerne i formelsamlingen er kun anvendelige under visse forudsætninger (f.eks. at nævneren i en brøk er forskellig fra 0). Sådanne forudsætninger er af hensyn til overskueligheden ikke eksplícit nævnt.

Figurene er medtaget som illustration til formlerne, og den enkelte figur anskueliggør ofte ét blandt flere mulige tilfælde.

Betydningen af de størrelser, der indgår i formlerne, er ikke altid forklaret, men vil dog være det i tilfælde, hvor denne betydning ikke følger umiddelbart af skik og brug i den matematiske litteratur.

Formelsamlingen udgives af Matematiklærerforeningen og er udarbejdet af et udvalg nedsat af foreningen: Formand for Matematiklærerforeningen Marianne Kesselhahn, forlagsdirektør Jørgen Dejgaard, fagkonsulent Bjørn Grøn, formand for opgavekommissionen for hf Gert Schomacker, formand for opgavekommissionen for gymnasiet Ellen Stengaard Munkholm, medlem af opgavekommissionen for hf Flemming Mørk, medlem af opgavekommissionen for gymnasiet Sven Toft Jensen.

Redaktionen er afsluttet august 2007.

Marianne Kesselhahn
Matamatiklærerforeningen

Bjørn Grøn
Fagkonsulent

Bemærk:

Denne formelsamling er redigeret til brug i forsøg med netadgang ved skriftlig eksamen i matematik og må ikke anvendes i anden sammenhæng.

¹ Formelsamlingen må kun anvendes af hold, der deltager i forsøget.

Til første delprøve – delprøven med formelsamling – forventes eleven at kunne:

Forståelsesindhold:
Opstille enkle formler, ligninger og differentialligninger
Redegøre for konstanternes betydning i det grafiske forløb for første- og andengradspolynomier samt eksponentielle funktioner
Fortolkning af konstanter i vækstmodellerne: Lineær, eksponentiel, forskudt eksponentiel og logistisk
Aflæse og fortolke fordoblings- og halveringskonstant for eksponentiel vækst
Anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
Fortolke værdien af afledet funktion
Aflæse væksthastighed grafisk
Anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal
Fortolke egenskaber ved løsninger til differentialligninger (uden at løse differentialligningen)
Aflæse og fortolke de statistiske deskriptorer ud fra et givet boksplot, histogrammer og sumkurve
Formelindhold:
Anvende nulreglen og løse første og andengradsligninger
Anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk
Sætte tal ind i formler
Anvende Pythagoras læresætning
Foretage beregninger i ensvinklede trekanter
Isolere ukendte størrelser, herunder anvende logaritmer og potenser
Bestemme regneregler for lineære og eksponentielle funktioner
Differentiere polynomier, e^{kx} , $\ln(x)$ og x^a , herunder $\frac{1}{x}$
Anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
Bestemme en tangentligning
Bestemme integraler af polynomier, x^a , e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
Anvende de regneregler for integration, som er beskrevet i kernestoffet
Redegøre for om en given funktion er en løsning til en differentialligning
Anvende reglerne for vektorregning
Anvende vektorielle værktøjer til at svare på spørgsmål om ortogonalitet, parallelitet og areal
Opstille parameterfremstillinger og ligninger for linjer i planen
Omskrive cirkelligninger med henblik på at bestemme centrum og radius

Bemærk: Formler og symboler omtalt på siderne 27-32 kan også indgå i begge delprøver.

For at gøre det overskueligt har vi markeret relevante formler til brug i første delprøve med grønt.

Indholdsfortegnelse

Procentregning	4
Proportionalitet.....	4
Kvadratsætninger	4
Potensregneregler.....	4
Ensvinklede trekantter.....	5
Retvinklet trekant.....	5
Vilkårlig trekant	5
Vektorer i planen.....	6
Linjer i planen	8
Cirkel.....	9
Parabel.....	9
Vektorer i rummet.....	9
Planer i rummet.....	12
Linjer i rummet	12
Kugle	12
Polynomier	13
Logaritmefunktioner	14
Eksponentielt voksende.....	15
funktioner	15
Eksponentielt aftagende	16
funktioner	16
Potensfunktioner	17
Trigonometriske funktioner	18
Differentialregning.....	19
Afledet funktion	20
Stamfunktion	20
Regneregler for integration	21
Areal og rumfang	22
Differential ligninger.....	23
Grupperede observationer	24
Ugrupperede observationer	25
Areal og omkreds, rumfang og overflade af geometriske figurer.....	26
Matematiske standardsymboler.....	27

PROCENTREGNING

Begyndelsesværdi B (1) $S = B \cdot (1 + r)$
Slutværdi S

Vækstrate r (2) $r = \frac{S}{B} - 1$

Procentvis ændring p (3) $p \% = r \cdot 100 \%$

Startkapital K_0
Rente $p \%$ pr. termin
Kapital K efter n terminer (4) $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$, hvor $r = \frac{p}{100}$

PROPORTIONALITET

x og y er proportionale
Proportionalitetsfaktor k (5) $y = k \cdot x$ $\frac{y}{x} = k$

x og y er omvendt proportionale (6) $y = k \cdot \frac{1}{x}$ $x \cdot y = k$

KVADRATSÆTNINGER

Kvadratet på en sum (7) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Kvadratet på en differens (8) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

To tals sum gange
samme to tals differens (9) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

POTENSREGNEREGLER

(10) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(11) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(12) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

(13) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

(14) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

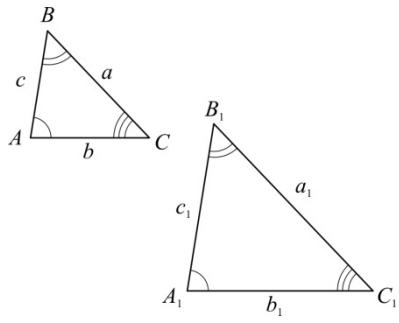
(15) $a^0 = 1$

(16) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

(17) $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$

(18) $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$

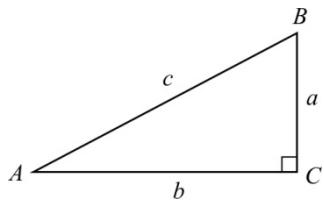
ENSVINKLEDE TREKANTER



$$(19) \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

$$(20) \quad \begin{aligned} a_1 &= k \cdot a \\ b_1 &= k \cdot b \\ c_1 &= k \cdot c \end{aligned}$$

RETVINKLET TREKANT



Pythagoras' sætning

$$(21) \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Cosinus

$$(22) \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

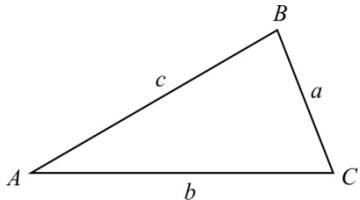
Sinus

$$(23) \quad \sin A = \frac{a}{c}$$

Tangens

$$(24) \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

VILKÅRLIG TREKANT



Cosinusrelation

$$(25) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$(26) \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Sinusrelation

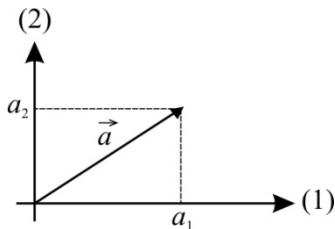
$$(27) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$(28) \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Trekantens areal T

$$(29) \quad T = \frac{1}{2}ab \sin C$$

VEKTORER I PLANEN



Koordinatsættet for vektor \vec{a}

$$(30) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Længden af vektor \vec{a}

$$(31) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Multiplikation af vektor \vec{a} med
tallet k

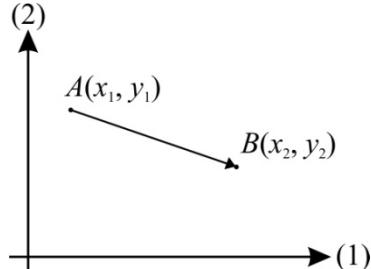
$$(32) \quad k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

Summen af to vektorer

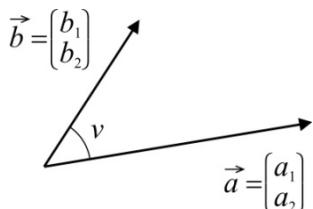
$$(33) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Differensen mellem to vektorer

$$(34) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$



$$(35) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



Skalarproduktet
(prikproduktet) af \vec{a} og \vec{b}

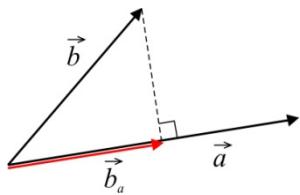
$$(36) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$(37) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v, \text{ hvor } v \text{ er vinklen mellem } \vec{a} \text{ og } \vec{b}$$

$$(38) \quad \cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Ortogonal vektorer

$$(39) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



Projektionen af \vec{b} på \vec{a}

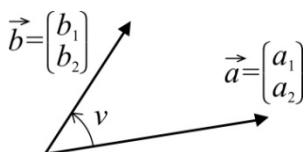
$$(40) \quad \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Længden af projektionen

$$(41) \quad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Tværvektoren til \vec{a}

$$(42) \quad \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$



Determinanten for
vektorparret (\vec{a}, \vec{b})

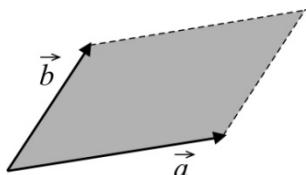
$$(43) \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$(44) \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin v, \text{ hvor } v \text{ er vinklen fra } \vec{a} \text{ til } \vec{b}$$

Parallelle vektorer

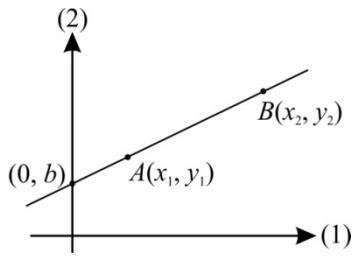
$$(45) \quad \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$



Arealet af det parallelogram,
der udspændes af \vec{a} og \vec{b}

$$(46) \quad A = |\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

LINJER I PLANEN



Hældningskoefficienten a for linjen gennem A og B

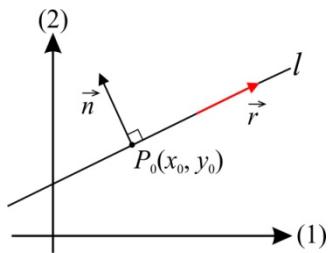
$$(47) \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ligning for linjen gennem punktet $(0, b)$ med hældningskoefficient a

$$(48) \quad y = ax + b$$

Ligning for linjen gennem punktet $A(x_1, y_1)$ med hældningskoefficient a

$$(49) \quad y = a(x - x_1) + y_1$$



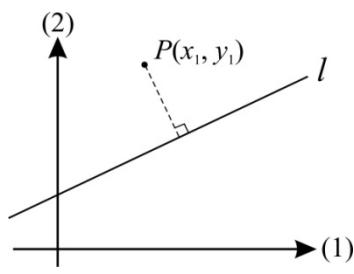
Ligning for linjen l gennem P_0 med normalvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$(50) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Parameterfremstilling for linjen l gennem P_0 med retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

$$(51) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$



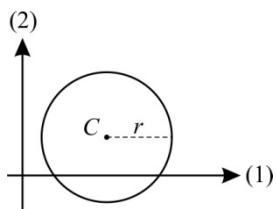
Afstanden fra P til linjen l med ligningen

$$ax + by + c = 0$$

er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

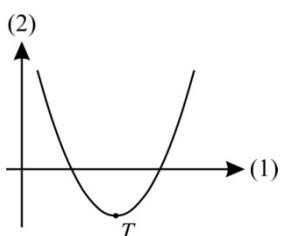
CIRKEL



Ligning for cirklen med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r

$$(53) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

PARABEL



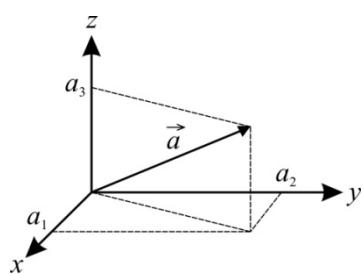
Ligning for parabel

$$(54) \quad y = ax^2 + bx + c$$

Toppunktet T

$$(55) \quad T = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right), \text{ hvor } d = b^2 - 4ac$$

VEKTORER I RUMMET



Koordinatsættet for vektor \vec{a}

$$(56) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Længden af vektor \vec{a}

$$(57) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Multiplikation af vektor med tallet k

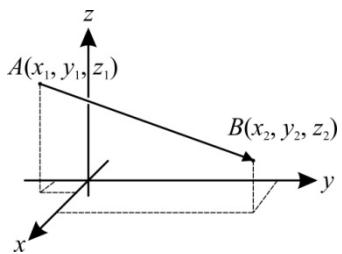
$$(58) \quad k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

Summen af to vektorer

$$(59) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

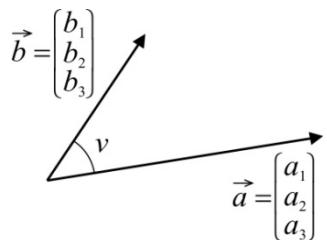
Differensen mellem to vektorer

$$(60) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$



Koordinatsættet for vektor \overrightarrow{AB}

$$(61) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



Skalarproduktet
(prækproduktet) af \vec{a} og \vec{b}

$$(62) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

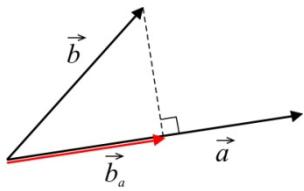
$$(63) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos v,$$

hvor v er vinklen mellem \vec{a} og \vec{b}

$$(64) \quad \cos v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Ortogonal vektorer

$$(65) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

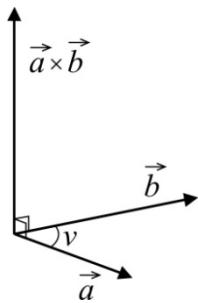


Projektionen af \vec{b} på \vec{a}

$$(66) \quad \vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Længden af projektionen

$$(67) \quad |\vec{b}_a| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

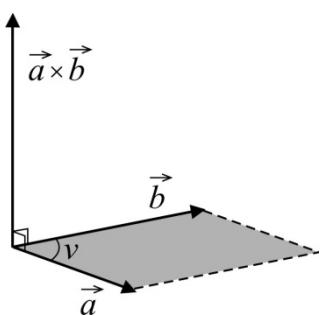


Vektorproduktet
(krydsproduktet) af \vec{a} og \vec{b}

$$(68) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right| \end{pmatrix}$$

Længden af $\vec{a} \times \vec{b}$

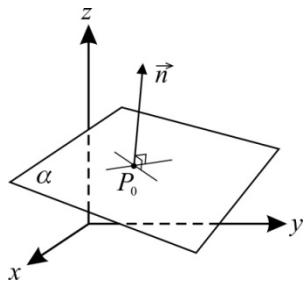
$$(69) \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin v, \quad \text{hvor } v \text{ er vinklen mellem } \vec{a} \text{ og } \vec{b}$$



Arealet A af det parallelogram,
der er udspændt af \vec{a} og \vec{b}

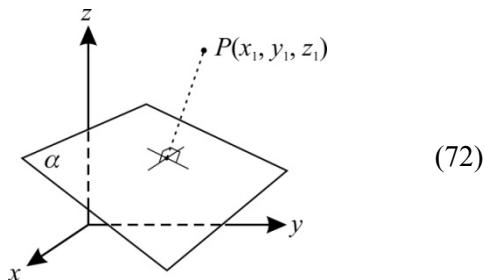
$$(70) \quad A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

PLANER I RUMMET



Ligning for planen α gennem punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ med

$$\text{normalvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (71) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

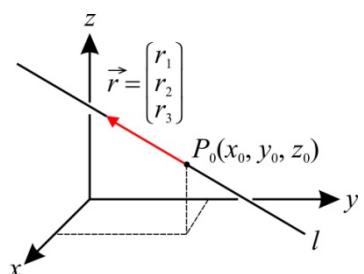


Afstand fra punktet P til planen α med ligningen

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{dist}(P, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

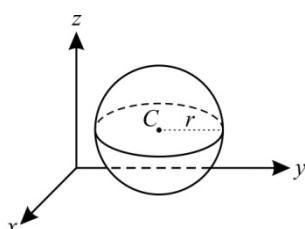
LINJER I RUMMET



$$(73) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Parameterfremstilling for linjen l gennem P_0 med retningsvektor \vec{r}

KUGLE

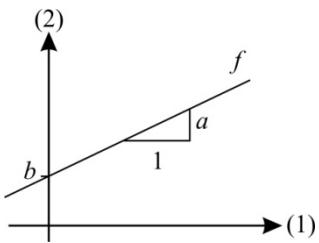


(75)

Ligning for kuglen med centrum $C(x_0, y_0, z_0)$ og radius r

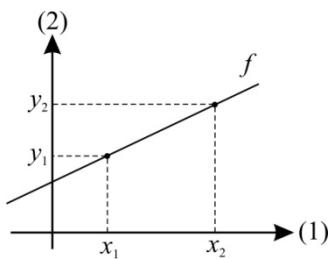
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

POLYNOMIER



Førstegradspolynomium,
lineær funktion f

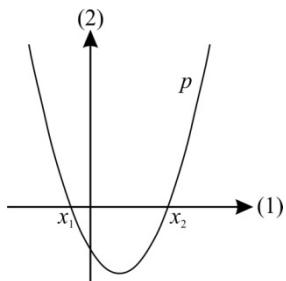
$$(76) \quad f(x) = ax + b$$



Hældningskoefficienten

$$(77) \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Når en lineær model $f(x) = ax + b$ skal bestemmes ud fra et talmateriale, anvendes lineær regression på hele talmaterialet.



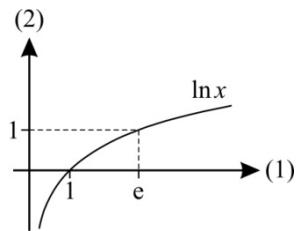
Andengradspolynomium p
med nulpunkter (rødder)
 x_1 og x_2

$$(78) \quad p(x) = ax^2 + bx + c \\ = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Nulpunkter (rødder) i p

$$(79) \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, \text{ hvor } d = b^2 - 4ac$$

LOGARITMEFUNKTIONER



Grafen for den naturlige logaritmefunktion

$$(80) \quad \ln x \rightarrow -\infty \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

$$(81) \quad \ln x \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

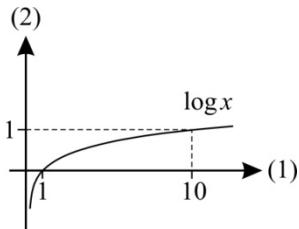
$$(82) \quad y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$(83) \quad \ln e = 1$$

$$(84) \quad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(85) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$(86) \quad \ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$$



Grafen for logaritmefunktionen med grundtal 10

$$(87) \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

$$(88) \quad \log x \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(89) \quad y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$$

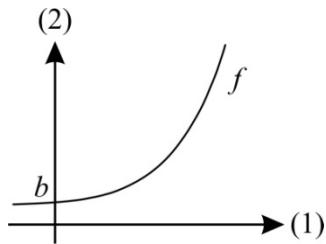
$$(90) \quad \log 10 = 1$$

$$(91) \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$(92) \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$(93) \quad \log(a^r) = r \cdot \log(a)$$

EKSPONENTIELT VOKSENDE FUNKTIONER



Grafen for en eksponentielt voksende funktion f
 $a > 1$
vækstraten $r > 0$

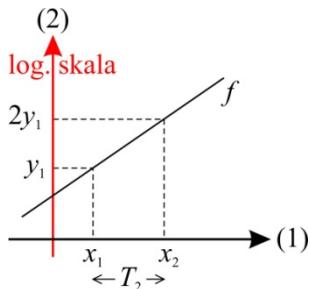
$$(94) \quad f(x) = b \cdot a^x \\ = b \cdot (1+r)^x \\ = b \cdot e^{kx}, \text{ hvor } k = \ln a$$

$$(95) \quad f(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(96) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow -\infty$$

Fremskrivningsfaktoren a ud fra 2 punkter på grafen (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$$(97) \quad a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$



Grafen for $f(x) = b \cdot a^x$ i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem

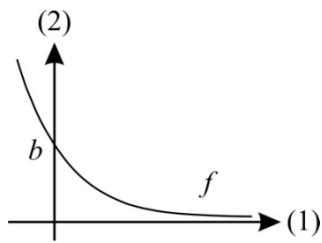
Fordoblingskonstanten T_2

$$(98) \quad T_2 = x_2 - x_1$$

$$(99) \quad T_2 = \frac{\log 2}{\log a} = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\ln 2}{k}$$

Når en eksponentiel model $f(x) = b \cdot a^x$ skal bestemmes ud fra et talmateriale, anvendes eksponentiel regression på hele talmaterialet.

EKSPONENTIELT AFTAGENDE FUNKTIONER



Grafen for en eksponentielt

aftagende funktion f

$$0 < a < 1$$

vækstraten $r < 0$

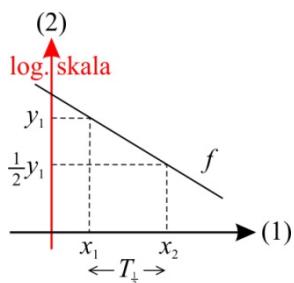
$$(100) \quad f(x) = b \cdot a^x \\ = b \cdot (1+r)^x \\ = b \cdot e^{-kx}, \text{ hvor } k = -\ln a$$

$$(101) \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow \infty$$

$$(102) \quad f(x) \rightarrow \infty \quad \text{for } x \rightarrow -\infty$$

Fremskrivningsfaktoren a
ud fra 2 punkter på grafen
(x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$$(103) \quad a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}$$



Grafen for $f(x) = b \cdot a^x$ i et
enkeltlogaritmisk koordinat-
system

Halveringskonstanten $T_{\frac{1}{2}}$

$$(104) \quad T_{\frac{1}{2}} = x_2 - x_1$$

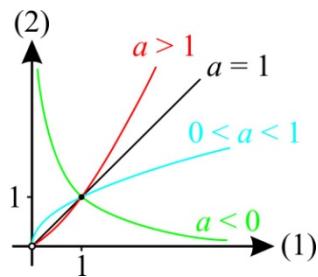
$$(105) \quad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-k} = \frac{\ln 2}{k}$$

Når en eksponentiel model $f(x) = b \cdot a^x$ skal bestemmes ud fra et talmateriale, anvendes eksponentiel regression på hele talmaterialet.

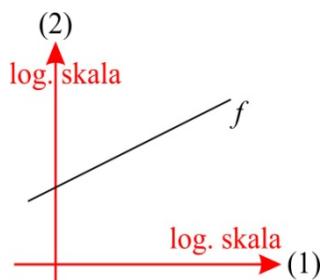
POTENSFUNKTIONER

Potensfunktion

$$(106) \quad f(x) = b \cdot x^a$$



Grafer for $f(x) = x^a$



Grafen for $f(x) = b \cdot x^a$ i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

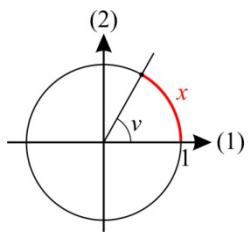
Bestemmelse af tallet a
ud fra to punkter på grafen
 (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

$$(107) \quad a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Når x ganges med tallet $1+r_x$,
så ganges $f(x)$ med tallet $1+r_y$ (108) $1+r_y = (1+r_x)^a$

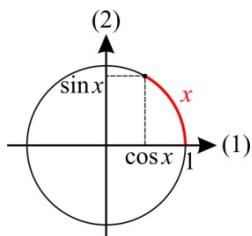
Når en potensmodel $f(x) = b \cdot x^a$ skal bestemmes ud fra et talmateriale, anvendes potensregression på hele talmaterialet.

TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

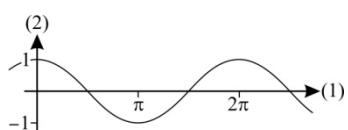


Gradtal v omsat til radiantal x (109) $x = \frac{v}{360} \cdot 2\pi$ radian

Radiantal x omsat til gradtal v (110) $v = \frac{x}{2\pi} \cdot 360$ grader



Definition af $\cos x$ og $\sin x$ (111) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

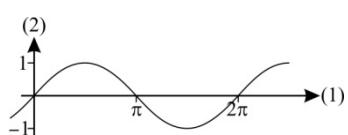


(112) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

(113) $\cos(-x) = \cos(x)$

(114) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

Grafen for cosinus



(115) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(116) $\sin(-x) = -\sin(x)$

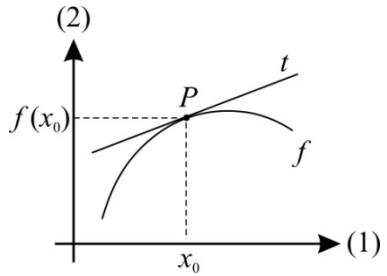
(117) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Grafen for sinus

DIFFERENTIALREGNING

Differentialkvotienten $f'(x_0)$
for funktionen f i tallet x_0

$$(118) \quad \begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$



Ligning for tangenten t til
grafen for f i $P(x_0, f(x_0))$

$$(119) \quad \begin{aligned} y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= a(x - x_0) + y_0, \end{aligned}$$

hvor $a = f'(x_0)$ og $y_0 = f(x_0)$

$$(120) \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(121) \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(122) \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(123) \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(124) \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Regneregler for differentiation

AFLEDET FUNKTION

	Funktion	Afledet funktion
	$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Logaritmfunktion	(125) $\ln x$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Eksponentiale funktioner	(126) e^x	e^x
	(127) e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
	(128) a^x	$a^x \cdot \ln a$
Potensfunktioner	(129) x^a	$a \cdot x^{a-1}$
	(130) $\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
	(131) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(132) $\cos x$	$-\sin x$
	(133) $\sin x$	$\cos x$

STAMFUNKTION

	Funktion	Stamfunktion
	$f(x)$	$\int f(x) dx$
Eksponentiale funktioner	(134) e^x	e^x
	(135) e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
	(136) a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
Potensfunktioner	(137) x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
	(138) $\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
	(139) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(140) $\cos x$	$\sin x$
	(141) $\sin x$	$-\cos x$

REGNEREGLER FOR INTEGRATION

Ubestemt integral

$$(142) \quad \int f(x) dx = F(x) + c, \\ \text{hvor } F(x) \text{ er en stamfunktion til } f(x)$$

$$(143) \quad \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$(144) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(145) \quad \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Integration ved
substitution

$$(146) \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt, \text{ hvor } t = g(x)$$

$$(147) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

$$(148) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Bestemt integral

$$(149) \quad \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

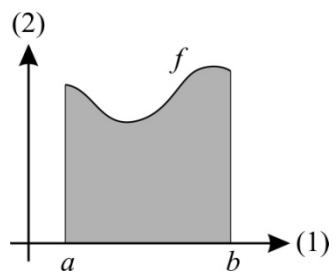
$$(150) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(151) \quad \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Integration ved
substitution

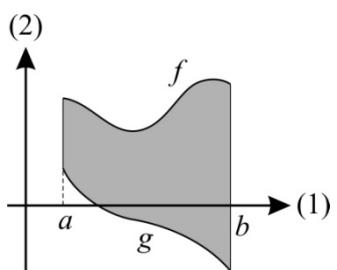
$$(152) \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} \\ = F(g(b)) - F(g(a)), \\ \text{hvor } F(x) \text{ er en stamfunktion til } f(x)$$

AREAL OG RUMFANG



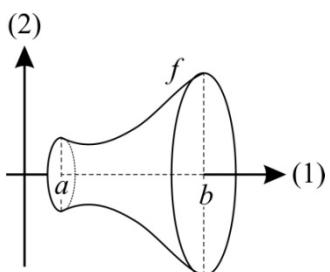
Arealet A
af det markerede område

$$(153) \quad A = \int_a^b f(x) dx$$



Arealet A
af det markerede område

$$(154) \quad A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Rumfanget V
af omdrejningslegemet

$$(155) \quad V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

DIFFERENTIAL LIGNINGER

Ligning

Løsning

$$(156) \quad y' = h(x) \quad y = \int h(x) dx$$

$$(157) \quad y' = k \cdot y \quad y = c e^{kx}$$

$$(158) \quad y' = b - ay \quad y = \frac{b}{a} + c e^{-ax}$$

$$(159) \quad y' = y(b - ay) \quad y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c e^{-bx}}$$

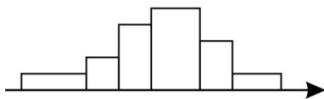
$$(160) \quad y' = ay(M - y) \quad y = \frac{M}{1 + c e^{-aMx}}$$

$$(161) \quad y' + a(x) \cdot y = b(x) \quad y = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx + c e^{-A(x)},$$

hvor $A(x)$ er stamfunktion til $a(x)$

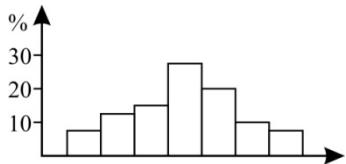
GRUPPEREDE OBSERVATIONER

10%



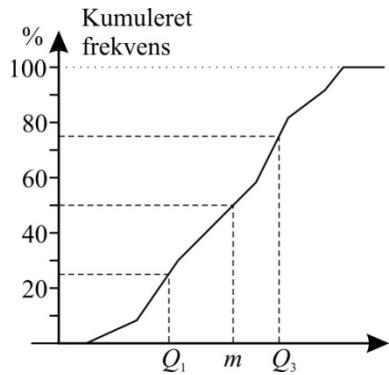
Histogram

(162) Arealet af en blok svarer til intervallets frekvens



Histogram
med *ens* intervallængder

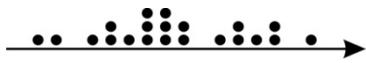
(163) Højden af en blok svarer til intervallets frekvens



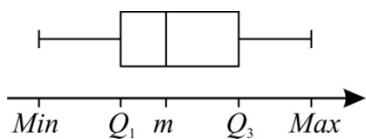
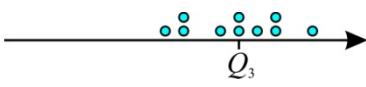
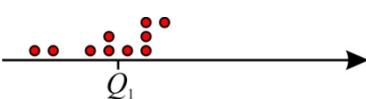
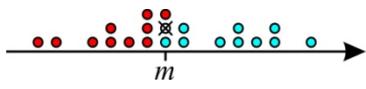
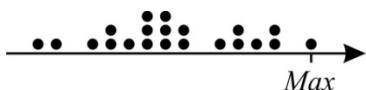
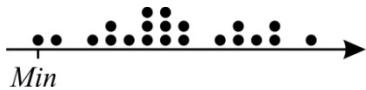
Sumkurve

(164) Q_1 : nedre kvartil, 25%-fraktilen
 m : median, 50%-fraktilen
 Q_3 : øvre kvartil, 75%-fraktilen

UGRUPPEREDE OBSERVATIONER



Prikdiagram



Middeltal \bar{x} for observationsættet x_1, x_2, \dots, x_n

(165) Observationerne afsat på en tallinje

(166) Min : mindste observation

(167) Max : største observation

m : median

(midterste observation, når antallet af observationer er ulige, ellers tallet midt mellem de to midterste observationer)

Q_1 : nedre kvartil

(medianen for den nederste halvdel af observationerne)

Q_3 : øvre kvartil

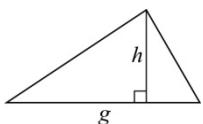
(medianen for den øverste halvdel af observationerne)

(171) Boksplot, kassediagram
(boksens højde er uden betydning)

$$(172) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

AREAL OG OMKREDS, RUMFANG OG OVERFLADE AF GEOMETRISKE FIGURER

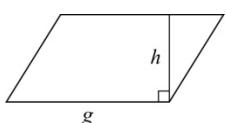
Trekant



h	Højde
g	Grundlinje
A	areal

$$A = \frac{1}{2}hg$$

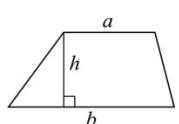
Parallellogram



h	Højde
g	Grundlinje
A	areal

$$A = hg$$

Trapez



h	Højde
a, b	parallelle sider
A	areal

$$A = \frac{1}{2}h(a+b)$$

Cirkel

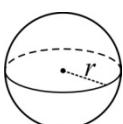


r	Radius
A	areal
O	omkreds

$$A = \pi r^2$$

$$O = 2\pi r$$

Kugle

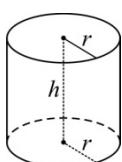


r	Radius
O	overflade
V	rumfang

$$O = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Cylinder

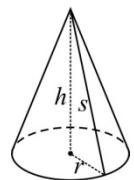


h	Højde
r	Grundfladeradius
O	krum
V	rumfang

$$O = 2\pi rh$$

$$V = \pi r^2 h$$

Kegle

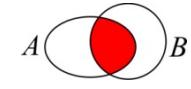
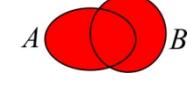
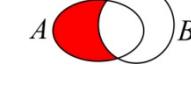
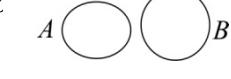


h	Højde
s	Sidelinje
r	Grundfladeradius
O	krum
V	rumfang

$$O = \pi rs$$

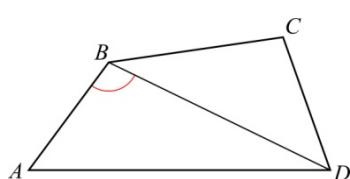
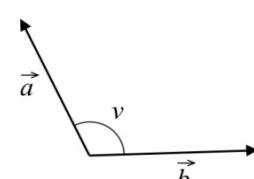
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

MATEMATISKE STANDARDSYMBOLER

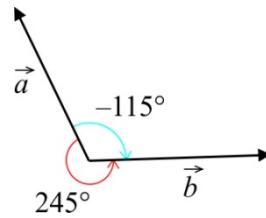
Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\{., ., ., .\}$	mængde på listeform	$\{-5, 0, 3, 10\} \quad \{2, 4, 6, \dots\}$
\mathbb{N}, \mathbb{N}	mængden af naturlige tal	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}, \mathbb{Z}	mængden af hele tal	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Q}, \mathbb{Q}	mængden af rationale tal	tal, der kan skrives $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}, \mathbb{R}	mængden af reelle tal	
\in	tilhører / er element i	$2 \in \mathbb{N}$
$\{x \in G \mid p(x)\}$	mængden af de elementer i G , for hvilke $p(x)$ er sand	$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 11\} = \{1, 2, 3\}$
$\{x \mid p(x)\}$	afkortet, G er underforstået	$\{x \mid x^2 < 9\} =]-3; 3[$
$\{(x, y) \mid p(x, y)\}$	område i planen	$\{(x, y) \mid 0 < x < 2 \wedge y \geq 5\}$
$[a; b]$	lukket interval	$[1; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
$]a; b]$	halvåbent interval	$]1; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$
$[a; b[$	halvåbent interval	$[1; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$
$]a; b[$	åbent interval	$]1; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
\subset	er en ægte delmængde af	$\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$
\cap	fællesmængde	$A \cap B$ 
\cup	foreningsmængde	$A \cup B$ 
\setminus	mængdedifferens	$A \setminus B$ 
\bar{A}	komplementærmængde	$U \setminus A$ 
\emptyset	den tomme mængde	
	disjunkte mængder	$A \cap B = \emptyset$ 
\times	mængdeprodukt	$[-10; 10] \times [-10; 10]$ benyttes til at angive et grafvindue
\wedge	”og” i betydningen ”både og” (konjunktion)	$x < 2 \quad \wedge \quad y = 5$

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
\vee	”eller” i betydningen ”og/eller” (disjunktion)	$x < 2 \vee x > 5$
\Rightarrow	”medfører”, ”hvis ... så” (implikation)	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
\Leftrightarrow	”ensbetydende”, ”hvis og kun hvis” (biimplikation)	$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$\sum_{i=1}^4 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$	
$n!$	n fakultet, n udråbstegn	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$, for $n \geq 1$ $0! = 1$
$f(x)$	funktionsværdi af x ved funktionen f	$f(x) = \sqrt{2x+1}$, så er $f(4) = 3$. I visse sammenhænge bruges udtryksmåden ”funktionen $y = \sqrt{2x+1}$ ” eller ”funktionen $\sqrt{2x+1}$ ”
$f(x)$	$f(x)$ kan også stå for funktionen f	
$Dm(f)$	definitionsmængden for f	
$Vm(f)$	værdimængden for f	
$f \circ g$	sammensat funktion	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
f^{-1}	omvendt (invers) funktion	$s = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(s)$
$\log x, \log(x)$	logaritmefunktionen med grundtal 10	$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$
$\ln x, \ln(x)$	den naturlige logaritmefunktion	$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
e^x	den naturlige eksponentialefunktion	e^x betegnes også $\exp(x)$
a^x	eksponentialefunktionen med grundtal a , $a > 0$	$b \cdot a^x$ kaldes undertiden for en eksponentialefunktion eller en eksponentiel udvikling
x^a	potensfunktion	$b \cdot x^a$ kaldes undertiden for en potensfunktion eller en potens-udvikling
$ x $	numerisk (absolut) værdi af x	$ 3 = 3$, $ -7 = 7$ $ x $ betegnes også $\text{abs}(x)$
$\sin x, \sin(x)$	sinus	
$\cos x, \cos(x)$	cosinus	
$\tan x, \tan(x)$	tangens	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$\cot x, \cot(x)$	cotangens	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

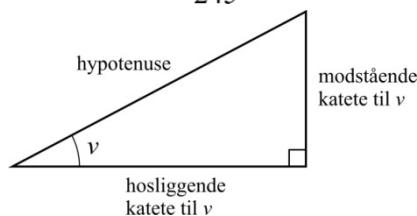
Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\sin^{-1}(y)$	omvendt funktion til sinus	$\sin^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \sin x = y$ $\sin^{-1}(0,5) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$ \sin^{-1} betegnes også Arc sin
$\cos^{-1}(y)$	omvendt funktion til cosinus	$\cos^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \cos x = y$ $\cos^{-1}(0,5) = \frac{\pi}{3}$, $\cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$ \cos^{-1} betegnes også Arc cos
$\tan^{-1}(y)$	omvendt funktion til tangens	$\tan^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \tan x = y$ $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}(1) = 45^\circ$ \tan^{-1} betegnes også Arc tan
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod x_0	$\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod ∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
$f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow x_0$	$f(x)$ går mod a for x gående mod x_0	$\sqrt{x+1} \rightarrow 3$ for $x \rightarrow 8$
$f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow \infty$	$f(x)$ går mod a for x gående mod ∞	$e^{-x} \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \infty$
Δx	x -tilvækst	$\Delta x = x - x_0$
$\Delta y, \Delta f$	funktionstilvækst for $y = f(x)$	$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta f}{\Delta x}$	differenskvotient for $y = f(x)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$f'(x_0)$	differentialkvotienten for $y = f(x)$ i x_0	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
f'	afledet funktion af $y = f(x)$	Betegnes $f'(x)$, y' , $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\left(\sqrt{3x^2 + 1}\right)'$

Symbol	Betydning	Eksempler, bemærkninger m.v.
$f^{(n)}$	den n 'te afledede funktion af $y = f(x)$	$f^{(2)}(x)$ skrives ofte $f''(x)$, y'' eller $\frac{d^2y}{dx^2}$
$\int f(x) dx$	en stamfunktion (ubestemt integral) til $f(x)$	
$\int_a^b f(x) dx$	det bestemte integral fra a til b af $f(x)$	
AB	linjestykket AB	
$ AB $	længden af linjestykket AB	
\widehat{AB}	cirkelbuen AB	
$ \widehat{AB} $	længden af cirkelbuen AB	
$\vec{a}, \overrightarrow{AB}$	vektor	
$ \vec{a} , \overrightarrow{AB} $	længden af vektoren	
$\hat{\vec{a}}$	tværvektor	betegnelsen $\hat{\vec{a}}$ kan også anvendes
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skalarprodukt, prikprodukt	betegnelsen $\vec{a} \cdot \vec{b}$ benyttes også
$\vec{a} \times \vec{b}$	vektorprodukt, krydsprodukt	
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	determinanten for vektor- parret (\vec{a}, \vec{b})	betegnelsen $\det(\vec{a}, \vec{b})$ benyttes også
\parallel	”er parallel med”	
\perp	”er vinkelret på”	$l \perp m$ læses også ” l og m er ortogonale”
$\angle A$	vinkel A	$\angle A = 110^\circ$ eller $A = 110^\circ$
$\angle ABD$	vinkel B i trekant ABD	
$\angle(\vec{a}, \vec{b})$	vinklen v mellem \vec{a} og \vec{b} , hvor $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$	 

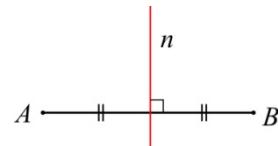
vinklen fra \vec{a} til \vec{b}



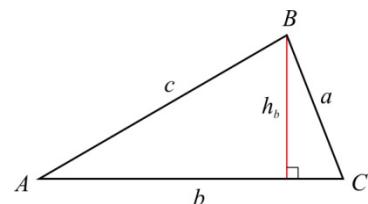
retvinklet trekant



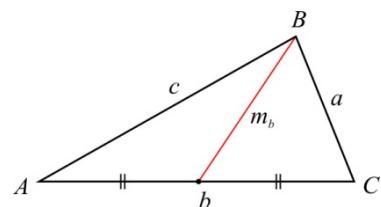
midtnormalen n
for linjestykket AB



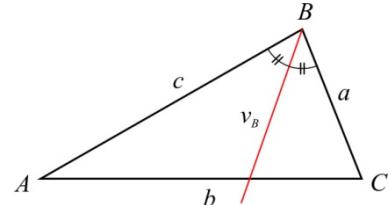
h_b højden fra B på siden b eller
dens forlængelse



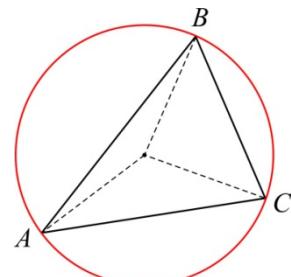
m_b medianen fra B på siden b



v_B vinkelhalveringslinjen for
vinkel B



trekant ABC 's omskrevne
cirke



trekant ABC 's indskrevne
cirke

