

1. Juni 2011

Vejledning til grundfaget matematik - fagbilag 15

Gældende fra Juli 2011

Uddannelsesstyrelsen, Afdelingen for erhvervsrettede uddannelser

Indholdsfortegnelse

Forord	3
Indledning	3
Formål	4
Mål	4
Indhold	5
Beskrivelse af faget i den lokale undervisningsplan	6
Progression	6
Progression i kompetencer	7
Problembehandlingskompetence.....	7
Modelleringskompetence	8
Symbol- og formalismekompetence.....	9
Tankegangskompetence	10
Repræsentationskompetence	10
Kommunikationskompetence.....	11
Hjælpemiddelkompetence.....	11
Ræsonnementskompetence	11
Skematisk oversigt over progressionen i kompetencer.....	12
(1) Eksempel på progression i problembehandlingskompetence.....	12
(2) Eksempel på progression i modelleringskompetence.....	13
(3) Eksempel på progression i symbol og formalismekompetence.....	15
Progression i indhold	18
Skematisk oversigt over progressionen i indhold.	20
Tilrettelæggelse af undervisningen	21
Eksempler på tematisering af indholdet i undervisningen på niveau F og E og D.	24
Dokumentation	26
Temaopgave	26
Projekt	27
Evaluering	28
Løbende evaluering	28
Eksamen	28
Mundtlig eksamen	29
Skriftlig eksamen.....	30

Forord

Alle bestemmelser, der er bindende for undervisningen og prøverne i grundfagene, findes i uddannelsesloven og de tilhørende bekendtgørelser, herunder fagbilag. Denne vejledning beskriver rammer for og anvisninger på, hvorledes de bindende bestemmelser kan opfyldes.

Eksempler og forslag i vejledningen er tænkt som inspiration for underviseren og er således ikke udtømmende. For yderligere inspiration kan henvises til fagets Råd og vink og til www.eudtube.dk, som rummer mulighed for at downloade inspirationsmateriale og for at uploade eget materiale.

På eudtube.dk's forside er desuden link til fagsiden for matematik, der blandt andet indeholder faglig inspiration, fagbilag og kontaktoplysninger.

Indledning

Baggrunden for udarbejdelse af vejledningen som supplement til fagbilaget i grundfagsbekendtgørelsen er ønsket om

- at sikre grundfaget en erhvervsfaglig toning og en faglig integration mellem grundfag og områdefag
- at synliggøre og sikre den faglige progression mellem niveauerne
- at bringe faget i samspil med de øvrige elementer i den valgte uddannelse, så eleven møder erhvervsområdets faglighed så hurtigt som muligt
- at gøre prøveform og eksamen praksisnær

Fagbilaget præciserer grundfagets dobbelte rolle i forhold til den enkelte erhvervsuddannelse og ungdomsuddannelsesperspektivet, og fagets mål er beskrevet som kompetencemål. Kompetence forstås som den evne eleven har til – på baggrund af faglig indsigt – at handle hensigtsmæssigt i en given situation. Derved bliver det elevens handlinger, der afdækker i hvilken grad, eleven besidder de enkelte kompetencer, og dermed også elevens handlinger, som giver grundlag for bedømmelse af eleven. Kompetencemålene skal således også tjene som grundlag for den realkompetencevurdering, der er forudsætningen for udarbejdelse af elevens personlige uddannelsesplan.

Tilrettelæggelsen af undervisningen og valg af indhold skal tilgodese elevens forudsætninger og valg af uddannelse. Fagets udmøntning kan altså variere fra elev til elev såvel som fra skole til skole. Skolen beskriver i den lokale undervisningsplan, hvordan grundfaget gennemføres i den enkelte uddannelse.

Fagbilaget angiver målene for undervisningen på de fire niveauer. Målene er beskrevet som kompetencemål med udgangspunkt i de 8 matematiske kompetencer, der kendetegner fagets kernefaglighed på tværs af uddannelsessystemet. Derudover er der fastsat overordnede rammer for udvælgelse af de matematikfaglige stofområder, der skal indgå i undervisningen. En præcis udvælgelse af pensum skal foretages på skolen i forhold til den uddannelsesmæssige sammenhæng og beskrives i den lokale undervisningsplan. I fagbilaget fortages således en prioritering af de matematiske kompetencer og en angivelse af progressionen, medens valget af det indhold, der skal arbejdes med kun er afstukket i overordnede rammer, der skal udfyldes lokalt. Nogle faglige

udvalg har foretaget en del af denne udfyldning i de kompetencemål, eleven skal nå i grund- eller hovedforløb.

Formål

Formålet med faget afhænger til dels af, om det indgår som obligatorisk fag i elevens uddannelse, eller om faget optræder som valgfrit fag. Særligt på de niveauer, hvor faget indgår som obligatorisk fag i en erhvervsuddannelses fagrække eller kompetencemål, er matematikkens genstands-område en del af uddannelsens genstandsområde. Omdrejningspunktet for matematikundervisningen på de obligatoriske niveauer er således identifikation og behandling af matematikholdige problemstillinger fra elevens valgte uddannelsesområde samt udvikling af de matematikfaglige kompetencer, der skal bringe eleverne i stand til at genkende, opstille og gennemføre matematiske beregninger fra deres erhvervsområde evt. suppleret af eksempler fra andre områder. Hvor faget gennemføres som valgfri del af elevens erhvervsuddannelsesforløb, kan fagets bidrag til erhvervs kvalificeringen vægte mindre eller for nogle elever være helt fraværende. Fagets anvendelse i andre sammenhænge end den rent matematiske er også på de højere oftest valgfrie niveauer central, men anvendelsesområderne kan vælges mere frit ud fra elevens interesse, studieforbere-else eller andet.

Mål

Målene, som angiver slutniveauet F, E, D og C er kompetencemål – mål for, hvilke matematiske kompetencer, der beherskes på hvilket niveau efter afsluttet undervisning. De 8 kompetencer spiller forskellige roller og har forskellig vægtning i matematik i erhvervsuddannelserne og på de fire niveauer. Kompetencerne indgår i undervisningen både som et mål i sig selv, og som et middel til at styrke andre kompetencer. Problemløsningskompetencen og modelleringskompetencen er helt centrale kompetencer, da de er afgørende i forhold til fagets anvendelse i andre faglige sammenhænge end faget selv. For at kunne anvende matematikken er det også helt centralt at kunne håndtere de tal, formler og symboler, som bruges i matematikkens beskrivelse af forhold i erhvervene og i hverdagen. Derfor er symbol- og formalismekompetencen også central. De øvrige kompetencer ikke uvigtige, men spiller i et vist omfang deres største rolle som en slags ”redskabskompetencer” til udvikling af de tre kompetencer, der er de centrale, når undervisningens primære formål er anvendelse af matematikken i andre sammenhænge.

De centrale kompetencer i matematik i erhvervsuddannelserne:

- **Problembehandlingskompetence** – at kunne formulere og løse matematiske problemer
- **Modelleringskompetence** – at kunne analysere virkeligheden, begrænse det område, man vil modellere, matematisere, løse det matematiske problem, validere resultatet og undersøge indenfor hvilke rammer, modellen gælder.
- **Symbol- og formalismekompetence** – at kunne afkode, oversætte og behandle symbolholdige udtryk. At kunne opstille ”virkelige” forhold som matematiske udtryk.

Øvrige kompetencer, der optræder som ”hjælpekompetencer” til at støtte op om de centrale kompetencer.

- **Repræsentationskompetence** - at kunne betjene sig af forskellige repræsentationer af samme matematiske begreb, kunne forbinde repræsentationerne og oversætte imellem dem samt at kunne afgøre hvilke styrker og svagheder en repræsentation har.
- **Tankegangskompetence** – at kunne udøve matematisk tankegang.
- **Kommunikationskompetence** - at kunne kommunikere i, med og om matematik, at kunne forstå og fortolke andres matematikholdige udsagn, at kunne udtrykke sig i et præcist matematisk sprog, at kunne formidle et matematisk emne i forhold til modtageren.
- **Hjælpemiddelkompetence** - at have kendskab til eksistens af og egenskaber ved forskellige redskaber, at have forståelse af redskabernes muligheder og begrænsninger samt at kunne betjene hjælpemidler og reflektere over resultatet
- **Ræsonnementskompetencen** — at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement (en kæde af argumenter), forstå hvad et bevis er og at kunne udtænke og gennemføre matematiske ræsonnementer.

Kompetencerne eksisterer naturligvis ikke opsplittet og uden overlap til en eller flere af de øvrige kompetencer. Undervisning i matematik i praksis beskæftiger sig typisk med flere af kompetencerne på en gang, læringen i den enkelte kompetencer foregår oftest i samspil med hinanden, og færdigheder i forhold til én kompetence kan være en forudsætning for udvikling af dele af en anden kompetence. Hvis en lærer ser på sin undervisning med kompetencebriller og forsøger at identificere, hvilke kompetencer, der har været i spil i et forløb, vil han typisk opleve, at der er tale om flere kompetencer i samme forløb. Ved at se på undervisningen ud fra en kompetence-synsvinkel, kan kompetencerne blive et redskab til bedre at styre, hvilken læring, der sker.

Ingen af kompetencerne kan således eksistere, uden at de andre – eller i det mindste de fleste andre - er tilstede. Når tre kompetencer er betonet og dem, der fylder mest i målene, er det på ingen måde udtryk for, at det er ”forbudt” at arbejde med og udvikle disse, men for, at det i særlig grad er de tre, der har bevågenheden og er genstand for undervisningen.

De enkelte kompetencer og deres progression igennem de fire niveauer er omtalt nærmere under afsnittet progression.

Indhold

Undervisningens indhold i betydningen pensum er beskrevet i overordnede rammer i fagbilaget, og det er for en stor del lærerens opgave at udvælge og præcisere det pensum, som gøres til genstand for den aktuelle undervisning. Indholdet har fortsat stor betydning også i undervisning, der er beskrevet med kompetencemål. Kompetencerne udvikles netop i samspil med de stofområder, som eleverne arbejder med, og tilegnelsen af disse er fortsat vigtig. Fagbeskrivelsen i grundfaget matematik dækker imidlertid undervisningen i matematik i mange og meget forskellige erhvervsuddannelser. Kompetencerne, som eleverne skal opnå på de fire niveauer, er de samme. Alle elever skal kunne identificere, løse, beskrive og kommunikere om matematikholdige problemstillinger fra deres erhvervsmæssige hverdag etc. Men hvilke problemstillinger, der arbejdes med at løse, vil være forskelligt fra uddannelsesområde til uddannelsesområde. Hvilke matematiske stofområder, det vil være interessant at arbejde med og bringe i anvendelse, vil ligeledes til en vis grad være forskelligt.

For at undervisningen i alle de uddannelsessammenhænge, faget indgår i på erhvervsuddannelserne, kan opfylde fagets formål, er det derfor nødvendigt, at udvælgelsen af netop det pensum og netop de praktiske anvendelsesområder, der giver mening i den aktuelle undervisning og uddannelse, sker lokalt - dog inden for de rammer, der er angivet i fagbilaget og evt. i vejledningen til den uddannelse, faget er en del af.

Beskrivelse af faget i den lokale undervisningsplan.

Som beskrevet i afsnittet om undervisningens indhold, skal den endelige udvælgelse af dette ske på skolen i forhold til den uddannelse, undervisningen er en del af. Det beskrives, hvilke valgfrie områder, der vælges, og det præciseres evt. hvilke delemner, der er arbejdet med indenfor de valgte områder. Derudover beskrives på niveau F og E det erhvervsfaglige emne og hvordan undervisningen deri hænger sammen med det matematiske indhold i undervisningen. På niveau D beskrives det valgfrie emne og på niveau C projektforsløbet. I forløb på niveau F, der afsluttes med en skriftlig prøve, angives evt. regler for det eksamensforberedende skriftlige arbejde (hvor mange opgaver, der skal afleveres etc.). Hvor faget indgår i tværfaglige projekter eller lignende, beskrives det, hvilke dele af faget, der indgår, og hvordan der arbejdes på at nå matematikfaglige mål i projektet.

Progression

Erhvervsuddannelsernes matematikundervisning har siden 1996 været beskrevet på niveauerne F, E, D og C og indgået i et omfattende meritssystem sammen med andre uddannelsesområder, der opererer på de samme niveauer. E- og C-niveauet deler erhvervsuddannelserne med andre uddannelsesområder, medens F- og D-niveauet er erhvervsuddannelsernes egne. F- og D-niveauet kan derfor betragtes som "halve" E- og C-niveauer. Niveau E og C skal således supplere hhv. niveau F og D til de meritgivende niveauer.

Målene for de fire niveauer er mål for, hvilke kompetencer, eleverne forventes at beherske i hvilket omfang. Et niveau bygger videre på et tidligere niveau og er en udvidelse af dette. Den faglige progression gennem de fire niveauer foregår i et samspil mellem kompetencerne og det indhold, der arbejdes med i undervisningen. Eksempler derpå ses i skemaet herunder.

	Tal og symbol-behandling	Funktioner	Geometri	Statistik	Erhvervsfagligt tema
Problem-løsnings-kompetence	Ender man hvor man startede, hvis man lægger et antal procent til et tal og derefter trækker det samme antal procent fra resultatet? Hvorfor/hvorfor ikke?	Hvor mange grafer kan man tegne som går gennem <ul style="list-style-type: none"> (0,0)? (0,0) og (1,0)? (0,0) og (0,1)? 	Hvor meget mere kan en malerbøtte indeholde hvis diameteren gøres dobbelt så stor?	Hvad skal der til for at gennemsnittet og medianen for en række tal er det samme?	Hvad sker der med spændingen, når strømstyrken øges i en leder med konstant modstand ?
Modellerings-kompetence	Hvor stor en procentdel af udgifterne til at mure en væg udgør materialeudgifterne?	Skitsér hvordan du forestiller dig omkostningerne ved at bygge et hus afhænger af husets størrelse.	Hvor meget jord er der cirka i en bunke som er 2 meter høj?	Hvad er et normalt ledningsforbrug når man står for elektriker-entreprisen på et husbyggeri?	Hvad koster en ny terrasse ?
Symbol- og formalisme-kompetence	Ofte finder man en salgspris ved at lægge et antal procent – lad os kalde det a – til produktionsprisen. Hvor mange procent af salgsprisen udgør fortjenesten?	Skriv regneforskriften for en funktion hvis graf går gennem punktet (1,1).	Hvor meget mere kan en malerbøtte indeholde hvis diameteren gøres dobbelt så stor?	Fire personer skal dele et overskud, men den ene skal kun have halvt så meget som de andre. Hvor stor en andel af overskuddet skal de have hver især?	Skriv en formel for, hvor meget jord, der skal køres væk en udgravning, der har form som en "kasse", når jorden udvider sig 30 % ved opgravningen.

Progressionen gennem niveauerne giver sig udslag i 3 former for tilvækst. Stigende beherskelse af kompetencen, højnelse af det matematisk tekniske niveau samt tilvækst i matematisk stofområde og praktisk anvendelsesområde, som eleven behersker.

Progression i kompetencer

Tilvæksten i beherskelse af kompetencerne er angivet i målene. Der er ikke systematiske beskrevet tilvækst for alle kompetencer på alle niveauer. I sådanne tilfælde forventes det ikke, at der arbejdes særskilt på at forbedre elevernes beherskelse af denne kompetence. Derimod kan man sagtens forestille sig, at kompetencen indgår i undervisningen som en følge af arbejdet med de øvrige kompetencer, eller at den bringes i spil på et niveau, som eleven behersker ved indgangen til niveauet.

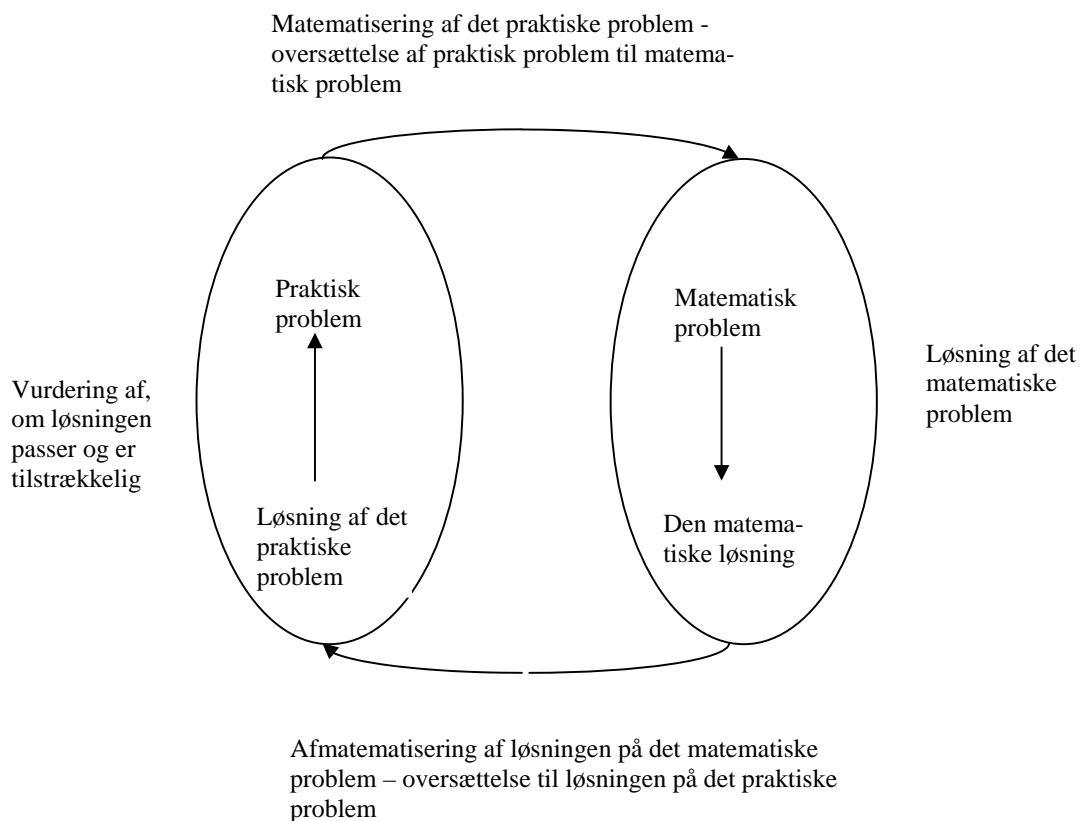
Problembehandlingskompetence

Progressionen i problembehandlingskompetencen går fra løsning af enkle problemer over løsning af mere sammensatte problemer, over opstilling og løsning af problemer til opstilling og løsning af problemkomplekser. Tilvæksten sker dels i sværhedsgraden af den matematik, eleven kan anvende til løsning af problemer, dels i kompleksiteten af problemet, og dels i en bevægelse fra, at eleven kan løse matematiske problemer til i stigende grad at kunne opstille og definere dem selv. På niveau F er forventningen således, at eleven kan løse problemer / opgaver, som er enkle – med en eller få mellemregninger, og at eleven kan genkende og løse kendte opgavetyper i andre sammenhænge. På niveau E arbejdes med problemer i lidt større sammenhæng – opgaver med flere mellemregninger eller med flere matematiske områder i samme beregninger. Ligeledes forventes det, at elever selv kan opstille matematiske problemer ud fra praktiske situationer. På niveau D og C forventes eleven udover at kunne løse et matematisk problem at kunne opstille og formulere det selv.

Modelleringskompetence

Progressionen i matematisk modellering hænger tæt sammen med progressionen i problemløsningskompetence. Kompetencen matematisk modellering fremgår ikke direkte af målene på niveau F, men er nævnt i de generelle bestemmelser vedr. rammerne for valg af indhold. Da matematikken på niveau F som på de andre niveauer er meget anvendelsespræget, giver det mening at arbejde med matematikken som model af den virkelighed, den skal anvendes på. Matematiseringsdelen af modelleringskompetencen – at oversætte et hverdagsproblem til et matematisk problem, løse det matematiske problem og oversætte den matematiske løsning til løsning på hverdagens problem er en vigtig og naturlig del af arbejdet på niveau F, ja det kan slet ikke undgås at arbejde dermed. Men modelleringskompetencen i hele sin udfoldelse med afgrænsning, problemløsning og validering af resultater hører til et højere niveau, ligesom alene matematiseringsdelen af den gøres til genstand for bedømmelse på niveau F.

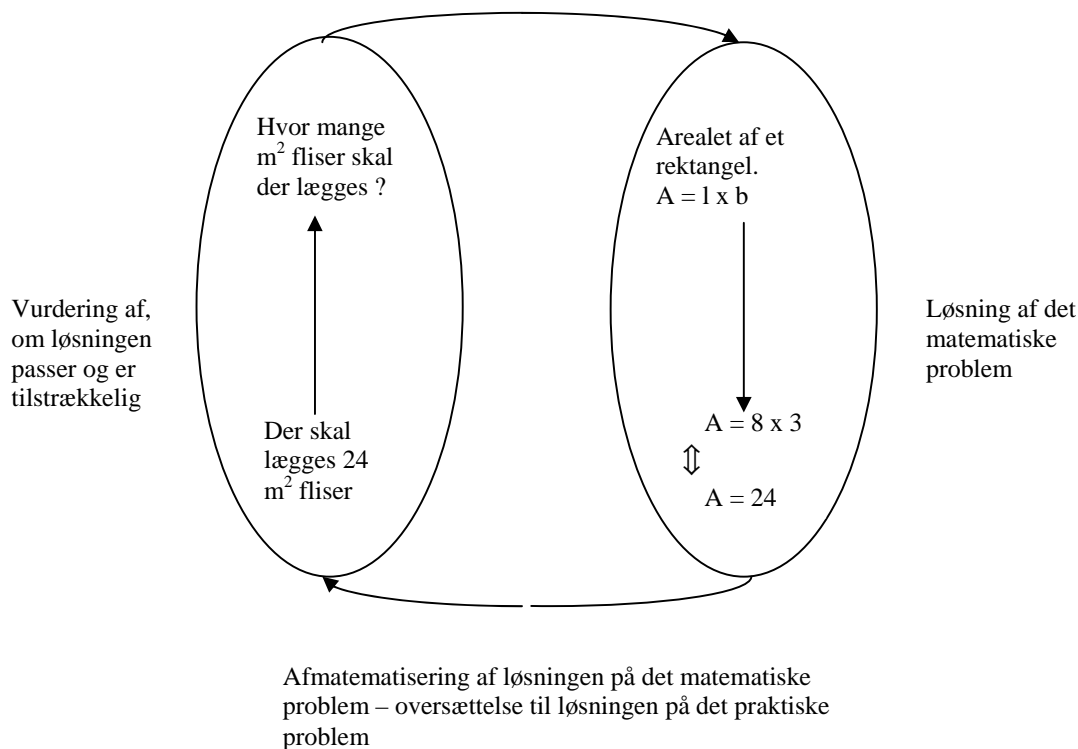
Det er vigtigt ikke at overse matematiseringsprocessen som genstand for undervisningen på alle niveauer. Processen er illustreret i figuren herunder.



Eksempel på matematisering ved løsning på et praktisk problem.

Hvor mange m^2 fliser skal der lægges på en rektangulær terrasse, der er 8 meter lang og 3 meter bred.

Matematisering af det praktiske problem - oversættelse af praktisk problem til matematisk problem



Hvis spørgsmålet er hvor mange fliser, der skal lægges i stedet for hvor mange m^2 fliser, skal der foretages matematisering mere, for at svaret er tilfredsstillende. Sværhedsgraden af en opgave afhænger således bl.a. af, hvor mange gange, der skal matematiseres.

Matematiseringsdelen af modelleringskompetencen (Matematikken som model) er fastsat i målene for niveau E og gøres dermed til genstand for bedømmelse, dog stadig på et niveau, hvor eleverne forventes at kunne definere og anvende en eller flere matematiske modeller til løsning af relativt enkle problemer fra deres hverdag, men uden stor vægt på afgrænsning og validering. På niveau D og C målsættes matematisk modellering som egentlig kompetence i følgeskab med, at det skriftlige arbejde skifter fra temaopgaver til projektopgaver. Her stilles i større grad krav til, at eleverne skal kunne afgrænse deres opgave og tage beslutninger om, hvilke forudsætninger, de vil foretage deres beregning ud fra.

Symbol- og formalismekompetence

Tilvæksten i denne kompetence består primært i formlers og symbolers abstraktionsgrad samt i den selvstændighed, eleverne skal kunne aktivere kompetencen med. På niveau F og E forventes det, at eleven primært regner med taludtryk og anvender symboler i konkrete sammenhænge, som f. eks. i formler eller i forskrifter til funktioner. Som udgangspunkt kan eleven anvende formler til indsættelse og beregning af den størrelse, formelen er udtryk for i sin grundform. Kun hvis der er arbejdet med løsning af ligninger, vil det kunne forventes, at formler kan anvendes til bereg-

ning af andre størrelser i formelen på niveau F, medens elever på niveau E i højere grad vil kunne forventes at kunne omforme formelen og anvende den til beregning af alle de størrelser, der indgår i den. På niveau D anvendes i stigende grad symboler, og eleverne forventes at kunne arbejde selvstændigt med emnet, f.eks. ved at kunne anvende ukendte formler og symboler. På niveau C forventes eleverne at kunne arbejde med rent abstrakte problemstillinger.

Tankegangskompetence

Det er svært at forestille sig, at der kan foregå undervisning i matematik, uden at der udøves matematisk tankegang. Kompetencen må derfor forventes at være i aktion nogenlunde løbende. Der er ikke lagt op til at nå særlige mål i denne kompetence eller gøre den til genstand for egentlige undervisningsforløb. Kompetencen er dog vigtig i den betydning, at eleverne skal kunne tænke matematisk om forhold i deres uddannelse eller hverdag, skal kunne få øje på, hvornår matematikken er et velegnet værktøj til løsning af en opgave eller et problem. Den første forudsætning for at kunne anvende matematik i andre faglige sammenhænge, er overhovedet at få øje på, hvor det vil være en god ide at tage matematikken i anvendelse.

Det kan lyde som en selvfølge for nogen, men det er ikke alle, der automatisk kommer i tanke om matematiske løsninger i situationer, hvor matematikken ikke pr. definition er på dagsordenen. Elever, der ikke synes, de har noget at bruge matematikken til, er eksempler på elever der ikke opdager matematikken i deres hverdag og erhverv – elever, der ikke i særlig høj grad udøver matematisk tankegang. Det kan derfor være frugtbart at inddrage ”matematisk tænkning om emner udenfor matematikken” i undervisningen, hvor det synes at kunne bidrage til forståelsen af fagets anvendelse, eller hvor mangelen på matematisk tankegang er en barriere for elever.

Tankegangskompetencen udvikler sig i form af en større forståelse af forskellen på ”at tænke matematisk ” og at tænke i hverdagstermer og i at kunne tænke matematik på et mere abstrakt plan. Tankegangskompetencen kan evt. øves ved at lade elever stille spørgsmål og opfinde ”opgaver” fra deres hverdag.

Repræsentationskompetence

På niveau F er repræsentationskompetencen særligt målsat i forhold til at eleven kan genkende matematikken i de repræsentationer, den har i virkeligheden. I de matematikholdige erhvervsuddannelser er eksemplerne herpå talrige. Formler for sammenhængen mellem modstand, strømstyrke og spænding. Nomogrammer for sammenhængen mellem omdrejningshastighed og skærehastighed i industriteknik-faget. Skemaer over blandingsforhold ved betonblanding. Rentetabeller i de merkantile uddannelser. Osv. osv.

På niveau F forventes elevens arbejde at være af typen ”hvordan ser dette praktiske problem ud i matematikprog” medens der på niveau E kan forventes en højere grad af forståelse for forskellige repræsentationer af et praktisk problem (tal- eller formeludtryk, skemaoversigt, grafisk beskrivelse etc.). På niveau D og C forventes eleven i højere grad at beherske veksling mellem forskellige matematiske fremstillingsformer og hverdagens sprog.

Kommunikationskompetence

På alle fire niveauer er der krav om såvel skriftlig som mundtlig kommunikation om den matematik, der er arbejdet med. Den skriftlige kommunikation forventes på niveau F og E primært at bestå af ”mellemregninger” evt. suppleret af enkle forklaringer, medens niveau D og C stiller krav til mere ”prosa” i form af overvejelser, forklaringer etc. Niveauforskellen afspejler sig i kravet til skriftlig dokumentation. På niveau F og E udarbejder eleverne temaopgaver, hvor vægten er på beregning af opgaver og opgavetyper om udvalgte temaer, og dokumentationen går ud på at demonstrere, hvordan beregningerne er fundet sted. På niveau D og C udarbejder eleverne en projektrapport, hvor afgrænsning af den problemstilling, projektet omhandler, overvejelser vedr. beregninger og deres resultat etc. vil kræve mere forklaring end de gennemførte udregninger.

Den mundtlige kommunikation vokser fra en forventning om, at eleverne på F-niveau kan forklare, hvordan de har foretaget en beregning, over forklaringer på sammenhængen mellem de praktiske problemer og de matematiske løsninger deraf til refleksion over forskellige matematiske fremstillinger og argumentation for valgte løsningsmetoder. Såvel den mundtlige som den skriftlige kommunikation må endvidere forventes at udvikle sig fra udbredt beskrivelse af matematikken i hverdagsprog til en stigende korrekthed i anvendelse af matematiske symboler og termer.

Hjælpemiddelkompetence

Fagbilagets mål beskriver ingen progression i hjælpemiddelkompetencen. På niveau D og C angives det i rammerne for valg af indhold, at der skal arbejdes med IT, men ikke, hvori dette arbejde skal bestå. Det betyder ikke, at der ikke skal være nogen progression, men at det overlades til læreren at vurdere, hvilke hjælpemidler, der er interessante i undervisningens aktuelle sammenhæng, og hvordan IT skal inddrages på niveau D og C. Hjælpemiddelkompetencen omfatter i princippet alle hjælpemidler fra lineal og blyant over regnemaskiner til IT-programmer som regneark, geometriprogrammer, grafprogrammer etc. Også måleudstyr og lign. som eksempelvis skydelære, nivelleringsapparat og teodolit kan betragtes som hjælpemidler.

Progression i hjælpemiddelkompetence kan gå fra enkle hjælpemidler til mere komplekse hjælpemidler, men progressionen kan også bestå i en mere og mere kompetent anvendelse af samme hjælpemidler. Et eksempel herpå kan være at anvende regneark på alle niveauer. På niveau F til at fremme elevernes forståelse af de algoritmer, der benyttes til enkle udregninger, på niveau E til mere sammensatte problemer med anvendelse af flere funktioner i regnearket, på niveau D og C til fremstilling af generelle modeller for løsning af matematiske problemer af en given type.

Ræsonnementskompetence

Denne kompetence indgår kun i målene på niveau C og forventes derfor ikke at gøres til genstand for en egentlig undervisning på niveau F-D. Det er svært at forestille sig nogen undervisning i matematik, uden at den indeholder en implicit træning i at ræsonnere i ordets mere almene betydning – i at tænke logisk og drage logiske slutninger. På denne måde vil kompetencen naturligvis også forekomme på niveauerne før C, men ræsonnement som egentlig matematisk kompetence, en forøvelse til det matematiske bevis, indføres først på niveau C.

For at give overblik over progressionen i kompetencerne, er de opstillet i et skema herunder. Tallene med fed og kursiv angiver henvisningen til eksempler efter skemaet.

Skematisk oversigt over progressionen i kompetencer.

De centrale kompetencer i undervisningen på EUD

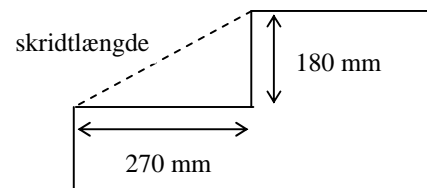
	Niveau F	Niveau E	Niveau D	Niveau C
Problemløsningskompetence (1)	Eleven kan løse enkle problemer.	Eleven kan løse sammenhængende problemer. Eleven kan opstille matematiske problemer ud fra praktiske situationer.	Definere, undersøge og løse et matematisk problemkompleks	Formulere, analysere og løse et matematisk problemkompleks selvstændigt
Modelleringskompetence (2)	Eleven kan matematisere og anvende matematisering til løsning af enkle opgaver.	Eleven kan matematisere og anvende matematisering til løsning af sammenhængende opgaver. Eleven kan anvende forskellige modeller af et problem.	Eleven kan matematisere, samt afgrænse åbne opgaver eller selv vælge forudsætninger for løsning af en opgave. Eleven kan vælge matematisk model til løsning af en opgave / et problem.	Eleven kan selv opstille et komplekst problem, afgrænse forudsætningerne for beregning og gennemføre matematiseringsprocessen. Eleven kan anvende forskellige modeller og gøre rede for valg af en model til et bestemt beregningsmæssigt formål.
Symbol- og formalismekompetence (3)	Eleven kan primært regne med taludtryk og anvende symboler i konkret sammenhæng som eks. i formler og forskrifter for enkle funktioner. Eleven kan anvende formler til indsættelse og beregning af den størrelse, formelen er udtryk for i sin grundform.	Eleven kan anvende symboler i formler og enkle regneudtryk, primært hvor symbolerne angiver konkrete størrelser. Eleven kan anvende enkle formler til beregning af alle de størrelser, der indgår i formelen.	Eleven kan arbejde med symboler og formler, der ikke er kendte. Eleven kan anvende symboler i regneudtryk.	Eleven kan arbejde med rent abstrakte problemstillinger.

(1) Eksempel på progression i problemløsningskompetence.

Niveau F

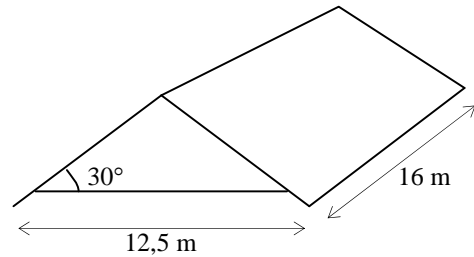
En trappe er bygget således, at grunden måler 270 mm og stigningen 180 mm.

Hvor stor er skridtlængden ?



Niveau E

Prisen uden moms for et tegltag er 470,00 kr. pr. m².
Beregn prisen med moms for et tag med mål som på tegningen.



Niveau D

Sammenhængen mellem spænding, strømstyrke og modstand fremgår af formelen

$U = R \cdot I$ Hvor U er spændingen, R er modstanden og I er strømstyrken.

Sammenhængen mellem effekt, spænding og strømstyrke fremgår af formelen

$P = U \cdot I$ Hvor P er effekten, U er spændingen og I er strømstyrken

Forklar den indbyrdes sammenhæng mellem effekt, strømstyrke, spænding og modstand (parvis – sammenhængen mellem effekt og strømstyrke, mellem effekt og modstand osv.). Hvilke er ligefrem proportionale, og hvilke er omvendt proportionale ?

Niveau C

Når en kondensator aflades, aftager spændingen eksponentielt med tiden. En kondensator, hvis begyndelsesspænding er 6 volt, aflades med en halveringstid på 3 millisekunder.

Kondensatoren anses for afladet, når dens spænding er under 1 millivolt.

Hvor lang tid tager det at aflade kondensatoren ?

(2) *Eksempel på progression i modelleringskompetence.*

Tema: Hvad koster det at have en mobiltelefon ?

Niveau F

Opgaven er delt op i delspørgsmål, hvor afgrænsningen og valget af forudsætningerne for beregningerne primært er foretaget af læreren, og eleven alene skal foretage matematiseringsdelen af modelleringen. Eleven får udleveret en prislister fra et bestemt telefonselskab og stilles en opgaverække, der kunne se ud som følger:

- Hvor meget koster det at tale i telefon ½ time dagligt i dagtimerne ?
- Hvor meget koster det at have mobilabonnementet, hvis man kun bruger det til SMS ?
- Ulla taler i telefon i gennemsnit 1 time om dagen. Hvor meget sparer hun, hvis hun kun ringer i den billige periode, sammenlignet med, at hun kun ringer er i den dyre periode ?
- osv.

Afgrænsningen og oplysningerne er givet af læreren. Elevens opgave er at matematisere og at løse de matematiske problemer, der giver svaret på den praktiske opgave.

Niveau E.

Eleven får udleveret samme prislister, men opgaverne bliver lidt mere åbne, eller der arbejdes med forskellige modeller. Opgavetyper som flg:

- Hvad koster det at tale i telefon ½ time dagligt ? (Eleven må selv gøre sig overvejelser over tidspunktet, samtalerne foregår).
- Lav en grafisk fremstilling, der viser, hvor meget abonnementet koster i forhold til den forbrugte taletid.
- osv.

Niveau D.

Opgaven formuleres, så der levnes plads til, at eleven selv skal afgrænse nogle forudsætninger for beregningerne, der tillige kan have en større kompleksitet. Oplægget kan hjælpe eleven lidt på vej i denne proces ved at give eksempler på overvejelser, der skal gøres.

Eleven arbejder udfra et antal prislister fra forskellige telefonselskaber. Vejledende spørgsmål kunne se ud som flg:

Sammenlign forskellige telefonselskabers abonnementer. Du kan tage udgangspunkt i forhold som

- Priser for samtaler
- Priser for SMS
- Forskellige priser på forskellige tidspunkter
- Forskellige rabatter (stort forbrug, familierabat, rabat for DUET-løsning etc.)
- Andre forhold.

Eller:

Sammenlign priserne for telefonselskab a, b og c. Hvilke typer abonnenter har mest glæde af det enkelte abonnement ? Dine anbefalinger skal være underbygget af beregninger.

Hvis læreren vil sikre, at det matematiske stof, der inddrages i projektet får et vist niveau, kan der stilles krav om grafiske fremstillinger, forskellige modeller til sammenligning af forskelle etc.

Niveau C.

Eleven forventes at kunne anvende matematisk modellering i alle faser og i forhold til komplekse opgavetyper. Opgaverne kan derfor være meget åbne og overlade stort set al afgrænsning til eleven. Opgaven kan være så åben som flg:

- Hvad koster det at have mobiltelefon ? Vælg forskellige fremstillingsformer, der belyser de svar, du finder frem til.

(3) *Eksempel på progression i symbol og formalismekompetence.*

Emne: Areal og rumfang.

Niveau F

En anlægsgartner skal anlægge en cirkelformet græsplæne. Plænen diameter er 24,5 meter.

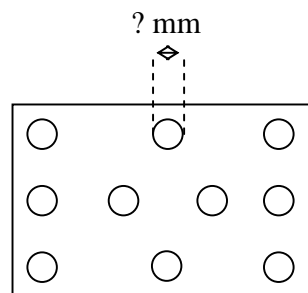
Hvor stor et areal skal sås til med græs ?

Niveau E

En betonbjælke skal armeres, så tværsnitsarealet af den samlede armering er 1130 mm^2 .

Der kan lægges 10 armeringsjern i bjælken.

Hvilken diameter skal armeringsjernene have, for at det samlede tværsnitsareal bliver 1130 mm^2 ?

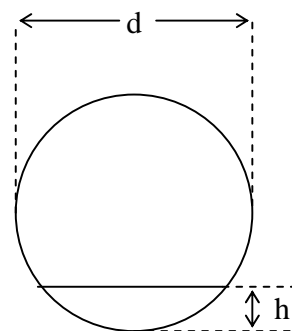


Niveau D

Oliestanden i en kugleformet tank måles med en målepind. Tankens indvendige diameter er 1,25 meter. Der måles, hvor tanken er dybest. På målepinden aflæses 0,30 meter. Hvor meget olie er der i tanken ?

Rumfang af kugleafsnit:

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot h^2 \cdot (3 \cdot d - 2 \cdot h)$$



Niveau C

Formlerne $A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ og $A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ er begge formler for arealet af en cirkelring.

Forklar, at de to formler udtrykker det samme.

Kompetencer, hvis primære rolle er at være ”redskabskompetence” i forhold til de centrale kompetencer.

	Niveau F	Niveau E	Niveau D	Niveau C
Tankegangskompetence	Tænke matematisk om erhvervsfaglige problemstillinger og genkende matematikken i sin erhvervsfaglige hverdag	Gøre rede for grundlæggende matematiske definitioner og begreber	Forstå og anvende matematiske begreber, tankegange og metoder	Ræsonnere om forhold af matematisk karakter
Repræsentationskompetence	Eleven kan genkende matematikken i de repræsentationer, den har i uddannelsen og hverdagen, og anvende en matematisk repræsentation deraf	Eleven kan forklare forskellige repræsentationer af matematiske problemstillinger, herunder repræsentationer i erhvervsfaglig sammenhæng	Eleven kan	Vekslende anvendelse af det matematiske symbolsprog og hverdagssproget. Vælge og gøre rede for anvendelse af forskellige repræsentationsformer for det samme matematiske stof.
Kommunikationskompetence	Kommunikere om problemløsning og den dertil anvendte matematik	Kommunikere om matematiske tankegange og matematikkens anvendelse i mundtlig og skriftlig form	Kommunikere om matematikken og dens anvendelse mundtligt og skriftligt ved løsning af matematiske og erhvervsfaglige problemer	Foretage skriftlig dokumentation samt udtrykke sig mundtligt og ræsonnere om forhold af matematisk karakter ved vekslende anvendelse af det matematiske symbolsprog og hverdagssproget.
Hjælpemiddelkompetence	Anvende relevante hjælpemidler	Anvende relevante hjælpemidler	Anvende relevante hjælpemidler, herunder IT	Anvende relevante hjælpemidler, herunder IT
Ræsonnementskompetence				Eleven kan ræsonnere om forhold af matematisk karakter

Progression i indhold

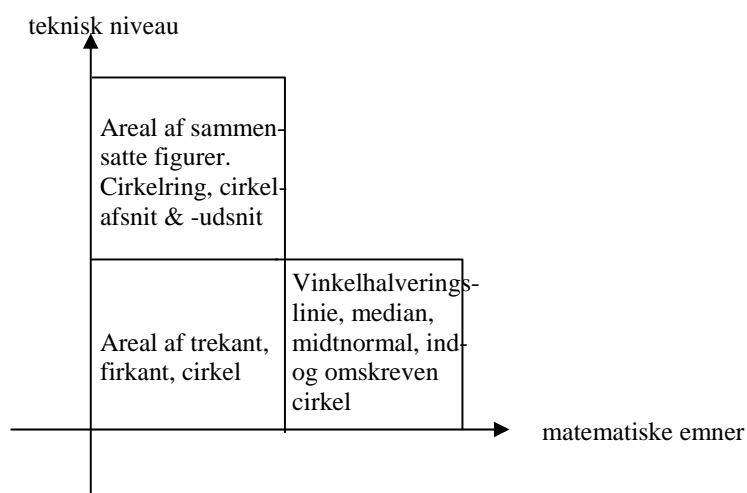
De matematiske stofområder er beskrevet i overordnede rammer, der skal fyldes ud lokalt. Fagbilaget beskriver rammerne for tilvæksten i stofområderne, men præciseringen af detaljerne foretages på skolen. Derudover skal der i vid udstrækning vælges mellem stofområderne i forhold til deres relevans i den aktuelle undervisning. Det faglige niveau og progressionen i indholdet afhænger således i udstrakt grad af den enkelte lærers valg.

På F-niveau skal der vælges mindst et af emnerne geometri, statistik og funktioner. Hvis eksempelvis skønnes, at geometri er det eneste af disse områder, der er relevant i forhold til den uddannelse, faget er en del af, vælges dette. Hvis de faglige beregninger i uddannelsen forudsætter arbejde med eksempelvis både geometri og funktioner, vælges begge områder. Der kan således arbejdes med større eller mindre mængde stof og flere eller færre anvendelsesområder samt variation i det tekniske niveau.

Eksempel

På niveau F omfatter emnet geometri blandt andet enkle plangeometriske figurer (cirkel, trekant og firkant). Det kan vælges at arbejde med omkreds og areal, eller det kan vælges at arbejde med linier og vinkler i forbindelse med cirkler, trekanter og firkanter (højde, vinkelhalveringslinie, median, ind- og omskrevet cirkel m.v.). Arealberegninger kan omfatte cirkel, trekant og firkant alene eller inddrage sammensatte figurer, cirkeludsnit, cirkelafsnit, cirkelring eller andet. Der er således mange muligheder for at justere på omfanget og det tekniske niveau i arbejdet med dette emne indenfor den ramme, der er fastsat i fagbilaget. Hvis det vælges at arbejde med to valgfrie emner, må hvert emne behandles mere "smalt" end hvis der kun vælges et emne, som der så er tid til at gå mere i dybden med. Samme forhold gælder indenfor det enkelte stofområde. Hvis det i det aktuelle eksempel vælges at arbejde med både areal og omkreds samt linier og vinkler, kan det være nødvendigt at begrænse areal og omkreds til enkle figurer. Hvis det vælges at dække dette emneområde ind alene ved arealberegninger, kan der blive plads til at arbejde med dette isolerede emne på et højere teknisk niveau.

Valget af indhold og samspillet mellem valg af teknisk niveau og omfang af matematisk niveau er illustreret i nedenstående figur.



Figuren illustrerer, at valget kan være meget indhold på et teknisk lavt niveau, eller lidt indhold på et teknisk højere niveau. Risikoen er, at man kommer til at vælge meget matematisk indhold på et teknisk højt niveau. Så vil der hurtigt opstå problemer med at ”nå pensum”. Hvis læreren i det aktuelle eksempel synes, at hele indholdet er vigtigt og på det høje niveau, kan det godt være realistisk, hvis der så ”slankes” et andet sted – eksempelvis ved kun at vælge ét af de valgfrie emner (niveau F).

Endelig kan man forestille sig, at der i arbejdet med det erhvervsfaglige emne er særlige områder af matematikken, som det vil være naturligt at udbygge. Hvis det erhvervsfaglige emne på niveau F eksempelvis er materialeopmåling og kalkulation, vil det være naturligt, at plangeometrien udbygges til også at omfatte rumgeometri i form af rumfang af prismer og cylindre. På niveau E i elektrikeruddannelsen kan det være naturligt at ”tyvstarte” på sinus- og cosinusfunktionerne. Hvis det erhvervsfaglige emne på niveau F i VVS-uddannelsen er udfoldning, vil det forudsætte, at der i et vist omfang arbejdes med overflade af rumlige figurer. Når trigonometrien anvendes til beregning af taghældning, forekommer det mange naturligt at introducere tangens sammen med sinus og cosinus. Hvis der arbejdes med nivellering og afsætning, herunder faldberegninger, giver det mening at arbejde med promille i tillæg til procent. Hvor arbejdet med erhvervsfaglige emner således medfører en uddybning af et matematisk stofområde i forhold til rammerne i fagbillet, må der vælges mere smalt i andre stofområder.

På niveau D skal undervisningen indeholde et valgfrit emne. Det kan være et erhvervsfagligt eller alment emne som på niveau F og E, men det kan også være et matematisk emne, som det giver mening at inddrage. Af tidsmæssige årsager kan det give mening at arbejde med det valgfrie emne hænger sammen med projektarbejdet og udarbejdelsen af projektrapporten.

Valget af indhold på niveauerne forventes at supplere hinanden. Hvis der f. eks. har været arbejdet med geometri på niveau F og emnerne geometri og funktioner vælges på niveau E, er tilvæksten ganske lille i geometri (enkle rumlige figurer), medens den store stofmæssige tilvækst består i det andet emne. Har der derimod været arbejdet med begge emner på niveau F, består den stofmæssige tilvækst i en uddybning af begge områder. Samme forhold gør sig gældende på niveau D og C.

Rammerne for indholdsudvælgelse og tilvæksten deri fremgår i oversigtsform af nedenstående skema.

Skematisk oversigt over progressionen i indhold.

Udvidelsen af indholdet på niveau E, D og C i forhold til forudgående niveau er understreget.

	Tal & symboler	Geometri	Statistik	Funktioner	Erhvervsfagligt emne
Niveau F	<ul style="list-style-type: none"> - Almindelige regneoperationer med tal, symboludtryk - Anvendelse af regnetekniske hjælpemidler - Procentregning - Brøkgregning, hvor det skønnes anvendeligt 	<ul style="list-style-type: none"> -Enkle plangeometriske figurer (cirkel, trekant og firkant) -Pythagoras læresætning -Sinus og cosinus i retvinklede trekanter 	<ul style="list-style-type: none"> - Fremstilling og fortolkning af statistiske beskrivelser - Præsentation af statistisk materiale i form af tabeller, diagrammer og grafer - Beregning af gennemsnit, median og kvartilsæt 	<ul style="list-style-type: none"> - Koordinatsystemet - Grafisk fremstilling - Ligeform og omvendt proportionalitet (funktioner, samt grafisk beskrivelse og løsning af ligninger). 	<p>Eksempelvis (Produktion og udvikling):</p> <ul style="list-style-type: none"> -Kalkulation -Udfoldning af simple legemer -Maskintekniske beregninger (skærehastighed m.m.) <p>BA</p> <ul style="list-style-type: none"> -Kalkulation af malerarbejde -Fundamentsarbejde -Murerarbejde -Belægningsarbejde -Beregning af simple spær
		Mindst ét af emnerne geometri, statistik og funktioner			
Niveau E		<ul style="list-style-type: none"> -Enkle plangeometriske figurer (cirkel, trekant og firkant) <u>-Enkle rumlige figurer (cylinder og prisme)</u> -Pythagoras' læresætning -Sinus, cosinus og <u>tangens</u> i retvinklede trekanter 	<ul style="list-style-type: none"> - Fremstilling og fortolkning af statistiske beskrivelser - Præsentation af statistisk materiale i form af tabeller, diagrammer og grafer - Beregning af gennemsnit, median og kvartilsæt <u>-Hyppigheds- og frekvensfunktioner</u> 	<ul style="list-style-type: none"> <u>- Funktionsbegrebet, herunder funktionsbegrebet som middel til at beskrive sammenhænge og forandringer</u> - Lineære funktioner og omvendt proportionalitet med tilhørende grafisk beskrivelse og løsning af ligninger 	<p>Eksempelvis (Produktion og udvikling):</p> <ul style="list-style-type: none"> Kalkulation af vægt og pris Udfoldning af kegle og pyramide Maskintekniske diagrammer Tårnkonstruktioner
		Mindst to af emnerne geometri, statistik og funktioner			
Niveau D	<ul style="list-style-type: none"> - Almindelige regneoperationer med tal, symboludtryk - <u>Brøkgregning</u> - <u>Procent, potens og rod</u> - Anvendelse af regnetekniske hjælpemidler, <u>herunder IT</u> 	<ul style="list-style-type: none"> -Enkle plangeometriske figurer (cirkel, trekant og firkant) <u>-Rumlige figurer</u> -Pythagoras' læresætning -Sinus, cosinus og tangens i retvinklede trekanter - Sinus og cosinusrelationerne 		<ul style="list-style-type: none"> - Koordinatsystemet - Funktionsbegrebet - Lineære funktioner med tilhørende grafisk beskrivelse - Løsning af ligninger af første grad - <u>Procentuel vækst</u> 	<p>Valgfrit emne</p> <p>Eksempelvis (Bygge og anlæg):</p> <ul style="list-style-type: none"> Beregninger på tagkonstruktioner Spærberegningsmodeller

Mindst ét af emnerne geometri og funktioner						
Niveau C						
Tal & talbehandling	Funktioner	Geometri	Trigonometri	Rentes- og annuitetsregning	Statistik og sandsynlighedsregning	Projektforløb
<ul style="list-style-type: none"> - Regneregler, herunder <u>parenteser og regningsarternes hierarki</u> - Regning med potenser og rødder - Brug af lommeregner og informationsteknologiske hjælpemidler 	<ul style="list-style-type: none"> - Koordinatsystemet, herunder <u>enkeltlogaritmisk koordinatsystem</u> - Lineære funktioner - <u>Andengradsfunktioner</u> - <u>Eksponentielle vækstfunktioner og logaritmefunktionen med grundtallet 10 samt tilhørende grafiske afbildninger</u> 	<ul style="list-style-type: none"> - Plangeometriske figurer (cirkel, firkant og trekant) samt <u>punkt, linier og vinkler</u> - Rumlige figurer, herunder rumfang og <u>overfladeareal</u> 	<ul style="list-style-type: none"> - <u>Enhedscirkelen og radianbegrebet</u> - Sinus, cosinus og <u>deres respektive grafer</u> - <u>Trigonometriske grundligninger</u> - Trigonometriske formler for retvinklede trekanter samt sinus- og cosinusrelationerne 	<ul style="list-style-type: none"> - <u>Rentesregning, herunder frem- og tilbageskrivning af en kapital, beregning af rentefod, antal terminer og gennemsnitlig procent</u> - <u>Annuitetsregning, herunder opsparings- og gældsannuitet, beregning af annuitetsydelse, rentefod og antal ydelser</u> - <u>Amortisationsplan</u> 	<ul style="list-style-type: none"> - Empiriske observationssæt, herunder grafiske beskrivelser og statistiske deskriptorer - <u>Sandsynlighedsfelt og stokastisk eksperiment</u> - <u>Diskret stokastisk variabel, sandsynlighedsfunktion, middelværdi, varians og standardafvigelse</u> - <u>Binomialfordeling</u> - <u>Normalfordeling, herunder normalfordelingspapir. Grafisk beskrivelse af observationssæt, herunder frekvensfunktioner og sumfunktioner</u> - <u>Middeltal og fraktiler</u> 	
<p>Mindst tre af emnerne funktioner, geometri, trigonometri, rentes- og annuitetsregning samt statistik og sandsynlighedsregning</p>						

Tilrettelæggelse af undervisningen

Tilrettelæggelsen af undervisningen er naturligvis i hovedtræk lærerens opgave. Det råderum, læreren kan agere indenfor, er dog til dels fastsat af skolens fysiske rammer, af vedtagne samarbejdsrelationer m.m. Dertil kommer, at undervisningens tilrettelæggelse har stor indflydelse på den læring, der sker. Det er vigtigt, at undervisningen tilrettelægges så arbejdet understøtter udviklingen af de kompetencer, der er fastsat i målene. Overvejelserne i dette afsnit handler således ikke om at fratage læreren hans metodefrihed, men om at pege på konsekvenser, som tilrettelæggelsen af undervisningen kan have, samt inspirere i forhold til den enkelte lærers valg.

Når undervisning planlægges, så udviklingen af matematiske kompetencer kommer i fokus, kan læreren let drukne i mængden af kompetencer og kompleksiteten mellem dem. Det kan være vanskeligt at afgøre, hvor grænsen mellem kompetencerne er, og man kan let få så mange kompetencer i spil, at man mister overblikket.

Eksempel:

En elev skal regne ud, hvad det koster at male en væg. Denne opgave kan være ganske enkel, men den kan aktivere alle kompetencer. Tankegangskompetencen er aktiveret ved, at eleven skal tænke matematisk om et malerfagligt spørgsmål. Symbol- og formalismekompetencen ved, at eleven skal kunne håndtere formelen for arealet af væggen etc. Repræsentationskompetencen ved, at eleven skal kunne genkende den repræsentation, som matematikken har i f. eks. prislister, tabeller med materialeoversigter etc. Problemløsningskompetencen ved, at eleven skal løse matematiske problemer som arealet af en firkant (hvis væggen er firkantet), tillæg af 25 % til et tal (moms) osv. Modelleringskompetencen aktiveres, hvis eleven selv skal overveje, om der skal regnes med hele bølter, pakker m.m. eller med præcise mængder, om der skal medregnes maler-tape, om der skal regnes med et tillæg for slid på pensler, hvis der regnes med arbejds løn, om det er svendeløn eller lærlingeløn, hvor lang tid, arbejdet kommer til at tage etc. Kommunikationskompetencen aktiveres ved at eleven skal gøre rede for sine beregninger – skrive dem ned eller forklare dem mundtligt. Hjælpemiddelkompetencen ved, at eleven anvender lommeregner – eller regneark – til at foretage beregningerne, eller hvis priser skal findes på internettet. Ræsonnementskompetencen kan aktiveres, hvis eleven skal forklare, hvorfor han har fået en anden pris end kammeraten, der har regnet med en anden arbejdstid eller lignende.

Det kan være vigtigt ikke at lade sig overvælde eller at forestille sig, at man så skal indrette sin undervisning, så den udvikler alle kompetencer, eller stiller krav til sig selv om, at undervisningen skal tilrettelægges, så den isolerer én kompetence, der så udvikles. Hvis ønsket er at udvikle eksempelvis problemløsningskompetencen, er det nødvendigt at begrænse fokus til dette formål og tilrettelægge undervisningen, så den støtter udviklingen af denne kompetence, vel vidende, at der følger mere med. Men målet for det lille forløb er den kompetence, det er sigtet at udvikle, og evalueringen af, om eleven har lært det, hun skulle, er alene den kompetence, der var sat i centrum.

Hvis målet er at udvikle modelleringskompetencen, må opgaven tilrettelægges, så der er afgrænsninger, eleven selv skal foretage. Hvis målet er at udvikle problemløsningskompetencen, kan læreren have foretaget alle afgrænsninger, så det mere er selve de matematiske problemer, eleven skal koncentrere sig om. Hvis målet er at udvikle hjælpemiddelkompetencen, kan opgaven have fokus på at opstille et regneark, der kan foretage den slags beregninger. Det giver forskellig fokus i undervisningen og forskellig udformning af opgaven. Hvis målet bliver at forsøge at udvikle alle kompetencer og samtidig lære eleven det matematiske indhold, der skal til at løse opgaven, bliver opgaven hurtigt helt uoverskuelig og kompetenceredskabet uanvendeligt.

Det erhvervsfaglige aspekt har en meget central rolle i undervisningen på niveauer, der indgår som obligatorisk del af en uddannelse. Der skal vælges et erhvervsfagligt tema fra de anvendelsesområder, faget har i den uddannelse, det er en del af. Det er vigtigt, at der i videst mulig udstrækning er tale om egentlige erhvervsrettede anvendelsesområder, altså beregninger, der bliver brugt i det pågældende erhverv eller erhvervsområde, således at matematikundervisningen bidrager til elevens erhvervs kvalificering ved at eleven lærer de beregninger, det er vigtigt at kunne i det pågældende erhverv.

Det er vigtigt for udviklingen af de centrale matematiske kompetencer, at der er tæt sammenhæng mellem indlæringen af det matematiske stof og dets anvendelse. Der er efterhånden stor erfaring for, at en opsplittning af undervisningen i beherskelse af det matematiske indhold og matematikkens anvendelse medfører dårlig læring. Denne undervisningspraksis har udspring i en opfattelse af, at de rent matematiske færdigheder skal være på plads, før faget kan bringes ind i andre sammenhænge og anvendes. Forskning i læring i matematik viser imidlertid, at matematikfærdigheder går fra det konkrete til det abstrakte. For eleven opleves rent matematiske færdigheder ofte abstrakte, medens matematikken bliver mere konkret ved anvendelse af praktiske eksempler. Tages eksemplerne fra elevens hverdag, giver de ofte mening. På denne måde kan den praktiske anvendelse blive et redskab for matematiklæringen på samme måde som matematikken er et redskab for andre fag.

Forløb, hvor et helt niveau er delt op i to delforløb, hvor første halvdel består i kurser i de matematiske discipliner, og anden halvdel i anvendelse i forhold til praktikprojekter eller lignende, har vist, at kun meget lidt af den læring, der er foregået i kursusundervisningen, tages med over i projektforløbene. Særligt ugunstige for læringen synes forløb, hvor faget er delt op mellem to lærere, således at matematiklæreren har halvdelen af tiden til færdighedsindlæring, og resten af faget er mere eller mindre bortintegreret i praksisprojekter, som område / specialefaglæreren varetager. Ingen af de to opsplittede forløb vil have på dagsordenen at bygge bro mellem de to discipliner færdighed og anvendelse. En forudsætning for, at eleven lærer at anvende sin matematik, er i sådanne forløb, at læringen af matematiseringsprocessen sker automatisk uden at være genstand for undervisning. Det må formodes at ske for nogle elever i et vist omfang – eller eleverne har denne kompetence med sig fra tidligere undervisning. Men hvis beherskelse af matematiseringsprocessen – og med den gode færdigheder i anvendelse af matematikken, skal dyrkes, må den gøres til genstand for undervisningen.

Forløb, hvor matematikkens anvendelse er indarbejdet i praksisprojekter, som udføres på værkstedet, men hvor arbejdet foregår som en del af matematikundervisningen i vekselvirkning med stofindlæringen, synes til gengæld at give særdeles god grobund for udvikling af de anvendelsesorienterede matematikkompetencer. Netop den stadige vekselvirkning mellem færdighed og anvendelse sætter vedvarende fokus på matematiseringsprocessen og på udviklingen af modelleringskompetencen og problemløsningskompetencen, der er centrale for anvendelsessiden af matematikundervisningen.

På niveauer, der optræder som valgfri undervisning i elevens uddannelse, er matematikkens anvendelse fortsat central, men anvendelsesområdet kan vælges mere frit. For nogle elever vil det også på valgfrie niveauer være naturligt at beskæftige sig med temaer fra eget erhverv. Et eksempel herpå kan være elever i uddannelser, hvor det obligatoriske niveau er F eller E, men hvor eleven har merit for det obligatoriske niveau og i stedet vælger at gennemføre faget på niveau D. De faglige beregninger, som eleven skal arbejde med på trods af sin merit, kan således indarbejdes i indholdet på niveau D så eleven slår ”to fluer med et smæk” Dels lærer han de særlige anvendelsesområder, der er typiske for hans uddannelse, dels opnår han et højere niveau i matematik. For andre elever, der har valgt faget af ren interesse, og ikke kan finde yderligere erhvervskvalificering at opnå gennem arbejdet i matematik, kan anvendelsesområderne vælges efter interesse. Endelig kan elever, der vælger faget af hensyn til studieforberedelse, have interesse i at hente anvendelsesområder fra den uddannelse, de er i gang med at kvalificere sig til – i det omfang det kan lade sig gøre uden den faglige indsigt, der først kommer, når studiet er påbegyndt.

På niveau F og E kan det ofte være naturligt at vælge to erhvervsfaglige temaer (eller et erhvervsfagligt og et alment) temaer – et til hver temaopgave, eleverne skal udarbejde. På niveau F særligt i forløb, der afsluttes med mundtlig eksamen. Med henblik på at sikre en tæt sammenhæng mellem det matematiske stof og det erhvervsfaglige emne, kan det være en god ide at arbejde med det erhvervsfaglige tema sideløbende med de matematiske indholdsområder i stedet for at gemme disse emner til sidst. Det kan være naturligt at ”pakke” et anvendelsesområde og de matematiske emner, det bringer i aktion i forløb der veksler mellem kurser / repetition i det matematiske indhold. Udover den effekt en sådan organisering vil have på udviklingen af de anvendelsesorienterede kompetencer, kan den give en øget motivation hos eleverne, da den udstiller fagets relevans i forhold til uddannelsen. Endelig kan det give bedre tidsmæssigt rum, hvis arbejdet med de erhvervsfaglige temaer og temaopgaverne er en del af den løbende undervisning.

Eksempler på sådanne ”pakker” af anvendelsesområder med tilhørende matematisk indhold er givet herunder. Eksemplerne på niveau F og E afspejler en opdeling af de matematiske fagområder, læreren har valgt, så de to temaforløb, der munder ud i to temaopgaver, tilsammen dækker fagets indhold.

Eksempler på tematisering af indholdet i undervisningen på niveau F og E og D.

Bygge & anlæg niveau F (eks. murer, struktør)

Erhvervsfagligt tema	Matematiske emner
Materialeopmåling og kalkulation / tilbud	Tal og symbolbehandling Mål og målestoksforhold Geometri (areal og rumfang) Procentregning Regneark
Nivellering og afsætning	Tal- og symbolbehandling Procent og promilleregning Pythagoras Sinus og cosinus i retvinklede trekanter Brøker i sammenhæng med angivelse af fald

Produktion og udvikling (niveau E)

Erhvervsfagligt tema	Matematiske emner
Udfoldning Cylinder Kegle Keglestub	Tal og symbolbehandling Målestok Areal Trigonometri retvinklet trekant

Pyramide	Rumfang Massefylde Kalkulation Procentberegning (moms – spild) Eventuel regnearksmodeller
Maskintekniske beregninger Skærehastighed Omdrejningstal som funktion af diame- ter ved givne skærehastigheder	Tal & symbolbehandling Koordinatsystem Førstegradsfunktioner Grafisk afbildning Evt. grafer i regneark

Strøm, styring og it niveau D

Erhvervsfagligt tema	Matematiske emner
Filterkonstruktion (RC-led) Kunne også hedde: Bekæmpelse af støj i elek- troniske kredsløb.	Tal og symbolbehandling Logaritmer (10-tals) Trigonometri (retvinklet) Pythagoras Koordinatsystemet Vektordiagrammer (geometri) Regneark
Logikstyret powersupply Kunne også hedde: Sikkerhed i elektroniske systemer.	Tal og symbolbehandling Procent og promilleregning Boolsk algebra Talsystemer Ligninger med en ubekendt Elementære brøker Grafisk afbildning Regneark

I forløb på niveau F, der afsluttes med en skriftlig eksamen, skal eleven kun udarbejde én temaopgave, der ikke gøres til genstand for en eksamination. Anvendelsen af matematikken og træningen af selve matematiseringsprocessen er lige så central i undervisningen, men prøves ved et antal anvendelsesorienterede opgaver i den skriftlige prøve.

Dokumentation

Det centrale krav til skriftlig dokumentation består i udarbejdelse af temaopgaver på niveau F og E og projektrapporter på niveau D og C. Eleven udarbejder to temaopgaver på niveau F i forløb, der afsluttes med mundtlig eksamen, samt på niveau E. I forløb på niveau F, som afsluttes med skriftlig eksamen, udarbejdes én temaopgave, og der arbejdes med opgaver, der forbereder eleverne til den skriftlige eksamen. Hvordan dette arbejde foregår, hvor meget skriftligt materiale og på hvilken form, eleverne skal aflevere, er lærerens afgørelse.

På niveau D og C udarbejder eleven en projektrapport over et emne fra deres uddannelse eller et alment emne.

Progressionen fra temaopgave til projektopgave hænger nøje sammen med progressionen i de centrale kompetencer. Hvor undervisningen på niveau F og E har fokus problemløsning og matematisering, har undervisningen på niveau D og C fokus på alle dele af matematisk modellering herunder opstilling og afgrænsning af et problem. Forventningen til eleverne på niveau F og E er således, at de primært kan løse opgaver – i denne sammenhæng tematiserede i forhold til fagets anvendelse i elevens uddannelse, medens forventningen på niveau D og C er, at de også selv kan opstille og afgrænse dem, hvilket giver sig udtryk i et projekt med selvstændig problemformulering.

Dertil kommer naturligvis den progression, der ligger i det matematiske indhold, der bringes til anvendelse i opgaverne.

Udover temaopgaver / projekter /eksamensforberedende opgaver, der er den dokumentation, der er et krav som grundlag for eksamen, vil eleverne naturligt arbejde med opgaveløsning i forbindelse med undervisningen i almindelighed. Læreren beslutter, hvordan dette arbejde foregår, om opgaver rettes på klassen, af eleven selv, i forbindelse med mundtlige fremlæggelser, eller om han ønsker yderligere opgaveaflevering.

Temaopgave

Temaopgaven og den mundtlige fremlæggelse deraf har primært til hensigt at evaluere, hvor kompetent eleven er til at matematisere og til at løse matematiske problemer. En temaopgave stiller først og fremmest krav til, at eleverne kan løse opgaver, at de kan matematisere praktiske problemer og løse de matematiske problemer, der kommer ud af matematiseringen. Som ordet siger, er en temaopgave en opgave eller en opgaverække over et bestemt tema, hvor læreren – i hvert fald i store træk – har defineret opgaven eller opgaverne og foretaget den strukturering, der er nødvendig, for at eleven kan overskue arbejdet. Niveauforskellen mellem temaopgaver på niveau F og E vil således bl.a. give sig udtryk i kompleksiteten i opgaverne. Temaopgaver på niveau F må være struktureret, så den elev, der kun overskuer enkle regneoperationer, kan arbejde sig igennem den, medens temaopgaver på niveau E kan stille krav om, at eleven kan overskue mere sammensatte opgaver. Dertil kommer naturligvis, at den matematiske stofmængde, der kan inddrages i opgaverne, er større på niveau E end på niveau F.

På niveau F i forløb, der afsluttes med mundtlig eksamen, og på niveau E skal temaopgaverne tilsammen dække det indhold, der er arbejdet med i undervisningen bredt set. Dette krav kan godt opfyldes, selv om der er enkelte detaljer fra undervisningen, der ikke indgår eksplicit i en af temaopgaverne, men disse skal tilsammen omfatte de hovedområder, som eleverne har arbejdet

med, og åbne mulighed for, at der kan spørges ind til stort set hele pensum til den mundtlige prøve – i praksis den halvdel af undervisningens indhold, der er taget i anvendelse i den temaopgave, eleven trækker.

Eksempel:

En temaopgave, der omfatter beregninger vedr. enkle plangeometriske figurer, kan ikke på naturlig vis komme til at rumme plangeometriske beregninger af trekant, men rummer beregninger på firkant og cirkel. I stedet for at opfinde unaturlige beregninger på trekanten, der ikke vil give mening i sammenhængen, kan læreren vælge, at emnet er dækket ind uden, og forberede eleverne på, at der kan blive spurgt ind også til trekanten i forbindelse med den del af deres temaopgave, som omhandler plangeometriske figurer. Derimod kan man ikke forestille sig, at hele emnet ikke er behandlet i en af de to temaopgaver, hvis emnet geometri er valgt.

Temaopgaverne kan dække emnerne i undervisningen opdelt eller på tværs. I eksemplet fra Bygge og anlæg i skemaet tidligere i kapitlet er den del af geometrien, der omhandler plangeometriske figurer placeret i ét temaforløb, medens Pythagoras' læresætning samt sinus og cosinus i retvinklede trekanter er placeret i et andet. På samme måde er emnet tal- og symbolbehandling fordelt på de to temaforløb. Hvordan det matematiske indhold i undervisningen "fordeles" på de to temaopgaver eller vælges til den ene temaopgave på niveau F med skriftlig eksamen er således lærerens afgørelse.

Skolen beslutter, om opgaverne skal udarbejdes på PC, eller om de må afleveres i håndskrift. Der kan siges både for og imod krav derom. At anvende PC er en kærkommen lejlighed til at anvende IT i undervisningen og til at initiere brug af dette medie i faget. Mange elever er desuden fortrolige med IT og har glæde af de muligheder, det giver. Endelig præsenterer opgaver, der er udarbejdet på PC sig ofte bedre end håndskrevne opgaver, det er nærliggende at lave flotte forsider, og der kan forbedres løbende på layoutet, i det omfang tiden tillader det. Det vægtigste argument for anvendelse af PC er, at arbejdet med temaopgaven kan gøres til en skriveproces, idet der kan ændres og rettes i den løbende, medens der ofte skal mange eller alvorlige fejl til, før eleven orker at ændre i en håndskrevet temaopgave.

Dog er der elever, for hvem det at skrive på en PC er så tidskrævende en opgave, at det vil være en hæmsko for udarbejdelsen af en fornuftig temaopgave, at den skal foregå elektronisk. I sådanne tilfælde kan det give mening at lade eleverne aflevere håndskrevne temaopgaver, så de kan koncentrere sig om det matematiske indhold.

Mange elever vil sikkert ønske at få at vide, hvor mange sider en temaopgave skal fylde. Det er svært at give et nøjagtigt krav til omfanget af en sådan opgave, da sideantallet ikke af sig selv giver garanti for kvaliteten, og der vil være forskel på, hvor meget det samme indhold fylder i håndskrift eller på PC. Elever, der skriver mange forklaringer, vil typisk have længere opgaver, end elever, der mere baserer deres opgave på udregninger og mellemregninger. Opgaver, der indeholder grafiske fremstillinger, vil ligeledes blive mere fyldige. Et omfang på 3 – 5 sider vil dog være en passende gennemsnitlig rettesnor.

Projekt

Projektet og den mundtlige fremlæggelse deraf har til hensigt at evaluere, hvor kompetent eleven er til at gennemføre matematisk modellering, herunder opstille spørgsmål af praktisk karakter, afgrænse den del af spørgsmålet, der kan belyses ved beregninger, løse de matematiske proble-

mer, der er forbundet dermed, samt anvende såvel matematisk sprog som hverdagsprog derom. Et projekt er kendetegnet ved at indeholde problemformulering, analyse og konklusion. Kravet om, at eleven selv skal opstille og afgrænse problemet er centralt for, at der er tale om et projekt og ikke en opgave.

Læreren udarbejder et projektoplæg, som afstikker de rammer for projektet, der findes hensigtsmæssigt. Hvis projektet på niveau D tager udgangspunkt i et erhvervsfagligt tema, kan der gives anvisninger på, hvordan der kan arbejdes med temaet. Der kan stilles en række forslag til indgangsvinkler, som eleverne kan arbejde efter. Der kan stilles rammer op for indholdspunkter, omfang m.v.

Projektoplægget har fire hovedformål.

- At hjælpe og inspirere til valg af indhold. Rammerne for valg af indhold beskrives i oplægget. Der kan være tale om egentlige krav til indholdet, eller der kan være tale om punkter til inspiration, som kan være igangsætter for elevens indholdsvalg. Der kan også være tale om egentlige spørgsmål (se opgaven ”mobiltelefon” i eksemplet om progression i matematisk modellering), som hjælper eleven på vej, men overlader til ham selv at opstille og afgrænse den egentlige problemformulering.
- At hjælpe eleven med at overskue projekt-processen. Særligt elever, der skriver deres første projektrapport, kan have behov for hjælp til at overskue det komplekse arbejde, det er at udarbejde en projektrapport.
- At opstille praktiske rammer for projektarbejdet (lærerens krav til rapporten – krav til indholdspunkter, omfang, om hele rapporten skal udarbejdes på PC, eller om dele af den må afleveres i håndskrift etc., afleveringsfrister etc.)
- At sikre det ønskede matematiske niveau. Det kan som hovedregel ikke forventes, at eleverne kan lære ny matematik i projektfasen, da selve det at anvende matematikken i projektsammenhæng udgør en omfattende læring. Derimod kan der være ønske om, at særlige områder af matematikken inddrages (eks. krav til grafiske fremstillinger, krav til forskellige fremstillinger af samme problem etc.).

Evaluering

Løbende evaluering

Den løbende evaluering har primært til hensigt at sikre, at elevens læring holdes i gang. Der er ikke fastsat centrale krav om, hvordan denne evaluering skal findes sted. Jo mere den foregår i dialog med eleven, desto mere kan den støtte op om, at læringen bliver elevens dagsorden lige så meget som lærerens.

Eksamen

Eleven kan gå til eksamen, når undervisningen er gennemført, og når temaopgave / projektrapport er afleveret og godkendt af læreren. Godkendelsen giver ingen garanti for karakteren til eksamen, men er en godkendelse af, at den skriftlige dokumentation har tilstrækkelig kvalitet til at danne udgangspunkt for den mundtlige eksamination. Læreren sætter kriterierne derfor i dialog med eleven. Dokumentationen indgår i den samlede bedømmelse ved den mundtlige prøve. Det er i

elevens såvel som lærerens interesse, at eksamen ikke foregår på baggrund af dokumentation, der har så ringe kvalitet, at den levner eleven dårlige muligheder for at gennemføre eksamen med tilfredsstillende resultat. På den anden side kan der være elever, der har vanskeligt ved at udarbejde skriftlig dokumentation, men som på et eller andet tidspunkt efter tilpas mange anstrengelser skal have adgang til at gennemføre eksamen. Læreren må således ud fra sit kendskab til elevens formået fastsætte kravet til, hvornår en opgave kan godkendes.

Mundtlig eksamen

På niveau F og E består mundtlig den mundtlige prøve af eksamination i den ene af de to temaopgaver, som eleven har udarbejdet. Hvilken af de to temaopgaver, der gøres til genstand for eksaminationen, afgøres ved lodtrækning. Eksamenstiden inkl. votering er 30 minutter. Der er ikke forberedelsestid, da eleven kender det materiale, eksamen tager udgangspunkt i. Udover elevens fremlæggelse af temaopgaven spørges der ind til beregningerne på en måde, der giver eleven mulighed for at demonstrere det niveau, han behersker kompetencerne på. Fremlæggelsen og enkelte spørgsmål kan vise, om han kan gøre rede for beregningerne i opgaven. Hvis han skal have mulighed for at demonstrere, at hans evne til at matematisere ligger ud over reproduktion af de beregninger, der allerede er foretaget i opgaven, og at han kan anvende den matematik, der er i aktion i andre kendte situationer eller i ukendte situationer, må der spørges dertil. En eksamination, der alene består i, at eleven gentager temaopgavens beregninger på tavlen, vil ikke give eleven mulighed for at demonstrere generel beherskelse af kompetencerne eller selvstændighed i anvendelse af det matematiske indhold.

På niveau D og C består prøven i en eksamination dels i projektrapporten, dels i et lodtrukket mundtligt spørgsmål. Det matematiske indhold på niveau D kan ikke forventes at dække indholdet i undervisningen bredt. Formålet med det lodtrukne spørgsmål er derfor at sikre validiteten af prøven, og at alle områder af indholdet har samme vægt i undervisningen. Projektrapporten og eksaminationen deri skal evaluere, hvor kompetent eleven er til modellering og problemløsningskompetence samt til anvendelse af såvel matematisk symbolsprog som hverdagens sprog i forhold til den problemformulering, der arbejdes med. Ligeledes evalueres elevens beherskelse af det matematiske indhold i undervisningen.

For at undgå, at de to dele af eksamen bliver en gentagelse af hinanden, kan det give mening at dele op, hvad der særligt spørges efter i henholdsvis rapporten og det lodtrukne spørgsmål. Projektrapporten er bedst egnet til at vurdere modelleringskompetence, hvilket kan give sig udslag i, at der spørges særligt ind til afgrænsning af opgaven, matematiseringsprocessen og til en vurdering af resultatets sikkerhed og gyldighed i denne udover den fremlægning, som eleven selv vælger. Her som ved eksaminationen i temaopgaverne er det vigtigt, at eleven får mulighed for at demonstrere, om han behersker kompetencerne på et niveau, hvor han kan forklare de beregninger og de overvejelser, der er foretaget i den forelagte projektrapport, om han behersker kompetence og matematisk indhold også i andre kendte situationer, eller om han behersker faget selvstændigt og i nye situationer. Det lodtrukne spørgsmål kan så evt. vælges til i højere grad at evaluere elevens problemløsningskompetence og symbol- og formalismekompetence. Der kan dog sagtens være anvendelsesaspekter også i det lodtrukne spørgsmål, og det er ikke nødvendigvis en god ide at opdele kompetence-evalueringen så skarpt, at eleven oplever projektevalueringen som ”en snak om alt det i projektet, der ikke var matematik” og det lodtrukne spørgsmål som et rent matematikøvelse.

Skriftlig eksamen

Skolen kan vælge skriftlig eksamen på niveau F i forløb, hvor faget ikke skal foregå i samarbejde med andre fag. Den skriftlige eksamen skal i princippet evaluere det samme som den mundtlige på niveau F, nemlig hvor kompetent eleven er til at matematisere og løse matematiske problemstillinger ved løsning af opgaver / enkle problemer primært fra uddannelsesområdet. Det er derfor et krav til opgavesættet, at det indeholder en række autentiske opgaver fra elevens uddannelsesområde, som skal løses ved hjælp af matematisering og problemløsning. Det er vigtigt for kvaliteten af prøven, at der er tale om realistiske opgaver eller dele af realistiske opgaver, og ikke ”iklædte” opgaver, som ”hedder noget med” tømrer, smed eller elektriker, men som i virkeligheden er færdighedsopgaver.

Ved den skriftlige prøve sendes eksamensopgaverne i til censor i så god tid, at censor og lærer kan nå at drøfte opgaverne inden eksamen. Ved mundtlige prøver sendes elevernes temaopgaver eller projektopgaver og på niveau D og C de lodtrukne spørgsmål. Sammen med opgavematerialet sender læreren en oversigt over, hvad der er arbejdet med i undervisningen. Det er meget vigtigt for kvaliteten af censuren, at denne oversigt er med. En af censors vigtige opgaver er at sikre, at skriftlige opgaver / mundtlige spørgsmål / temaopgaver dækker undervisningen bredt. Da en stor del af undervisningen er lokalt bestemt, er det kun muligt for censor at foretage en sammenligning af opgaverne og undervisningens indhold, når der foreligger en oversigt over dette.