Syddansk Universitet har i samarbejde med Teknologisk Institut, JYSK ANALYSE A/S og fire ekspertgrupper nedsat af Børne- og Undervisningsministeriet gennemført en undersøgelse af den faglige udvikling indenfor fagene dansk, engelsk, matematik og fysik i det almene gymnasium (stx) i perioden 1968-2018.

Denne rapport præsenterer undersøgelsen af den faglige udvikling i matematik.

Gennem systematiske analyser af undervisningsbeskrivelser, eksamenssæt og eksamensbesvarelser fra perioden samt spørgeskemaundersøgelser med lærere og undervisere i grundskolen, på de gymnasiale uddannelser og på videregående uddannelser anlægger rapporten et bredt perspektiv på faglighed, som kan understøtte refleksioner over faget og over faglighed.

Der er udgivet seks delrapporter:

Faglighed i gymnasiet: Projektets rammer og design
Faglighed i gymnasiet: Matematik
Faglighed i gymnasiet: Fysik
Faglighed i gymnasiet: Dansk
Faglighed i gymnasiet: Engelsk
Udviklingen af fagligheden i gymnasiet: Tværgående opsamling og resultater

Faglighed i gymnasiet

Matematik

Delrapport 2

Steen Markvorsen, Torben Spanget Christensen, Camilla Kølsen Petersen, Susanne Højte, Olav Lyndrup, Mogens Nørgaard Olesen og Frode Rønning

Institut for Kulturvidenskaber
Syddansk Universitet

Gymnasiepædagogik
Særnummer
2019

Faglighed i gymnasiet

Matematik

Resume

Steen Markvorsen, Torben Spanget Christensen, Camilla Kølsen Petersen, Susanne Højte, Olav Lyndrup, Mogens Nørgaard Olesen og Frode Rønning

Matematik – Resume

I denne rapport præsenterer Syddansk Universitet og den af ministeriet nedsatte ekspertgruppe resultaterne fra en undersøgelse af den faglige udvikling inden for faget matematik i det almene gymnasium (stx) i perioden 1948-2018.

Baggrunden for undersøgelsen er Børne- og Undervisningsministeriets ønske om at få solid viden om udviklingen og niveauet i elevernes realiserede faglighed samt at etablere et grundlag for at følge elevernes realiserede faglighed på de gymnasiale uddannelser fremover.

Undersøgelsens formål og fokus

Der er i undersøgelsen gennemført følgende:

A. Analyser og sammenligninger af danske eksamenssæt og eksamensbesvarelser fra stx på højeste niveau fra sommereksamen 2018 og fra udvalgte år i et historisk perspektiv og norske og svenske læreplaner og eksamenssæt fra 2018
B. Analyser af undervisningsbeskrivelser fra undervisningen i Matematik A i perioden 2009-2018
C. Spørgeskemaundersøgelser med lærere og undervisere i grundskolen, på de gymnasiale uddannelser og på videregående uddannelser

Undersøgelsen giver herigennem svar på følgende spørgsmål:

1. Hvad karakteriserer udviklingen i gymnasieelevernes viden, færdigheder og kompetencer, herunder i balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer i matematik?
2. Hvad karakteriserer udviklingen i undervisningens indhold/emner i matematik mht. viden, færdigheder og kompetencer, herunder i balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer i undervisningens indhold?
3. Hvad karakteriserer det aktuelle niveau i danske gymnasieelevers grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer indenfor matematik?

Undersøgelsen angår det højest mulige faglige matematikniveau i stx forstået som det 3-årige A-niveau, hvilket betyder, at opgraderingshold til Matematik A *ikke* indgår, ligesom eksamensforsøg med net-eksamen heller ikke gør.

I besvarelsen af spørgsmålene perspektiveres analyserne af udviklingen i matematikfagligheden til forandringer i læreplanerne for Matematik A samt til politiske forandringer og reformer samt forandringer i demografi og teknologi i den undersøgte periode. I tilfældet med matematikfaglighed er brugen af matematikfaglige it-værktøjer som fx computer algebra systemer en gråzone mellem indhold og fagets didaktik, som er medtaget i undersøgelsen.

Undersøgelsen bidrager med en systematisk viden og et begrebsapparat, der kan udgøre grundlaget for diskussioner af det aktuelle faglige niveau i gymnasiet. Herudover repræsenterer analyserne et relevant perspektiv på faglighed, som kan understøtte refleksioner af matematikfaget og matematikfaglighed i forbindelse med fx pædagogikum. Ikke mindst tilbyder undersøgelsen et metodisk og analytisk grundlag for at undersøge matematikfaglighed i de gymnasiale uddannelser fremadrettet.

Undersøgelsens genstandsfelt

Det samlede datasæt for analysen af danske undervisningsbeskrivelser, eksamenssæt og elevbesvarelser fremgår af tabel 1 nedenfor:

	Undervisnings-beskrivelser	Eksamenssæt	Elevbesvarelser	Reformperiode
1948		1		
1964		1		
1968		1		
1975		1		
1980		1		
1981		1	5 fra *Vordingborg Gymnasium*	1958-1987
1990		1	5 fra *Schneekloths Gymnasium*	1988-2004
2000		1	5 fra *Frederiksværk Gymnasium & HF*	
2006		1	5 fra *Frederiksberg Gymnasium*	
2009	10			2005-2017
2010	10	1	5 fra *Frederiksberg Gymnasium*	
2011	10			
2012	10			
2013	10			
2014	10			
2015	10			
2016	10			
2017	10			2017-
2018	10	1	20 fra hhv. *Hjørring Gymnasium og HF kursus (5), Munkensdam Gymnasium (5), Herning Gymnasium (5) og Aalborg Katedralskole (5)*	

Tabel 1: Oversigt over datagrundlaget for danske undervisningsbeskrivelser, eksamenssæt og eksamensbesvarelser i matematik

Der er hentet undervisningsbeskrivelser og aktuelle eksamensbesvarelser fra følgende 10 skoler: Aalborg Katedralskole, Hjørring Gymnasium og HF-kursus, Herning Gymnasium, Skive Gymnasium og HF, Vestfyns Gymnasium, Munkensdam Gymnasium, Frederiksberg Gymnasium, Herlev Gymnasium og HF, Kalundborg Gymnasium og HF, Roskilde Katedralskole. Disse skoler er udvalgt på den måde, at der er 2 gymnasier fra hver region, ét gymnasium, der i 2018 havde et gennemsnit *over* landsgennemsnittet og ét gymnasium, der havde et gennemsnit *under* landsgennemsnittet. Ved udvælgelsen af elevbesvarelser blev der fra disse skoler tilfældigt udvalgt 5 elevbesvarelser med brug af eleveksamensnumre eller klasselister.

Med hensyn til eksamenssæt og elevbesvarelser historisk set, var det ønsket at have et nedslag i hver af gymnasiets 6 reformperioder de seneste 50 år: Før 1958, 1958-1971, 1972-1988, 1989-2005 og 2006-2017. Dette var ikke muligt at skaffe, og her måtte datagrundlaget således justeres ift., hvad der var til rådighed gennem Rigsarkivet og Frederiksberg Stadsarkiv.

Fra Norge og Sverige var det kun muligt at skaffe ganske få elevbesvarelser, og vi valgte derfor at udelade de skandinaviske elevbesvarelser fra undersøgelsen, da denne del af undersøgelsen ville få en for fragmenteret karakter. Den norske kollega i ekspertgruppen har været behjælpelig med at forklare, hvordan man laver hhv. eksamener og nationale tests i de forskellige fag i Norge, såvel som vores svenske kollega, professor emerita Barbro Grevholm, der undervejs blev tilknyttet ekspertgruppen, har været behjælpelig med at afklare de svenske læreplaner og nationale test i matematik herunder, at der i Sverige *ikke* afholdes studentereksamen i gymnasiet i matematik, men udelukkende nationale tests

Den følgende tabel opsummerer det nordiske analysegrundlag af eksamenssæt:

NORDISK empiri til analysen			
Eksamenssæt fra NORGE		Elevbesvarelser	Reformperiode
1997	Niv 2	*Vi har ikke haft adgang til nordiske eksamensbesvarelser i matematik*	Samme læreplan fra 1994
1999	Niv 1 og 3		
2002	Niv 1		Prøverne i 2002 og 2003 er efter en omfattende revision af læreplanen fra 1994. Prøverne i 2018 er efter gældende læreplan fra 2006.
2003 **2018**	**Niv 3** **Niv 1, 2 og 3**		
Nationale prøvesæt fra SVERIGE			
1998	(med formelsamling og med lommeregner)		
2012	B, C og D		Samme læreplan
2013	B, C og D		

Tabel 2: Nordisk empiri til analysen af eksamens- og prøvesæt

Der blev udsendt spørgeskema til 342 matematiklærere på gymnasier og 344 matematiklærere i grundskolen, samt til 126 undervisere på matematikuddannelserne og økonomiuddannelserne på de danske universiteter. Antallet af respondenter og svarprocenten fremgår af Tabel 3:

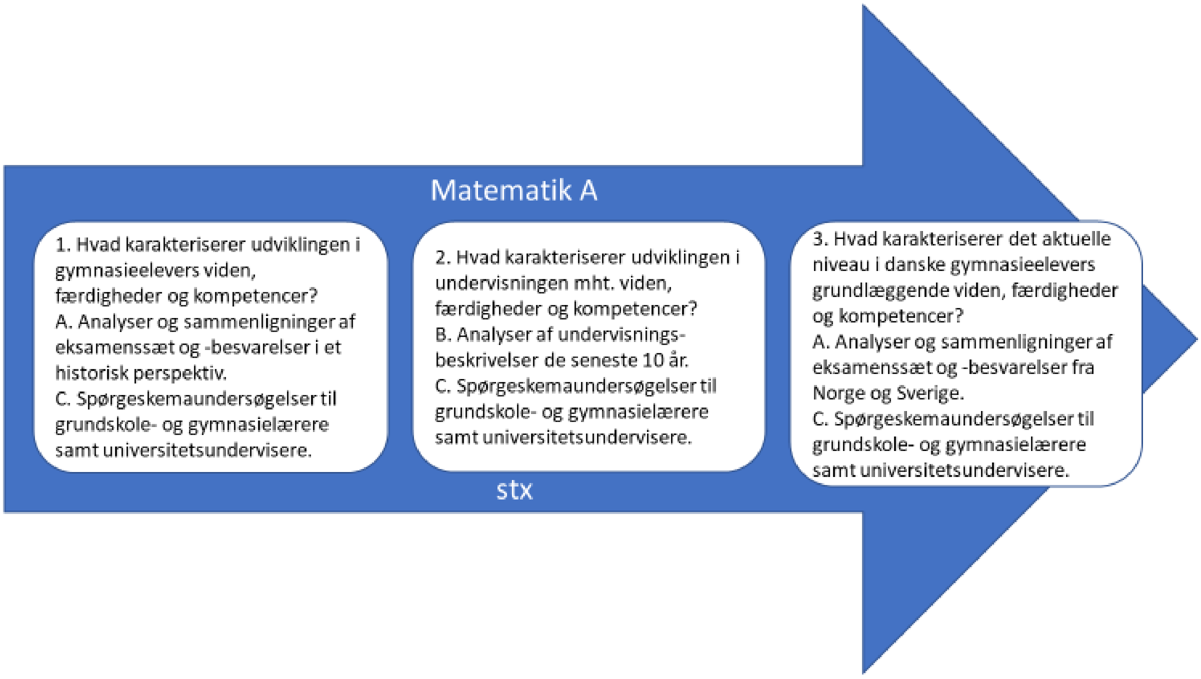
Niveau	**Antal modtagere**	**Antal respondenter**	**Svarprocent**
Grundskole	344	233	65%
Gymnasium	342	155	45%
Universitet	126	69	55%

Tabel 3: Oversigt over antal modtagere af spørgeskemaet, antal respondenter og svarprocent

Der er i den fulde rapport medtaget en række forbehold vedrørende målingsvaliditeten og reliabiliteten af de indsamlede spørgeskemadata. Et centralt forbehold er, at 69,7% af de matematiklærere i gymnasiet, der har besvaret spørgeskemaet, kun har undervist 1-5 klasser i matematik de seneste 10 år, hvilket er i kategorien 'sporadisk erfaring' med matematik-undervisningen. Det er ekspertgruppens vurdering, at der er tale om betydningsfulde forbehold.

Undersøgelsens design

Figur 1 viser samspillet mellem analyserne og spørgsmålene (generelt for de fire aktuelle fag):



Figur 1: Spørgsmål og analyser

Til alle analyser af matematikfagligheden er anvendt en analysemodel, der er bygget op over den grundlæggende metafor "matematikhuset", der henviser direkte til vejledningen for Matematik A/B/C, stx 2018. Matematikhuset bygges omkring tre faglige "søjler": funktioner, geometri og statistik. Inden for disse tre faglige søjler kommer elevernes faglighed til udtryk ved de aktiviteter, som den matematiske viden og de matematiske færdigheder, sætter eleverne i stand til at udføre, både inden for matematikken selv og med matematikken i forhold til omverdenen (kompetencer). Dette beskrives i den matematikfaglige undersøgelse via en skelnen mellem tre såkaldte momenter ved matematikken, som genfindes på ethvert sted og på ethvert tidspunkt i opbygningen af matematikhuset: hhv. "G" (grundlæggende), "V" (vertikal) og "H" (horisontal). G er grundlaget, dvs. grundlæggende viden og færdigheder, inden for en given søjle, typisk hhv. viden og færdigheder inden for matematikkens tematiske indhold og begreber og metode. V betegner kompetencen til at kunne anvende grundlaget til løsning af opgaver inden for den pågældende søjle på stadigt højere niveau. H er kompetencen til at kunne tænke og agere på tværs af forskellige matematikinterne områder samt evnen til at kunne anvende matematikken til omverdensproblemer, dvs. andre fag eller problemstillinger i samfundet. Det præciseres i matematikrapporten, at kompetence opfattes som den kreative, kritiske og selvstændige anvendelse af elevens arsenal af grundlæggende viden og færdigheder.

Både de vertikale og de horisontale kompetencer er altså udtryk for repræsentationer af den generelle analysemodels kategorier 4-6, der dækker innovative, personlige og sociale aspekter af viden, færdigheder og kompetencer. Den generelle analyserammes kategori vedrørende tværfaglighed, altså kategori 3, er repræsenteret i matematikgruppens arbejde ved den *horisontale kompetence*. Det er vigtigt at bemærke, at tværfaglighed i forbindelse med matematikfagligheden både kan handle om kompetencen til at gå på tværs mellem matematik og andre fag og kompetencen til at kombinere forskellige fagområder inden for matematikken selv. Den horisontale kompetence omfatter begge dele. I tillæg til GVH-analysen indeholder analysemodellen i matematik også komponenter, der er inspireret af SOLO-taksonomien, og som benyttes til evaluering af elevens præstationer – i denne analyse dog kun til evaluering af eksamensopgavebesvarelser. Analysemodellen skelner mellem en fragmenteret (F), rutiniseret (R), og integreret (I) forståelse af matematikken, som registrerer i hvor høj grad eleven er i stand til i sin besvarelse af en given opgave at demonstrere en struktureret forståelse af den matematik, som opgaven omhandler.

GVH-rammen er brugt til analyser af eksamenssæt, FRI-rammen er brugt til analyse af elevbesvarelser. *Tilsammen* er GVH-FRI-analyserammen udtryk for en systematisk og begrebsfunderet analyseramme indenfor matematikfaglighed, der er anvendelig til analyse af udviklingen i matematikfaglighed *over tid* og *på tværs af uddannelsesniveauer*.

Udviklingen i gymnasieelevernes viden, færdigheder og kompetencer

Matematikgruppens analyser af eksamenssæt viser, at der i alle de undersøgte år er en betydelig mængde af V-opgaver, der kræver grundviden og grundlæggende færdigheder. Andelen af V-opgaver er stabil over tid, men optræder i mindre grad som rene V-opgaver i nyere eksamenssæt. Andelen af rene V-opgaver fluktuerer i takt med læreplanernes og eksamensopgavernes prioritering af elevernes kompetencer dels til matematisering og modellering af omverdensproblemer og andre fags problemstillinger kombineret med matematisk viden og færdigheder (GH- og VH-opgaver) og dels til matematisering indenfor matematikken selv (rene V-opgaver, men også VH-opgaver). Især i 2018 (dvs. efter reformen i 2005), indgår V-opgaverne som nævnt i stigende grad som en integreret del af opgaver om modellering af matematiske problemer og omverdensproblemer, hvorved opgaver af VH-typen bliver hyppigere i eksamenssættene, men således at de stadig vil kunne opfattes som V-opgaver. Dette udviklingsbillede viser, hvordan kompleksiteten i kravene til den matematikfaglige modelleringskompetence øges over en årrække. Konklusionen på analysen er, at eksamenssættene efterspørger samme grundlæggende viden og færdigheder inden for fagets begreber, tematiske indhold og metoder. Til gengæld fluktuerer efterspørgslen efter de såkaldte horisontale kompetencer i perioden, hvilket udtrykt med den generelle analysemodels termer vil sige, at eksamenssættene i varierende grad gennem perioden stiller krav om, at eleverne skal kunne arbejde tværfagligt (kategori 3), dvs. både på tværs af fag og på tværs af matematikfaglige områder. Der ses fra år 2000 en stigning i antallet af opgavetyper, der på den ene eller den anden måde stiller krav til eleven om at måtte forholde sig til omverdensproblemer, herunder også ved at kunne bringe matematikken ind i tværfaglige typer af problemstillinger (kategori 3) samt ind i sociale, dvs. samfundsmæssige problemstillinger (kategori 6). Grundlæggende udtrykker eksamenssættenes spørgsmål på tværs af perioden med variationer mellem årene forventninger til, at eleverne kan tænke kreativt, problemløsende, og på tværs af enten matematikinterne domæner eller, som det viser sig fra 2000 og frem, i højere grad på tværs af faggrænser og i forhold til omverdensproblemer. F.eks. forventes eleverne i 1964 og 2018 i høj grad at kunne arbejde problemløsende, dvs. innovativt (kategori 4), hvorimod eksamenssættene fra 1975, 1990 og 2010 i mindre grad efterspurgte denne type af kompetence. Mht. til matematikkens tematiske indhold sker der en forskydning i perioden fra primært at have omhandlet geometri og funktioner, til fra 1968 og frem også at omfatte statistik og sandsynlighedsregning. Den abstrakte algebra forsvinder fra og med 1990 (hvilket er udtryk for, at den nu indgår som en integreret del af problemløsningsopgaver indenfor de tre faglige søjler i 'matematikhuset'). Hvad angår sværhedsgraden/kompleksiteten af de undersøgte opgaver, ses naturligt nok en tendens til, at der i eksamensopgaverne er flest opgaver på sværhedsgrad 3 (med opgave-emner fra 3. g), næstflest på sværhedsgrad 2 og få eller ingen på sværhedsgrad 1. Den samlede sværhedsgrad i eksamenssættene vurderes at være konstant i den undersøgte periode.

I matematik er der analyseret elevbesvarelser fra 6 udvalgte år (1981, 1990, 2000, 2006, 2010 samt 2018). Der er analyseret 5 besvarelser fra hvert af de første fem år, mens der for 2018 er analyseret 20 elevbesvarelser. Helt grundlæggende viser analysen af elevbesvarelser, at der er den samme fordeling af fragmenterede, rutiniserede og integrerede elevbesvarelser over årene. Der er således ikke en faglig 'skævhed' at spore over tid, men *et stabilt mønster* i elevernes matematikfaglighed: flest svarer på en rutiniseret vis, færre svarer fragmenteret eller integreret. Vurderingen af niveauet for en besvarelse er baseret på elevens evne til at argumentere for sine løsninger, elevens valg i det matematikfaglige sprog, og elevens evne til at gennemføre beregninger og modelleringer.

Når det kommer til uddannelsesniveauernes oplevelse af udviklingen af elevernes og de studerendes matematikfaglighed, er gymnasielærerne og universitetsunderviserne stort set enige i udviklingen over tid mht. matematikfagligheden hos de elever og studerende, de modtager. Elever og studerende er blevet bedre til at modellere problemer med brug af matematikfaglige værktøjer og til at arbejde eksperimenterende og undersøgende. Dette bakkes op af et stabilt niveau til at kunne forholde sig til modellers rigtighed og beregninger i gymnasiet, og på universitetsniveauet til at kunne arbejde selvstændigt og selvstændigt forholde sig til matematikken. Det opleves samtidig som en beherskelse af bredden i matematikken, der over tid vurderes at blive mere udtalt. Dette står overfor en oplevelse af ringere grundlæggende færdigheder, dybdeforståelse af matematikken og evne til abstrakt tænkning. Hvad angår oplevelsen af udviklingen i elevernes matematikfaglighed ved afslutningen af gymnasiet, vurderer matematiklærerne i gymnasiet, at det niveau, deres elever går ud af gymnasiet med, nogenlunde er det samme over tid. Matematikfagligheden er på samme niveau, men forskudt over mod problemmodellering, arbejde med værktøjer og eksperimenterende og undersøgende arbejde, for alle årene som den enkelte lærer har erfaring med, og med hensyn til matematikfaglige it-værktøjer er der ligefrem tale om et fagligt løft i løbet af gymnasiet.

Udviklingen i undervisningen mht. viden, færdigheder og kompetencer

Analysen af undervisningsbeskrivelserne indikerer, at alle de undersøgte 3-årige A-niveauhold er undervist i læreplanens kernestof, dvs. matematikhuset er konstant i den undersøgte årrække. Samtidig viser den, at konnektiviteten i fagligheden, forstået som progressionen i og imellem de matematikfaglige søjler (funktioner, geometri og statistik), er til stede. Den typiske gennemgang af kernestoffet (funktioner, geometri og statistik) er:

1. g: Grundlæggende begreber, Trigonometri, Lineære funktioner, Eksponentielle funktioner, Potensfunktioner, Vækstmodeller, Polynomier,
2. g: Differentialregning, Integralregning, Statistik & sandsynlighedsregning,
3. g: Differentialligninger, Vektorer i 2 og 3 dimensioner, Trigonometriske funktioner (samt Valgfrit emne).

Analysen er herudover fokuseret på det *supplerende stof*, som er det felt, der kan indikere udviklingen i fagligheden for matematik udover den stabile kernefaglighed. Denne del af analysen viser, at man i vid udstrækning forsøger at arbejde tværfagligt, dvs. horisontalt fra og med matematikken ud mod andre fag. Følgende er eksempler på sådanne 'horisontale' emner fra undervisningsbeskrivelserne:

- **Bio**: Fysiologiske tests og målinger, Kolesterolniveau beskrevet med differentialligninger, Rovdyr-Byttedyr m, Højde- og Længdespring (dataopsamling), Bakterievækst, Epidemier, Dykning, Hardy-Weinberg, Triangeltest, Genetiske fodspor, Betinget sandsynligheder, Gærvækst
- **Fysik**: Keplers love, Tivoli-mat/fys, Hoppebold, Svingende pendul, Radioaktivt henfald, Newtons afkølingslov, Manhattenprojekt, Toricellis lov, Kinematik, Isolering og Varmetab
- **Kemi**: Enzymkinetik

Der er markant flest H-emner med relation til de naturvidenskabelige fag (fys, bio, ke) men også eksempler på samarbejder med historie og samfundsfag. Matematik har også indgået i en del AT-forløb, både med udvidet kernestof og helt nye emner. Samlet set er vurderingen på baggrund af undervisningsplanerne, at matematikindholdet i gymnasiet både er udtryk for arbejde med perspektivering til de videregående uddannelser, (hvilket også bekræftes af spørgeskema-analyserne), og gennemgang af kernestoffet så elever med forskellige faglige niveauer forberedes til eksamen.

Det aktuelle niveau i danske gymnasieelevers grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer

Alle de i undersøgelsen gennemførte analyser peger i retning af, at matematikfagligheden er stabil, både hvad angår det faglige indhold i 'matematikhuset' og progressionen op igennem de faglige søjlehøjder. Men der er sket en forskydning fra det vi populært kan kalde 'papir og blyant matematik' og 'abstrakt matematik' over imod 'problemløsende og undersøgende matematik' med brug af 'digitale matematikværktøjer'. Den problemløsende og undersøgende matematik integrerer den abstrakte matematik i modelleringsopgaver; derved bliver den mindre synlig, eller i hvert fald synlig på nye måder. De digitale matematikværktøjer afløser i nogen grad gammelkendte algoritmer, som derfor i et vist omfang falder ud af matematikundervisningen. Analyserne viser, at der arbejdes didaktisk med disse forskydninger i den gymnasiale matematikundervisning og ekspertudvalget peger på, at det er et vigtigt opmærksomhedsfelt for den gymnasiale matematikundervisning fremover.

Analysen af elevbesvarelser viser en stabilitet i kvaliteten af besvarelserne over årene og fastholder synligheden i den matematikfaglige udvikling som en faglig udvikling, der aktuelt synes at kombinere bredde og dybde i matematikfagligheden gennem V-, GH-, VH-opgaver.

Grundskolelærerne vurderer, at mellem 40 og 80 % af deres elever lever op til de fleste af de udsagn om viden, færdigheder og kompetencer, der er opstillet i spørgeskemaet. Et flertal af lærerne vurderer endog, at over 80 % af deres elever har *kendskab til matematikfagets begreber*, og at de *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*. Omvendt er det også en meget udbredt vurdering, at elever *ikke fordyber sig i det matematikfaglige udover de skemalagte opgaver*.

Når det kommer til gymnasielærernes vurdering af de eleverne, de modtager fra grundskolen, er der stor spredning. Tendensen er, at der er størst enighed om, at eleverne på nogle af de mere komplekse parametre, ikke har et særlig godt niveau. Meget få mener således, at eleverne *har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles* (10 %), *har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* (7 %), *har arbejdet nyskabende ift. egen viden inden for matematik* (6 %) og *har erfaring med at vurdere den matematiske realiserbarhed af idéer, påstande og/eller produkter* (9 %). Der er størst enighed om, at *eleverne har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber* (67 %) og *har trænet evnen til at samarbejde om løsning af matematiske opgaver* (64 %), altså mere grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer, hvilket stemmer godt overens med folkeskolelærernes vurdering. Det bør også bemærkes, at 48 % af gymnasielærerne mener, at *eleverne har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter i gymnasiets 3-årige A-niveau, hvilket også hænger godt sammen med folkeskolelærernes bedømmelse af deres elever på det punkt. Det hører også med til billedet, at over 80% af gymnasielærerne svarer, at de er enige (helt eller overvejende) i, at elevernes matematikkundskaber svarer til deres forventninger.

Gymnasielærernes svar vedrørende de færdiguddannende stx-studenter viser, at en høj andel af gymnasielærerne vurderer, at mellem 80 og 100 % af deres elever *har kendskab til matematikfagets begreber* (63 %). Der er en næsten lige så stor andel, der mener, at eleverne *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)* (61 %). På de fleste udsagn om viden og færdigheder er den hyppigste vurdering fra gymnasielærerne, at mellem 60 og 79 % af deres elever ved afslutningen af gymnasiet behersker disse. Lærernes vurdering af, hvilken andel af deres elever, der lever op til udsagnene om kompetencer, som fx *eleverne kan selvstændigt anvende faget til at formulere relevante matematikfaglige spørgsmål, eleverne kan selvstændigt anvende fagets teorier, metoder og begreber og/eller værktøjer til analyse af komplekse matematiske problemstillinger, samt eleverne kan selvstændigt opstille matematiske modeller til undersøgelse af matematikfaglige problemer,* er imidlertid lavere. Det typiske svar er, at det lever mellem 20 og 59 % af eleverne op til.

Også hos universitetsunderviserne er der ret forskellige vurderinger af, om deres BA-studerendes matematikfaglige indgangsniveau kan siges at være på ønsket niveau, hvilket også må ses i lyset af, at de videregående uddannelser stiller forskellige matematikfaglige krav. Langt de fleste (72 %) er dog enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter på deres videregående uddannelse. Og også mange (62 %) er enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber*.

Der kan således spores en vis enighed om disse to elementer hele vejen fra folkeskolen til videregående uddannelse. Meget få matematiklærere på de videregående uddannelser vurderer, at deres studerende kommer med et godt indgangsniveau på en række af de mere komplekse kompetencer, der spørges til: Kun 6 % er således overvejende enige i, at de studerende har et godt niveau, når det *gælder viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles*, kun 9 % er overvejede enige i at de studerende *har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* eller *har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik*. 24 % er enige/overvejende enige i at de studerende *har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget*.

Faglighed i gymnasiet

Matematik

Delrapport 2

Steen Markvorsen, Torben Spanget Christensen, Camilla Kølsen Petersen, Susanne Højte, Olav Lyndrup, Mogens Nørgaard Olesen og Frode Rønning

GYMNASIEPÆDAGOGIK
SÆRNUMMER

Faglighed i gymnasiet

Matematik

Delrapport 2

December 2019

Udgivet af

Institut for Kulturvidenskaber

Syddansk Universitet

Campusvej 55

5230 Odense M

Gymnasiepædagogik er en skriftserie, der formidler forskning om ungdomsuddannelserne, fx forskningsrapporter, konferencerapporter, evalueringsrapporter og tematiske rapporter. *Gymnasiepædagogik* udkommer 4-6 gange årligt og koster i abonnement 400,- kr. Abonnement tegnes gennem Institut for Kulturvidenskaber: gymnasiepaedagogik@sdu.dk.

Tryk: Grafisk Center, Syddansk Universitet

Layout: Grafisk Center, Syddansk Universitet

Oplag: 300

ISSN: 1399-6096

ISBN: 978-87-7938-135-3

Indholdsfortegnelse

1. Indledning

Denne rapport om matematikfaglighed er skrevet af et ekspertudvalg sammensat af professor Steen Markvorsen (formand), Institut for Matematik og Computer Science, Danmarks Tekniske Universitet, professor Frode Rønning, Institutt for matematiske fag, Norges Teknisk-Naturvidenskabelige Universitet, forfatter og ekstern lektor Mogens Nørgaard Olesen, Økonomisk Institut, Københavns Universitet, lektor Susanne Højte, Gladsaxe Gymnasium, og lektor Olav Lyndrup, Nykøbing Katedralskole. Udvalget blev faciliteret af lektor Camilla Kølsen Petersen og lektor Torben Spanget Christensen, begge Institut for Kulturvidenskaber, Syddansk Universitet. Udvalget har arbejdet fra december 2018 og afsluttet sit arbejde 31. marts 2019.

Ekspertudvalget og de to faciliterende forskere fra SDU vil gerne benytte lejligheden til at takke professor emerita Barbro Grevholm, som har bistået med at skaffe og analysere svenske nationale prøver. Udvalget vil også takke de deltagende gymnasier, Rigsarkivet, vores altid beredvillige forskningsassistenter ved og sekretariat på Institut for kulturvidenskaber, SDU, samt vores projektleder, professor Ane Qvortrup, SDU, for hjælp og assistance i forbindelse med arbejdet i matematikgruppen.

En særlig tak går til de mange lærere fra folkeskolen og gymnasiet samt undervisere fra det videregående uddannelsesniveau, der har svaret på vores spørgeskema.

Delrapporten om udviklingen i matematikfagligheden i stx er et fælles produkt, der er blevet til som resultat af ekspertgruppens arbejde. Alle konklusioner og analyser er et produkt af det fælles arbejde. Det betyder ikke, at alle er enige om alle sætninger i rapporten, men at alle i ekspertudvalget har bidraget vedvarende, koncentreret og indsigtsfuldt til tekster, analyser og diskussioner undervejs.

Produktet af arbejdet er både en analyse af udviklingen i fagligheden i matematik i stx på højeste niveau og en analysemodel, der kan anvendes fremadrettet. Analysemodellen er en videreudvikling af Kvalifikationsrammen for Livslang Læring og begreberne viden, færdigheder og kompetencer heri, således at analysebegreberne kan beskrive ikke blot konceptet matematikfaglighed men også, hvordan matematikfagligheden kan opbygges, udvikles og vedligeholdes. Viden, færdigheder og kompetencer er dermed i den matematikfaglige undersøgelse hhv. grundlæggende viden og færdigheder samt vertikale og horisontale kompetencer, som defineres nærmere i rapporten.

Det betyder, at ekspertgruppens arbejde i sig selv er et stykke matematikfagligt udviklingsarbejde. De afsluttende anbefalinger inkluderer således også, hvordan der kan arbejdes videre med analysemodellen.

Ekspertgruppen indleder dog rapporten med nogle tankevækkende spørgsmål:

- Ville studenterne fra 2018 kunne besvare eksamenssættet fra 1948 eller det fra 1968?
- Ville studenterne fra 1948 eller fra 1968 kunne besvare eksamenssættet fra 2018?

Med en klassisk test kunne man nok besvare det første spørgsmål, men hvordan skal man kunne besvare det andet? Og begge spørgsmål må besvares, hvis det skal give mening at sammenligne elevernes faglige niveau over tid. Det viser, hvor vanskeligt det er at afgøre, om elevernes faglige niveau er øget eller faldet over tid eller er uforandret. For så meget er så forskelligt. Én ting er sikkert, og det er, at matematikfagligheden er ændret over tid, selvom den grundlæggende matematik, som i rapporten beskrives med metaforen *matematikhuset*, er den samme.

Spørgsmålene må derfor omformuleres:

- Stiller eksamensspørgsmålene i 1948, i 1968 og i 2018 lige store krav til elevernes matematiske viden, færdigheder og kompetencer?
- Kan eleverne i 1948, i 1968 og i 2018 svare på de eksamensspørgsmål, som de professionelle matematikere i opgavekommissionerne for de respektive år stillede?

Svaret på det første spørgsmål kan søges belyst ved en analyse af eksamenssættene for de pågældende år. Det har været muligt at gennemføre en sådan undersøgelse af eksamenssættene fra 1948 og frem til 2018.

Svaret på det andet spørgsmål må tilsvarende belyses via en undersøgelse af eksamensbesvarelser for de pågældende år. Og resultaterne af de to analyser må derefter sammenholdes. Begge undersøgelser er gennemført ved at undersøge stikprøver, og især undersøgelsen af elevernes besvarelser har været vanskelig, da disse ikke umiddelbart er tilgængelige.

Begge undersøgelser kræver eksperter i matematik og i undervisning. Analysen af eksamensspørgsmålene benytter en såkaldt GVH-analyse, hvor G står for grundlæggende viden og færdigheder i matematik og V og H for forskellige matematiske kompetencer. Analysen af eksamensbesvarelserne benytter en såkaldt F/R/I-U-analyse, som er udtryk for en forenklet SOLO-taksonomi i forlængelse af – og motiveret af – GVH-analysen af selve opgaverne. Begge analysemodeller præsenteres i detaljer i rapporten.

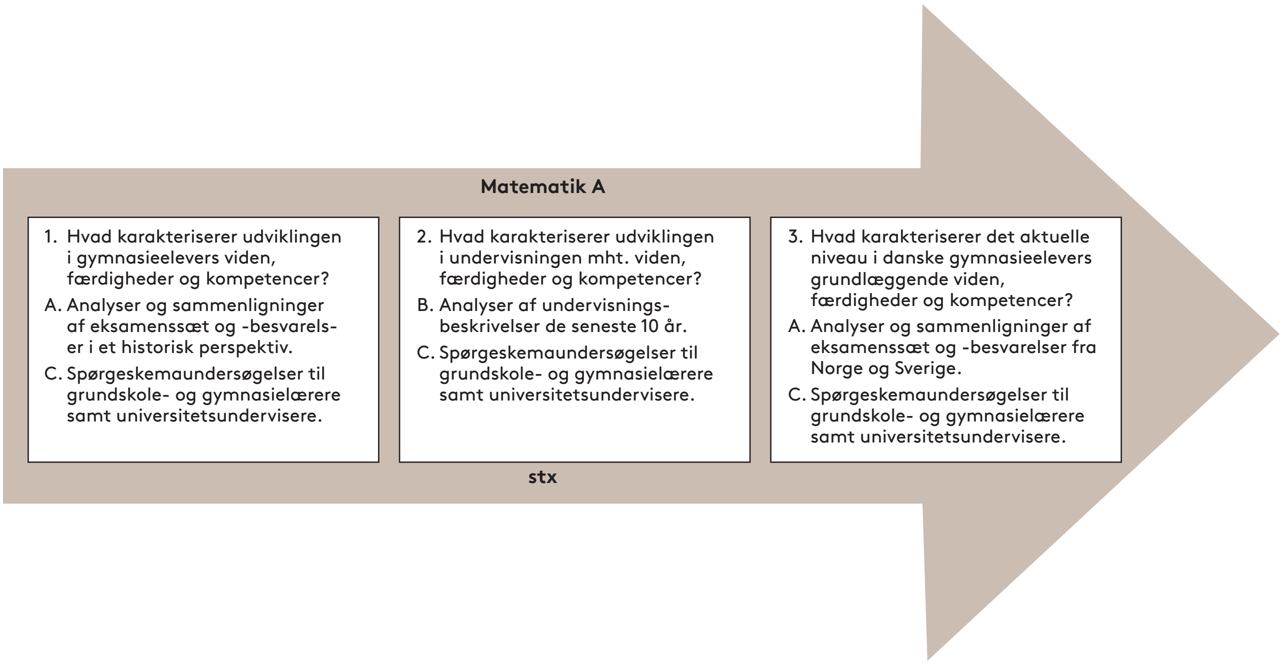
Udover de nævnte analyser bygger rapporten også på analyser af undervisningsbeskrivelser inklusive noterede forekomster af supplerende stof og på analyser af en spørgeskemaundersøgelse blandt matematiklærere i folkeskolen, i gymnasiet og på videregående uddannelser (universitetsuddannelser).

På den baggrund ønsker rapporten at besvare følgende tre spørgsmål:

1. Hvad karakteriserer udviklingen i gymnasieelevernes viden, færdigheder og kompetencer, herunder balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer indenfor Matematik A?
2. Hvad karakteriserer udviklingen i undervisningen i Matematik A mht. viden, færdigheder og kompetencer, herunder i balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer i undervisningens indhold?
3. Hvad karakteriserer det aktuelle niveau i danske gymnasieelevers grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer indenfor Matematik A?

Disse spørgsmål besvares samlet i afsnit 11 og der samles op i anbefalingerne i afsnit 12.

Sammenhængen mellem analyser og undersøgelsesspørgsmål er illustreret i figur 1:



Figur 1. Sammenhængen mellem analyser og undersøgelsesspørgsmål.

2. Læsevejledning

Den følgende rapport er resultatet af et intenst stykke analysearbejde påbegyndt december 2018 og afsluttet 31. marts 2019.

I det første afsnit fremlægges og begrundes den **anvendte analysemodel** og dennes kobling til Kvalifikationsrammen for Livslang Læring. De udviklede analysekategorier baserer sig på læreplanen i matematik fra 2017-reformen samt ekspertudvalgets matematikfaglige vurdering af samspillet mellem viden, færdigheder og kompetencer i gymnasieelevernes matematikfaglige uddannelse. Det grundlæggende oplagte rationale er, at det for det første ikke er muligt at forholde sig til udviklingen i elevernes tilegnede matematikfaglige kompetencer uden hele tiden at analysere og sammenholde eksamenssæt og elevbesvarelser på højeste faglige niveau i den gymnasiale uddannelse. For det andet, at der ikke kan sættes lighedstegn mellem på den ene side kvaliteten af elevbesvarelser af slut-eksamensopgaver og på den anden side den tilegnede faglighed – uanset hvordan besvarelserne og opgaverne måtte vægtes, historisk eller på anden vis.

Herefter følger afsnittet om **analysen af undervisningsbeskrivelser** fra perioden 2010-2018 baseret på udtræk fra Lectio- og Ludus-systemerne. I denne analyse har vi prioriteret at fokusere på 'supplerende stof' i undervisningsbeskrivelserne som en operationalisering af udviklingen i matematikfagligheden, der ikke er beskrevet ved kernestoffet. Rationalet her er, at kernestoffet er ret stabilt, og at en mulig udvikling i faglighedens emneområder (af typen V og H) derfor kan iagttages i det supplerende stof.

Som nævnt hænger afsnittene om hhv. **eksamenssæt og elevbesvarelser** tæt sammen, dog er analysen af danske eksamenssæt ført helt tilbage til 1948, mens eksamenssæt og elevbesvarelser følges ad fra 1981 og frem til 2018. Eksamenssættene analyseres med den udviklede GVH-terminologi og med fokus på de tre bærende faglige søjler i matematikhuset: funktioner, geometri og statistik, samt med fokus på søjlehøjden på opgaverne, dvs. det relative omfang af akkumuleret viden og færdigheder fra matematikhuset, som er nødvendigt for at kunne løse opgaven. Dermed karakteriseres viden, færdigheder og kompetencer i samspillet med fordeling af opgaver på de faglige søjler og opgavens kompleksitet angives ved søjlehøjden på de enkelte opgaver. Elevbesvarelserne analyseres med den udviklede F/R/I-U-terminologi, der er en GVH-motiveret forsimpling af SOLO-taksonomien. Det er ved sammenholdelsen af de to analyser af eksamenssæt og elevbesvarelser, at man kan iagttage den synlige matematikfaglige udvikling for så vidt kvaliteten af elevbesvarelser på Matematik A slutniveau.

Spørgeskemaet er primært analyseret eksplorativt og deskriptivt. Der er fokuseret på 1) progressionen i matematikfagligheden *vertikalt* igennem uddannelsessystemet, det vil sige lærervurderinger af elevernes matematikfaglige niveau i overgangene mellem grundskolen, gymnasiet og de videregående universitetsuddannelser, 2) forskelle og ligheder i uddannelsesniveauernes iagttagelse af matematikfagligheden og dens udvikling, hvilket undersøges gennem sammenligning af forudsætninger og parathed for både det gymnasiale og det videregående uddannelsesniveau, samt undersøgelse af udviklingen i fagligheden over tid for elever og studerende, der modtages, samt elever, der afsluttes i 3. g, 3) instrumentel genese, dvs. spørgsmål om instrumentalisering og instrumentering. Det er interessant i lyset af vores analysemodel, da den instrumentelle genese kun svært kan iagttages igennem de øvrige analyser i undersøgelsen.

Der er gennemført **analyser af eksamenssæt fra forskellige perioder** med brug af GHV-termerne, fordelingen af opgaver på de faglige søjler og opgavehøjden på søjlerne samt på fordelingen af GVH-opgaver i hhv. eksamen med og uden hjælpemidler for de år, hvor dette er muligt. Denne analysedel kobler sig til analysen af eksamenssæt, som beskrevet ovenfor, men har sin fokusering på, hvilke ligheder og forskelle vi finder i den danske kontekst på tværs af de gennemførte analyser.

I **analysen med nordisk perspektiv** er der analyseret på eksamenssæt fra Norge, Sverige og Danmark på samme måde som i analysen af forskellige perioders eksamenssæt, idet der fokuseres på ligheder og forskelle mellem de tre nordiske lande. Der er væsentligt forskellige eksamensformer i de tre lande, hvilket beskrives i denne del af analysen, som baggrund for at kunne afkode figurerne og forstå analysens resultater.

Rapporten afsluttes med **ekspertgruppens konklusion**, og fortegnelsen over anvendte tekstreferencer og anvendt materiale udgør rapportens sidste sider.

3. Matematik-analysemodellen

3.1. Rammevilkår for undervisning i matematik til højeste gymnasiale niveau

Den undersøgelse af faglighed i matematik gennem de sidste 50 år, som fremlægges her, fokuserer til forskel fra – men også i forlængelse af – en nylig gennemført undersøgelse af Danmarks Evalueringsinstitut på den *realiserede* faglighed. EVA-rapporten beskriver "den intenderede udvikling i faget matematik på stx i perioden 1967-2014, som denne kommer til udtryk i læreplaner og skriftlige eksamenssæt i perioden" (EVA 2017, s. 93).

Undersøgelsen afgrænser sig til det højeste niveau i stx, som i den første periode af undersøgelsen er matematik på den matematisk-fysiske gren og senere er matematik på A-niveau. Endvidere afgrænser undersøgelsen sig efter 2005-reformen til det ubrudte 3-årige forløb, hvor eleverne allerede i 1. g har valgt, at de vil læse matematik på A-niveau. Der har været forskellige vilkår, herunder samlet timetal for matematikundervisningen til det højeste niveau i perioden. Ovennævnte EVA-rapport har lavet en opgørelse af det samlede timetal, der i gymnasiets tre år har været til rådighed for undervisningen i matematik til højeste niveau. For at kunne sammenligne de forskellige perioder er timetallet omregnet til klokketimer, se tabel nedenfor. For nøjere forklaringer på, hvordan ekspertgruppen i EVA-undersøgelsen er kommet frem til timetallet henvises til rapporten https://gymnasieskolen.dk/sites/default/files/Den%20faglige%20udvikling%20i%20gymnasiet%20-%201967%20-2017.pdf. Det fremgår af EVA-rapporten, at undervisningsministeriet har vurderet, at tabellens skøn er fornuftigt. Vi lægger derfor også dette skøn over timetallet til grund for denne rapport.

Periode	**År**	**Timetal til faget for alle tre gymnasieår**	**Omfang af skriftligt arbejde i faget**
Det grendelte gymnasium før 1971	1970	490	Ikke fastsat i bekendtgørelsen
Det grendelte gymnasium efter 1971	1988	415	Ikke fastsat i bekendtgørelsen
Valgfagsgymnasiet	2000	390	Obligatorisk niveau: 51 opgavesæt, som i omfang svarer til 50-100 % af et eksamenssæt. Højt niveau: yderligere 26 opgavesæt pr. år, som i omfang svarer til 75-100 % af et eksamenssæt svarende til 180-308 timer.
Studieretningsgymnasiet fra 2005		375	Mindst 160 timer (elevtid)

Tabel 1. Rammer for matematikfaget i fire nedslagsår (EVA 2017, s. 94).

Når timetallet skal udregnes, er der, som det fremgår af tabellen, to forhold, der har betydning: dels timetallet og dels omfang af skriftligt arbejde. Det sidste har vi ikke mulighed for at udtale os om, når det gælder grengymnasiet, og om omfanget reelt er forskelligt i valgfagsgymnasiet og i studieretningsgymnasiet, ved vi heller ikke. Men der er et markant fald i antal timer i perioden, som indikerer et fald i fagets omfang. Det største fald finder sted med gymnasiereformen fra 1971, men der er fortsat et markant fald i de efterfølgende reformer. Hermed kan det også konstateres, at vilkårene for undervisningen i matematik til det højeste niveau er blevet forringet.

Når det gælder timetal, har vi også mulighed for at sammenligne med Sverige og Norge.

Der er naturligvis også en lang række andre vilkår, der har forandret sig i den undersøgte periode, herunder kan nævnes ændringer i elevmassen og klassekvotienten, men de ligger udenfor denne undersøgelses kommissorium og tidsmæssige rammer.

3.2. Udvikling i elevtal

Udviklingen i antallet af elever, der tager en studentereksamen i matematik på højeste niveau, sådan som dette er defineret her, er faldet i de senere år. De opgørelser, vi viser nedenfor, har lidt forskellig opgørelsesmetode. Den første opgør antallet af studenter, der har gennemført en studieretning med Matematik A, Fysik B og Kemi B.

stx	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Antal studenter med Mat A, Fys B og Kemi B, hele landet	3198	3198	2867	2934	2851	2686	2729	2763	2717
% af samlet antal studenter	14,5	13,8	12,3	11,4	10,4	9.9	9,7	10,2	10,0

Tabel 2. Antal studenter (stx) med studieretningen Matematik A, Fysik B og Kemi B, kilde UVM.

Opgørelsen i tabel 3 inkluderer studenter med fx en studieretning i bio-kemi, og andre studenter med fysik og/eller kemi på mindst B-niveau, hvilket vil sige, at studenter med A-niveau i disse fag indgår.

stx	2009	2010	2011	2012	2013
Matematik A, fysik og kemi på mindst B-niveau	4.943	5.017	4.881	4.558	3.895
% af samlet antal studenter	24,5	23,9	21,7	19,5	16,2

Tabel 3. Adgangsgivende fagkombinationer 2009-2013. Antal og andel af studenter med Matematik A, fysik og kemi på mindst B-niveau (2009-2013). Kilde: Undervisningsministeriet. Styrelsen for IT og Læring. UNI•C Statistik & Analyse, januar 2014, s. 5.

Men uanset opgørelsesmetode viser tallene et faldende absolut og relativt antal studenter med det højeste niveau i matematik. Det må dog tilføjes, at der er andre studenter med matematik på A-niveau, fx typisk i kombination med samfundsfag.

3.3. Hvad er faglighed i matematik?

En egentlig undersøgelse af den realiserede faglighed kræver, at man har mulighed for at observere i klasserum og at interviewe lærere og elever i og udenfor klasserumskonteksten, hvilket på ingen måde har været muligt for det ekspertudvalg, der står for denne undersøgelse. For det første er det selvsagt ikke muligt at være til stede i historiske klasserum, og for det andet er det ikke indgået i udvalgets kommissorium at lave undersøgelser i eller udenfor nutidige matematikklasserum. Tidsrammen for undersøgelsen har heller ikke tilladt det. De undersøgelser, der er gennemført, er derfor nødvendigvis indirekte. Ved at undersøge udvalgte eksamenssæt, elevbesvarelser og undervisningsbeskrivelser har udvalget derfor forsøgt at danne sig et billede af den bagvedliggende faglighed, som den har udfoldet sig i matematikundervisningen og matematiklæringen i et sammenhængende treårigt gymnasieforløb i matematik i stx til og med slut-eksamen i 3. g på højeste niveau, Mat-A. En sådan undersøgelse har givet mening, fordi udvalgsmedlemmerne tilsammen repræsenterer omfattende erfaringer med matematik og matematikundervisning i gymnasiet og i videregående uddannelser, og fordi det ved sideløbende litteraturstudier har været muligt at understøtte disse erfaringer med empiriske og teoretiske undersøgelser af matematikfaglighed, som er blevet brugt til at understøtte udvalgets teoretiske og empiriske overvejelser. Her kan bl.a. nævnes undervisningsministeriets rapport om udvikling af begreberne om matematikkompetencer (Niss m.fl. 2002) samt tekster om matematikdidaktik bredt (Blomhøj 2016), Realistic Mathematics Education og matematisering (Treffers 1987; Freudenthal 1991; Skott m.fl. 2008), instrumentel genese (Artigue 2002; Rabardel & Bourmaud 2003; Trouche 2004 og 2005; Skott m.fl. 2018; Geraniou & Jankvist 2019), matematisk tænkning og vidensformer (Duval 2006; Bergqvist 2007; Lithner 2008).

Eksempelvis kan vi også nævne et arbejde, som har været diskuteret i udvalget, nemlig en lingvistisk undersøgelse af forandringer i formuleringerne af eksamensopgaverne i high-stakes-matematik ved afslutningen af grundskolen i England (Morgan & Sfard 2016). Morgan & Sfard viser med meget illustrative eksempler, hvordan sammenlignelige matematikopgaver har ændret tekstuel karakter i perioden fra 1957 til 2011 – en ændring, som vi også kan genkende i de danske og nordiske opgaver, vi har analyseret.

Se endvidere figur 2-5 nedenfor, som viser danske eksamensopgaver i matematik på højeste gymnasiale niveau fra 1981, 1990, 2000 og 2010. I alle de valgte eksempler er fokus på funktionsundersøgelser, hvor slutmålet er bestemmelsen af værdimængden for en given funktion f og/eller tegning af grafen for f.

Eksemplerne fra 1981, 1990 og 2000 viser, at der skete en stilladsering af opgaveformuleringen, så der er kommet flere indledende spørgsmål, førend eksaminanden spørges om grafen for f og/eller en værdimængde for f. Der kan således over tid iagttages en stigende stilladsering af opgaverne, hvilket betyder, at eleverne i mindre grad selv skal opstille proceduren for løsning, mens opgaverne som helhed ikke er blevet lettere. Udvalget skønner, at det herved er blevet lettere at få karakteren 02 (at bestå), men lige så svært som tidligere at få 12.

Opgaven fra 2010 viser, at spørgsmålet om værdimængden for f ikke længere er relevant at spørge om, da matematiske værktøjsprogrammer er blevet udbredt, og de er krævede ved den skriftlige eksamen med hjælpemidler.

På trods af forandringerne af eksamensopgaverne ser vi imidlertid også, at det matematiske vidensområde, der behandles igennem gymnasiet henimod det højeste niveau, er stort set uændret (jf. metaforen matematikhuset). Med en lidt grov forenkling kan vi hævde, at matematikken er den samme over tid, men vilkårene for elevernes arbejde med og læring af denne matematik er markant forandrede, sådan som det i øvrigt også tydeligt fremgår af EVA-rapporten. For eksempel er opdeling i delspørgsmål givetvis en konsekvens af disse forandrede læringsvilkår. Opdelingen forekommer nødvendig for at forenkle præsentationen af eksamensspørgsmålene, et fænomen, som i yderste konsekvens kan være – men ikke nødvendigvis er – beslægtet med Brousseaus (1997) begreb Topaze-effekten. Det er en pointe hos Brousseau, at opgaven bliver en anden, når den brydes ned i delspørgsmål. Det, som var det egentlige vidensmål med opgaven, forsvinder. Derfor, selvom alle tre opgaver nedenfor handler om funktionsundersøgelse, er matematikken ikke helt den samme i dem – i hvert fald ikke set fra elevens ståsted: ”By choosing easier and easier questions, the teacher tries to achieve the optimum meaning for the maximum number of students. If the target knowledge disappears completely, we have the Topaze effect” (Brousseau 1997, s. 25). Forenklingen og opdelingen i delspørgsmål er dog ikke i sig selv et tegn på, at opgaverne er (blevet) lettere. Vi ser mange eksamensopgaver med en signifikant stigende sværhedsgrad hen igennem delspørgsmålene, således at de første måske godt kan klares med et grundlæggende arsenal af viden og færdigheder, som vi i denne undersøgelse betegner med et G, men hvor de sidste kræver en noget større parathed til at bringe flere kompetencer i spil, som vi i denne undersøgelse betegner med et V for vertikal matematisering og et H for horisontal matematisering. Den akkumulative dynamiske opbygning af disse kategorier af robusthed og parathed hos eleverne (indenfor gymnasiets stort set uforandrede matematikdomæne) har været et centralt omdrejningspunkt for udvalgets forståelse og beskrivelse af elevernes tilegnede faglighed. Kategorierne G, V, og H og det nævnte dynamiske blik på elevernes matematiklæring og deres tilegnede matematikfaglighed vil blive præsenteret i detaljer nedenfor.

Eksempler på udvikling i opgaveformuleringer. I alle de valgte eksempler er fokus på funktionsundersøgelse, hvor slutmålet er bestemmelse af værdimængden for en given funktion *f* og/eller tegning af grafen for *f*.

1. En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2 - xlnx, \quad x\epsilon R$$

Bestem værdimængden for funktionen.

Figur 2. Eksamensopgave Matematisk-Fysisk Gren Matematik II, 1981.

1. En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+6}$$

Undersøg *f* og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for *f*.

Figur 3. Eksamensopgave Matematisk-Fysisk Gren Matematik II, 1990.

Opgave 4.
(ca. 25 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x - 2 \cdot \sqrt{x}, \qquad x \geqq 0$$

Beregn nulpunktet for f.

Bestem monotoniforhold for f.

Tegn grafen for f, og angiv funktionens værdimængde.

I fjerde kvadrant afgrænser grafen for f sammen med førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der forekommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen.

Figur 4. Eksamensopgave Matematisk Linje, treårigt forløb til A-niveau, Prøven med hjælpemidler, 2000. Det røde rektangel markerer, hvilken del i opgaven der hører sammen med "startopgaven" fra 1981.

Opgave 11

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x + 1) \cdot e^{-x}$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

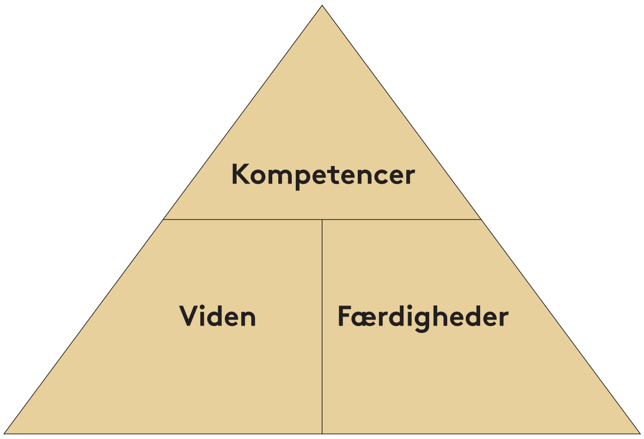
b) Bestem arealet af M.

c) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Figur 5. Eksamensopgave Matematik A, delprøven med hjælpemidler, 2010. Det røde rektangel markerer, hvilken del i opgaven der hører sammen med "startopgaven" fra 1981.

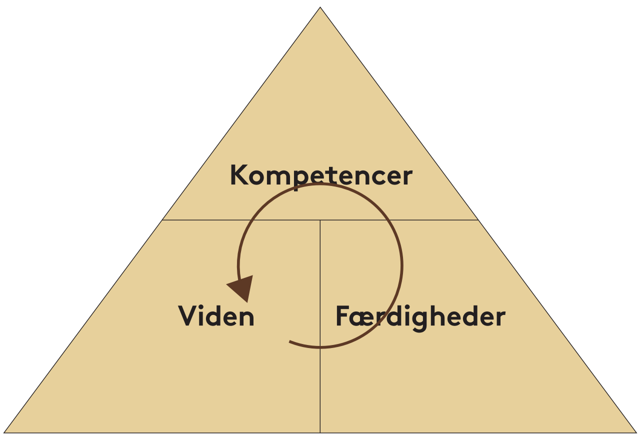
3.4. Dynamikken mellem viden, færdigheder og kompetence

I dette projekt forstås faglighed som en kombination af viden, færdigheder (kvalifikation) og kompetencer i overensstemmelse med den generelle analysemodel (se den generelle del af den samlede rapport) og Kvalifikationsrammen for Livslang Læring (2016). Selvom viden, færdigheder og kompetencer her beskrives hver for sig, udgør de en helhed som illustreret med trekantfiguren nedenfor. Man kan således ikke besidde kompetencer uden viden og færdigheder, og viden og færdigheder er nytteløse, hvis man ikke kan bringe dem i anvendelse, jf. følgende citat fra Niss & Højgaard (2019): "The important thing is not what you know but how you know it, and what you can do with what you know". Viden og færdigheder er et grundlagsarsenal (hvilket betegnes med et G i denne rapport), og kompetence er evnen til at udnytte dette grundlag på hensigtsmæssige måder til løsning af forskellige typer problemer, i forskellige situationer og med forskellige formål. Lithner beskriver en kompetence som "the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of mathematical contexts and situations" Lithner (2008, s. 269). KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002 p. 45) definerer en matematikkompetence som det at være i stand til, på grundlag af konkret viden og konkrete færdigheder, at udøve bestemte typer matematiske aktiviteter. Faglighed må forstås som denne helhed af viden, færdigheder og kompetencer.



Figur 6. Helhed af viden, færdigheder og kompetencer.

Fordelen ved ovenstående model er, at den giver en klarhed over relationerne mellem viden, færdigheder og kompetencer. Viden og færdigheder er grundlaget, som kompetencerne bygger på. Ulempen ved denne model er, at viden, færdigheder og kompetencer kan fremstå som statiske størrelser, hvilket er ganske uhensigtsmæssigt, når vi taler om progressiv læring for den enkelte elev i løbet af det 3-årige gymnasieforløb. Den forståelse, som lægges til grund her, er, at der er tale om et dynamisk forhold mellem viden, færdigheder og kompetencer, i hvert fald i den uddannelseskontekst som vi her analyserer. Vi kan tænke os, at en elev på et givet tidspunkt i sin Mat-A-uddannelse på grundlag af sin viden og sine færdigheder arbejder med en simpel modellering (kompetence) af et matematisk problem eller af et omverdensproblem. Når eleven på et tidspunkt mestrer denne type modellering, vil modellen indgå i elevens viden og færdigheder, som dermed øges, hvilket sætter vedkommende i stand til at arbejde med en mere avanceret modellering. Tankegangen er illustreret i figuren nedenfor.



Figur 7. Dynamisk helhed af viden, færdigheder og kompetencer.

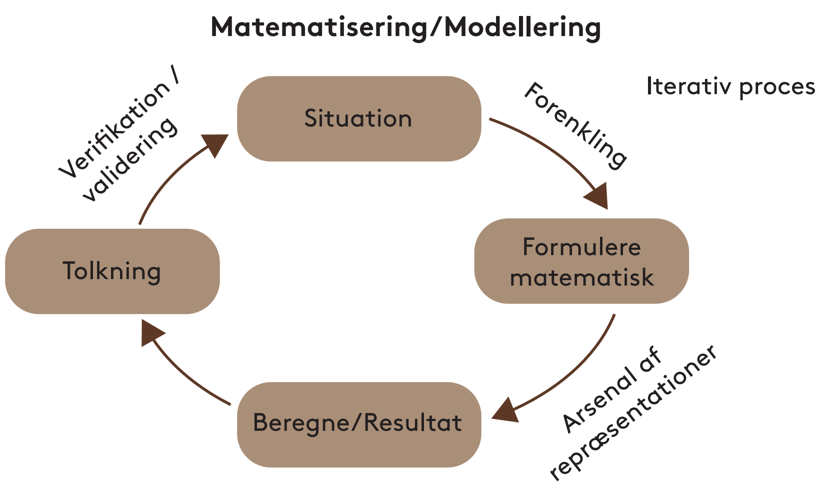
Denne tankefigur er, som allerede antydet ovenfor, gennemgående i udvalgets forståelse af opbygningen af matematiklæring og dermed af matematisk faglighed i en gymnasial kontekst, og den udvikles nedenfor til et læringshjul (se figur 8 nedenfor), og for udviklingen af tre grundlæggende analysekategorier, som vi benævner G, V og H (se ligeledes nedenfor). Tankefiguren genfindes hos Blomhøj (2016, s. 80 ff.) og Sfard (1991) i deres beskrivelse af begrebsdannelsens tre faser. I første fase opbygger eleven en intern repræsentation af en matematisk proces og bliver i stand til at tænke sig til, hvordan den skal udføres trin for trin (fx at beregne en funktionsværdi), uden faktisk at udføre operationen. I anden fase begriber eleven processen i sin helhed (funktionen som et hele) og konstruerer en betegnelse for denne. I tredje fase sker der en reifikation, dvs. at begrebet gøres til et matematisk objekt (eller en ting), som kan indgå i nye processer (fx funktionsbegrebet). Tankegangen genfindes også i forordet til *Vejledning til Matematik A/B/C, stx* (2018) i form af en metafor om en læringsspiral (se nedenfor). Den genfindes endvidere i teorien om den instrumentelle genese, som kan betragtes som en kvalificeret udfoldelse af KOM-rapportens hjælpemiddelkompetence, jf. Artigue (2002), Trouche (2004, 2005) samt Geraniou & Jankvist (2019).

Vi finder, at dynamikken i disse tre faser kan beskrives og analyseres rimelig fagnært i dette projekt, fordi det aktuelle domæne, matematikhuset, er robust veldefineret, i kontrast til KOM-rapportens domæne for karakteriseringen af generelle matematiske kompetencer "across and beyond subject matter areas and across and beyond education segments, institutions and levels, as well as of fields of mathematical practice [...]" (Niss & Højgaard, 2019).

Et problem ved en ikke-dynamisk forståelse af kompetencer er, at den lægger op til at forstå kompetencer som endemål og ikke som delmål i en spiralformet læreproces. Eleven har den og den viden, de og de færdigheder, og det giver de og de kompetencer på ethvert givet tidspunkt og sted i uddannelsen. En oversættelse af den dynamiske tankegang til definitionen af viden, færdigheder og kompetencer, som vi finder i delrapport 1, tabel 5, kan illustreres ved, at en viden om et matematikfagligt begreb, fx begrebet funktion, kobles med en færdighed i at kunne løse en ligning (jf. opgaveeksemplerne i figur 2-5 ovenfor), hvilket gerne skulle give eleven en kompetence i at bruge funktioner i mange fag, i praksis i fysik, kemi, biologi, geofag, samfundsfag (økonomi) mv. , men i høj grad også indenfor matematikken selv. I elevens videre læreproces afsætter denne kompetence, som i første omgang må anses for at være avanceret, sig i anden omgang som en udvidelse af elevens grundlæggende viden om funktioner og deres anvendelse, og en styrkelse af elevens færdighed i at arbejde med funktioner (færdighed i at løse mere komplekse ligninger). Den bliver en 'ting', der indgår i elevens viden og færdigheder (jf. referencerne til Sfard 1991 og Blomhøj 2016 ovenfor). Derfor vælger vi i analysen nedenfor at operere med en samlende betegnelse (G) for elevens grundlæggende arsenal af viden og færdigheder. G omhandler viden om og færdigheder i fagets begreber, metoder, tværfaglige og innovative. Elevernes personlige og sociale viden og færdigheder har udvalget ikke haft mulighed for at undersøge. Når vi vælger at operere med et samlende G for viden og færdigheder fremfor at pinde specifik viden og specifikke færdigheder ud, skyldes det, at viden og færdigheder er bundet sammen i et komplekst net (et arsenal af faglig viden og faglige færdigheder), som udgør en samlet ressource, som eleven aktiverer igennem sine kompetencer via arbejdet med matematikfaglige problemstillinger. Ikke desto mindre definerer vi mere i detaljer, hvad vi forstår ved matematikfaglig viden, matematikfaglige færdigheder og matematikfaglige kompetencer i tre separate afsnit nedenfor (afsnit 3.5, 3.6 og 3.7).

Det grundlæggende G-arsenal af viden og færdigheder er i ovennævnte forstand tydeligvis akkumulerende, voksende. Det betyder dog ikke nødvendigvis, at en tidligt tilegnet specifik elementær færdighed eller basal viden bliver overtaget, erstattet, eller indlejret i efterfølgende avancerede færdigheder og mere komplekse vidensformer. I eksamensopgaverne er det almindelig praksis at stille opgaver på søjleniveau 1 og 2 til den afsluttende eksamen i 3. g.

Faglighed er at kunne noget med et fag, fx at kunne anvende det som redskab til løsning af forskellige omverdensproblemer, evt. i samarbejde med andre fagligheder (hvilket denne rapport betegner med et H for horisontal matematisering), og at kunne arbejde problemløsende internt i faget (hvilket denne rapport betegner med et V for vertikal matematisering), begge dele ved brug af fagets metoder, begreber og teorier. Det indebærer, at man skal kunne kombinere fagets videns- og færdighedselementer og kunne koble disse med situationer og på problemer i verden samt udvide sin forståelse af fagområdet med ny teori. Faglighed forudsætter dermed også en evne til at kunne kommunikere i fagsprog og fagterminologi internt i faget og eksternt i forhold til andre fag. Matematikfaglighed er dermed grundlæggende en problemløsnings-, modellerings- og kommunikativ kompetence. Matematikken kobler abstrakte begreber til noget konkret i verden omkring os via tegn og symboler (Duval 2006, s. 106), og disse tegn og symboler bliver redskaber til problemløsning (tænk bare på differential- og integralregningen) og udgør effektive medier for kommunikation. KOM-rapporten fra 2002 (Niss m.fl., s. 45) sondrer mellem kompetencer i 'at spørge og svare i og med matematik' (undersøgende) og kompetencer i 'at omgås sprog og redskaber i matematik' (produktive). Dynamikken i matematisk (skole- og gymnasie-) faglighed svarer til, at eleverne på grundlag af G, det grundlæggende niveau af viden og færdigheder, der forventes i matematik på et givet uddannelsesniveau, i deres matematiske problemløsninger bevæger sig ind i V- og H-niveauer. Der er her tale om en iterativ proces, der også kan beskrives med termerne matematisering og modellering, og som er illustreret i figur 8. Disse niveauer diskuteres og defineres yderligere nedenfor.



Figur 8. Matematiserings- og modelleringshjulet i matematik.

3.5. Hvad gælder som viden i matematik?

Udvalget definerer matematisk viden som kendskab til grundlæggende matematisk notation (tegn og symboler), matematiske begreber og teori, færdigheder som mestring af matematiske algoritmer og det at kunne argumentere og ræsonnere på basis af en logisk opbygget struktur. Hvad der kan anses for basale krav til viden og færdigheder, afhænger selvsagt af det aktuelle uddannelsestrin (1., 2. eller 3. g) for den enkelte elev.

Centralt i den generelle model for projektet om faglighed i gymnasiet står begrebet vidensform. Det skal udtrykke, at det ikke er alt, der hævdes at være viden, som accepteres som sådan i et fag. Fag stiller specifikke krav til potentiel viden, for at den kan accepteres som faglig. I matematik er den fremherskende vidensform den abstrakt logiske, som sprogligt kan udtrykkes på matematiksymbolsk form, selvom der i de senere år er sket en ændring her i skolefaget. Traditionelt har et acceptabelt matematisk ræsonnement været logisk deduktivt (sand/falsk), hvor et acceptabelt ræsonnement i fx samfundsfag har været sammensat af skøn, rimelighedsbetragtninger, strategiske overvejelser mv. i tillæg til sand/falsk, dvs. i langt højere grad kontekst- og formålsbundet. Med indførelsen af kompetencebeskrivelser i læreplanerne fra 2005 og 2017 er der blevet rykket ved dette, idet matematik nu også skal arbejde med modellering og problemløsning, hvilket indebærer andre typer af ræsonnementer, herunder fx vurdering. Hvis man tænker sig en matematikers arbejde, vil der være forskellige faser i dette. Den første fase, hvor matematikeren opstiller formodninger og undrer sig over, hvad der kan være sandt, og hvilke formodninger det kan være rimeligt at opstille, er præget af vurdering og (tanke)eksperimenter. Kan dette eller hint være rigtigt? Under hvilke betingelser kan det være rigtigt? Når man så har formuleret en formodning, som man tror på, gælder det om at finde en logisk holdbar argumentation for, at den er rigtig. Vigtigt i denne proces er også eventuelt at justere påstanden i formodningen eller ændre betingelserne, for at påstanden skal være sand. En sådan arbejdsproces er godt beskrevet i bogen *Proofs and Refutations* af Imre Lakatos (1976). Det kan tænkes, at skolematematikken tidligere i stor grad beskæftigede dig med den logisk-deduktive fase, mens vægtningen heraf nu har ændret sig noget. I læreplanens formål formuleres det direkte, at matematik både skal arbejde med omverdensfænomener og logisk tænkning: ”Konkret skal eleverne opnå kompetence til at forstå, formulere og behandle problemer i relation til omverdensfænomener, såvel som viden om og kundskaber til at operere med matematisk ræsonnement, logisk tankegang og den kumulative opbygning af faget.” (*Læreplan for Matematik A – stx*, august 2017).

Med hensyn til den logisk-deduktive vidensform peger den franske matematikdidaktiker Raymond Duval (2006) på, at det, der adskiller matematik fra (de fleste) andre (skole)fag, er, at alle matematiske begreber er abstrakte. Matematiske objekter kan ikke sanses direkte, som omverdensfænomener kan, men kun gennem semiotiske repræsentationer. Han peger på tre karakteristika:

1. Stor betydning af semiotiske repræsentationer
2. Et kognitivt paradoks, der er knyttet til adgangen til de matematiske objekter
3. Stor variation i brug af semiotiske repræsentationer.

Det, Duval betegner som et kognitivt paradoks, består i, at semiotiske repræsentationer (tegn og symboler) er nødvendige for al matematisk aktivitet, og at man har et valg med hensyn til, *hvilke* semiotiske repræsentationer, man vil anvende (Duval 2006, s. 107). Matematiske objekter må aldrig forveksles med de semiotiske repræsentationer, der anvendes. En hyppig aktivitet i matematik er at skifte mellem og koordinere forskellige repræsentationsformer (registre) for samme matematiske objekt, og dette er ifølge Duval en stor udfordring: ”Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum” (Duval 2006, s. 128).

Tværfaglig viden, dvs. viden om fagets og de faglige metoders muligheder og begrænsninger i forhold til tværfagligt arbejde, er en vidensform, der fik stor betydning i gymnasiet med reformen fra 2005, en betydning, som er blevet fastholdt i reformen fra 2017. Nogle andre fag deler til en vis grad vidensform og sprog med matematik, mens andre ikke gør, hvilket bliver tydeligt, når matematik skal samarbejde med andre fag. Der er især sprogdeling med fysik, men også med andre naturvidenskabelige fag og fx økonomi. Fag, som benytter samme vidensform, må antages at have lettere ved at arbejde sammen end fag med forskellige vidensformer. Læreplanens krav om, at matematik skal arbejde med at forstå, formulere og behandle problemer i relation til omverdensfænomener, og som (jf. ovenfor) udvider, hvad der må opfattes som acceptable vidensformer i (skole)faget, må derfor formodes at øge fagets muligheder for tværfagligt samarbejde.

3.6. Hvad gælder som færdigheder i matematik?

Metodisk viden, dvs. viden om at undersøge, modellere, ræsonnere, fremstille, argumentere etc., er i princippet stærkt udviklet i faget, da disse handlinger er direkte knyttet til det deduktivt logiske og til de undersøgende iterative trial and error-processer, der knytter sig til matematiserings- og modelleringshjulet (se ovenfor). Men i praksis er sådanne selvstændige handlinger i matematik krævende for en del elever. Derfor benytter de sig af algoritmer og rutiniserede handlinger, som de undertiden har lært udenad (memoreret). Den svenske matematikdidaktiker Ewa Bergqvist siger herom, at brug af algoritmer og evnen til at fremstille en matematisk procedure selvstændigt faktisk er en central del af matematiklæring og kan udgøre et grundlag for forståelsen. Desuden medvirker algoritmer til, at eleverne kan slippe for lange og tidskrævende beregninger. Omvendt kan et for ensidigt fokus på algoritmer og rutineopgaver afskære eleverne fra dele af det matematiske univers, og de opnår således ikke selvstændig matematisk tænkning, som de har brug for, fx når de skal arbejde med problemløsning (Bergqvist 2007). Beherskelse af den grundlæggende matematik, herunder brug af algoritmer og rutiniserede handlinger, betegnes som nævnt i denne rapport med et G, hvor G skal forstås som en variabel, der er voksende med stigende uddannelsesniveau. Hvad der på et givet tidspunkt i en elevs uddannelse er ny og vanskelig matematik, indarbejdes efterhånden i elevens grundlæggende matematikforståelse og bliver dermed en del af elevens G-arsenal i form af mere eller mindre automatiserede algoritmer og rutiniserede handlinger.

I de sidste 30 år har matematiske værktøjsprogrammer fået stigende betydning i skolematematikken. I 1990'erne fik vi grafiske lommeregnere og i de senere år har CAS-værktøjer (Computer Algebra System) fået stor betydning. CAS-værktøjer var i brug i videnskabsfaget og i anvendelser af matematik, længe før de kom ind i skolefaget. Brug af matematiske værktøjsprogrammer afspejler sig i eksamenssættene, der er blevet todelt. En del uden hjælpemidler og en del med. Det fremgår også af eksamensopgaverne, hvor det i højere grad kræves, at eleverne forholder sig refleksivt. Sammen med læreplanens kompetencebeskrivelser, og formentlig også et bredere elevgrundlag, har det ledt til forandringer i fagligheden både på læreplansniveau og i den realiserede faglighed i undervisningen. Forandringer i fagligheden ses i forhold til CAS og andre værktøjsprogrammer, hvilket er noget andet end matematikundervisningens niveau og elevernes faglige niveau.

Med CAS-værktøjerne bliver eleverne i stand til at løse komplicerede opgaver, som det ville tage lang tid at løse uden, hvilket må ses som en fordel. Hertil kommer visualisering og det ikke at gå i stå i udregninger, hvorved den røde tråd tabes, hvilket også må ses som en fordel. Men hvis instrumentet bliver en black box i den matematiske arbejdsproces, betyder det typisk, at eleverne ikke opbygger forståelsen for de matematiske processer og begreber, hvilket er en klar forringelse. Derfor er det vigtigt at sikre, at eleven har kontrol over instrumentet og dets output, og det er vigtigt at være på vagt overfor, at det ikke er instrumentet, der styrer eleverne.

Processen med tilegnelse af instrumentet uden at miste forståelsen for matematikken betegnes instrumentel genese. Tilegnelsen har iflg. franskmanden Luc Trouche (2005, s. 144) to faser, som i grunden ikke adskiller sig fra tilegnelsen af et hvilket som helst værktøj. En elev, der præsenteres for et værktøj til brug i matematik, fx et CAS-værktøj, retter først sin opmærksomhed mod selve instrumentet for at lære at bruge det. Dette betegnes som en instrumentalisering, hvor eleven går på opdagelse i værktøjet og udvælger brugbare funktioner og procedurer. Denne fase handler strengt taget ikke om matematik, men om at udforske værktøjet og lære dets muligheder og begrænsninger at kende. På dette grundlag gennemgår eleven efterfølgende en instrumentering, der i princippet minder om skridtet, som eleven tager i sin matematikfaglige udvikling fra udførelsen af en matematisk proces til forståelsen af processen som et matematisk objekt (begreb). Instrumentering handler om at bruge redskabet til matematiske aktiviteter. For at komme fra fase 1 til fase 2 må der ske en instrumentel genese, som på den ene side ikke adskiller sig fra det at tilegne sig en hvilken som helst algoritme og efterfølgende automatisere brugen af den i arbejdet med matematiske problemer og på den anden side adskiller sig fundamentalt herfra, idet CAS-værktøjet repræsenterer en både kvantitativ og kvalitativ eksplosion i mulighederne for at arbejde med matematiske problemer. Hvis den grundlæggende matematikforståelse, som vi som nævnt betegner som G, ikke udvikles samtidig med instrumentaliseringen, er det ikke muligt at gå fra fase 1 til fase 2. At beherske instrumentet er på den ene side en færdighed, der skal læres (G), og på den anden side en mulighed for at arbejde med matematik på et langt højere niveau (V og H) med instrumentet end uden, fordi de undersøgende erkendelsesmuligheder udfoldes betragteligt. Instrumentel genese beskriver på et metaplan, hvordan matematiske processer og objekter indgår i elevens aktive og dynamiske matematikfaglighed, fx i elevens begrebsdannelse og modelbygning, og på et konkret plan beskriver begrebet, hvordan et it-værktøj bliver til et instrument for elevens arbejde med matematik.

Morten Blomhøj (2016, s. 119 ff.) skriver om forskellige former for elevvirksomhed i anknytning til den instrumentelle genese, som indfanger elevadfærden, og hvad vi mener med 'kontrol over instrumentet': når eleven usikkert er ved at lære programmet at kende, når eleven bruger programmet i løsningsorienteret virksomhed, og når eleven bruger værktøjsprogrammet i refleksiv elevvirksomhed. Et kardinaltræk i elevens forskellige virksomhedsformer er elevens kompetence og evne til at forholde sig kritisk til programmets output, elevens evne til kritisk at vælge metoder og procedurer i programmet og elevens evne til at undersøge og eksperimentere med sine modeller ved hjælp af programmet.

Udvalgets undersøgelser af de tidlige eksamensbesvarelser med udpræget brug af matematiske værktøjer som CAS fra 2010 (dog et meget lille datagrundlag) peger på, at eleverne ikke var opmærksomme på at dokumentere deres "mellemregninger"/"udregninger på CAS". Om det betyder, at de ikke havde kontrol over instrumentet, ved vi ikke. Derimod viser undersøgelsen af eksamensbesvarelser, at eleverne i 2018 i højere grad dokumenterer deres udregninger i de digitale værktøjer, hvilket muligvis kan tyde på, at eleverne i 2018 i højere grad har kontrol over instrumentet, end eleverne havde tidligere. Dette peger deres matematikfaglige refleksioner over output fra programmerne og deres argumenter og matematiske trin i løsningen af en given opgave også på.

3.7. Hvad gælder som kompetence i matematik?

CAS-værktøjer giver nye muligheder og måder at modellere og drøfte fx funktioner på, som erstatter tidligere brugte algoritmer (tidligere færdigheder), som baserede sig på tidligere manifestationer af instrumentel genese, eksempelvis med streger i sandet, papir og blyant, logaritmetabeller, regnestokke, lommeregnere, etc. Papir og blyant nævnes stadig direkte i læreplanen for matematik (som det eneste fag). Et nyt og udfordrende eksempel er læringen (og analysen) af funktioner af to variable, som nu i vid udstrækning formentlig kommer til at fordre en interessant CAS-instrumentering.

Det rejser flere spørgsmål, som vi ikke kan svare på, nemlig fx hvilken betydning de forskellige versioner af instrumentel genese, fx papir-og-blyant-værktøjer og CAS-værktøjer har haft og har for udviklingen af elevernes matematiske forståelse. Uanset svaret på det spørgsmål er digitaliseringen af samfundet og matematiske/datalogiske discipliner som maskinlæring, kunstig intelligens/ekspert-systemer, GPU-programmering, data science engineering, kryptologi med videre udtryk for en ny type omverdenskrav til matematikfagligheden. Dermed kan matematikkens orientering mod omverdenen få indflydelse på flere ”indre-matematiske” planer end blot i retningen af, at eleverne skal kunne forholde sig til modellering af omverdensproblemer (H) i den klassiske betydning, jf. Geraniou & Jankvist (2019).

Som allerede nævnt foregår elevens fremadrettede arbejde med matematiske teorier, vertikal matematisering (V) og horisontal matematisering (H) på basis af G (grundlæggende viden og færdigheder). Matematiseringsbegrebet stammer fra den hollandske RME-tradition indenfor matematikdidaktikken, se herom nedenfor. Vores brug af begreberne horisontal og vertikal matematisering er inspireret af RME-traditionen, men afviger også fra denne på enkelte punkter. Dette vil blive uddybet senere.

KOM-rapporten beskriver otte forskellige kompetencer, som er opdelt i to grupper. Den ene gruppe er strengt taget ikke matematiske kompetencer, men kompetencer, der også forekommer indenfor andre fagligheder, og som sætter eleven i stand til aktivt at undersøge matematiske problemer: tankegangskompetence, problembehandlingskompetence, modelleringskompetence og ræsonnementskompetence. Den anden gruppe er specifikke matematikkompetencer, der sætter eleven i stand til at være produktiv i matematikken: repræsentationskompetence, symbol og formalismekompetence, kommunikationskompetence og hjælpemiddelkompetence. De otte kompetencer forstås her som delkompetencer, eleverne benytter sig af i matematiseringsprocesserne, og det er en væsentlig konklusion i KOM-rapporten, at de otte kompetencer er i samspil med hinanden, når de anvendes.

Tværfaglige kompetencer forstås her som en del af H. Horisontal matematisering kan således både bestå i en matematisering på tværs af forskellige dele af matematikken og på tværs af matematik og andre fag på et givet niveau i uddannelsesforløbet.

3.8. Matematikhuset

På trods af den forandring af matematikfaget, der er sket med CAS-værktøjerne og kompetencebeskrivelserne, anser udvalget det grundlæggende matematikdomæne og den grundlæggende matematikfaglighed (i gymnasiets Mat-A-uddannelse) for uforandret i den undersøgte periode, jf. også eksemplerne på eksamensopgaver i den undersøgte periode, der er vist ovenfor. I udvalgets arbejde er metaforen matematikhuset blevet anvendt. På stx A-niveau drejer det sig om funktioner, geometri og statistik, der i forordet til *Vejledning til Matematik A/B/C, stx* (2018) er benævnt søjlerne i matematikdomænet det matematiske hus. Det, der har ændret sig, er de muligheder, man har i og med matematikken. Nogle af forandringerne ligger i den diskursive/tekstlige måde, matematiske problemer (eksamensopgaver) kommunikeres, i kompetencetænkningen og den problembaserede tænkning, der ligger i matematiseringen, i måden, eleverne kan tilgå matematiske fænomener og reflektere over disse på, måden, eleverne arbejder med og lærer matematik på ved brug af CAS-værktøjerne og ikke mindst de nye og eksplosive muligheder, det giver for at arbejde med komplekse matematiske problemer via den instrumentelle genese. Matematikhuset består af tre søjler: funktionsteori, geometri samt statistik og sandsynlighedsregning, jf. figur fra forordet til *Vejledning til Matematik A/B/C, stx* (2018) nedenfor.

3.9. Undersøgelse af matematikfaglighed i stx: definition af GVH-rammen

Betegnelserne G, V og H danner de grundlæggende enheder i denne analyse af stx-matematikfaglighed. De uddybes og defineres mere præcist nedenfor.

En undersøgelse af matematikfaglighed i stx kan ikke nøjes med at spørge til den viden og de færdigheder, undervisningen bringer i spil, og den viden og de færdigheder, eleverne har tilegnet sig. Disse ting er selvsagt meget vigtige, men de er ikke fyldestgørende i sig selv. Undersøgelsen må kunne sige noget om, hvad viden og færdigheder sætter eleverne i stand til at gøre indenfor matematikken og med matematikken i forhold til omverdenen. I denne undersøgelse skelner vi derfor som nævnt mellem tre momenter ved matematikken benævnt G, V og H, hvor G er grundlaget og V og H er kompetencer i at kunne anvende grundlaget indenfor matematikken (V) og i forhold til andre fag og omverdensproblemer (H).

Tænkningen omkring G-V-H-elementerne kobler sig endvidere tæt til undervisningsministeriets nu gældende vejledning til matematik (*Vejledning til matematik A/B/C, stx,* 2018). Heri udfoldes i forordet en tænkning om matematikundervisning, som ikke nødvendigvis er eller har været realiseret i praksis, og som derfor må forventes i nogen grad at repræsentere en præcisering af den intenderede gymnasiale matematikfaglighed. Brug af G-V-H-elementerne som grundlæggende analyseenheder i en undersøgelse af matematikfaglighed, som den har udviklet sig over de sidste 50 år, som i denne analyse, svarer derfor til at se fortidens matematik med nutidens/fremtidens briller. Der er tale om et valg, som er nødvendiggjort af, at *forståelsen* af matematikfaglighed ikke er konstant over tid (om end vi antager og observerer, at den er relativt stabil). Derfor vil et hvilket som helst valg af analyseenhed indebære et asynkront aspekt, og G-V-H-perspektivet anser vi derfor for at være det mest relevante, fordi det refererer til en nutidig/fremtidig matematikforståelse.

Både V og H er som nævnt udtryk for matematisering, hvilket betyder at modellere et problem matematisk – det er altså en proces. En udbredt forståelse af matematisering (som langt henad vejen ligger til grund for denne analyse) stammer fra den hollandske tradition med Realistic Mathematics Educations (RME). Grundlæggeren af RME, Hans Freudenthal, forstår matematisering som måder at tilrettelægge undervisningsprocesser på og skelner mellem to typer: 1) det at omforme et omverdensproblem (horisontal matematisering), så det kan behandles med matematiske midler, og 2) det at arbejde indenfor det matematiske felt (vertikal matematisering) (Freudenthal 1991, s. 41 ff.; Skott m.fl. 2008, s. 379 ff.). ”Ifølge Freudenthal drejer horisontal matematisering sig om at matematisere områder, der endnu ikke er sat på matematisk symbolform. I modsætning hertil er den vertikale matematisering et spørgsmål om at manipulere og videreudvikle noget, der allerede er på matematisk-symbolsk form.” (Skott m.fl. 2008, s. 399). Det var Adrian Treffers, som først indførte begreberne horisontal og vertikal matematisering (Treffers 1978, 1987). ”We distinguish horizontal and vertical mathematisation in order to account for the difference between transforming a problem field into a mathematical problem on the one hand, and processing within the mathematical system on the other hand” (Treffers 1987, s. 247 ff., se også s. 71).

Sammenholdes de otte kompetencer fra KOM-rapporten med Freudenthals begreber, kan vi som ovenfor nævnt se dem som delkompetencer, der bringes i spil i matematiseringsprocesserne, både de horisontale, hvor et omverdensproblem omformes til et matematisk problem, og de vertikale, hvor der videreudvikles en indsigt, der allerede er sat på matematisk symbolform. Horisontal og vertikal matematisering sammenfatter således det *at være i stand til på grundlag af konkret viden og konkrete* *færdigheder at udøve bestemte typer af matematiske aktiviteter*, altså matematikkompetencer. I denne rapport benyttes en udvidet definition af horisontal matematisering i forhold til Freudenthals. Hos Freudenthal er der tale om at gøre et omverdensproblem til et matematisk problem. Her defineres horisontal matematisering også som det at kunne tænke på tværs i matematikken og at kunne koble matematikken til andre fag. Det sidste er for så vidt i overensstemmelse med Freudenthals forståelse, idet andre fag må forstås som omverden til matematikken. Det første er en udvidelse af Freudenthals forståelse.

Lithner (2008, s. 257 ff.) foreslår begreberne *imitativ tænkning* og *kreativ matematisk funderet tænkning*, som føjer en ekstra dimension til beskrivelsen af G-V-H-elementerne, idet de peger på elevers begrebsdannelse og dermed deres måde at arbejde med og forstå matematik på. Lithner er selv skeptisk overfor brug af ordet 'kreativ', som han betegner som et hurra-ord, men han fastholder det i den betydning, at nye måder at tænke og angribe matematiske problemer på kan være kreative for eleven i dennes læreproces, hvilket er i modsætning til den situation, hvor eleven fastholder brug af kendte algoritmer, som viser sig utilstrækkelige og ufleksible. "Algorithmic fixation is the repeated use of an initially successful algorithm that becomes an inappropriate fixation" (Lithner 2008, s. 267). Matematisk kreativitet er kendetegnet ved dyb og fleksibel viden, der gør det muligt at indtænke nye måder at løse matematiske problemer på.

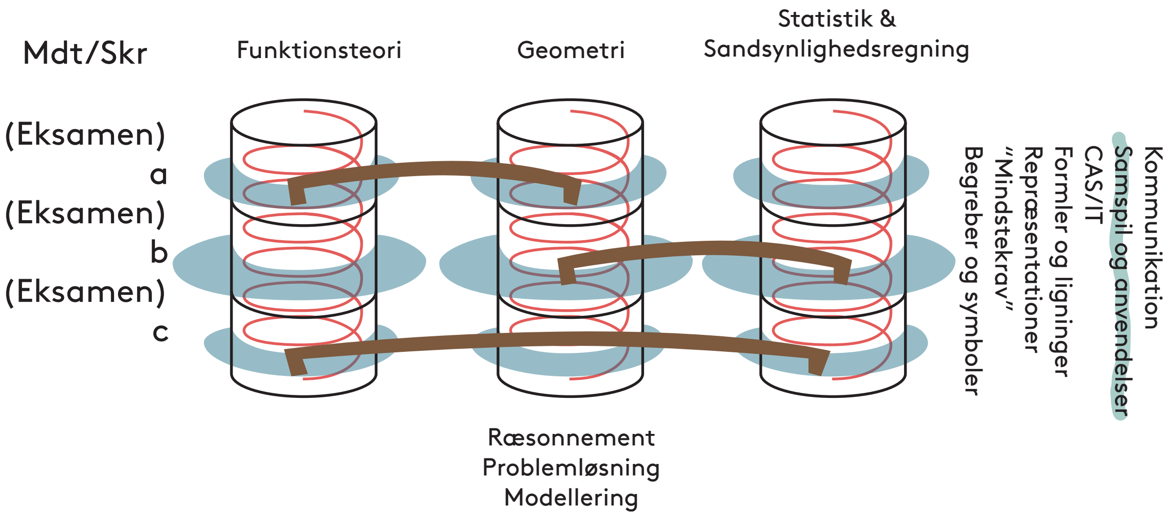
Det samlede begrebsapparat til beskrivelse af stx matematikfaglighed på A-niveau i denne rapport består således af tre elementer, G, V og H, og kombinationer af disse, som kobler sig til den forståelse af matematikfaglighed, vi finder i forordet til *Vejledning til Matematik A/B/C, stx* (2018).

- G: Defineres som en variabel bestående af et arsenal af grundlæggende *viden* i matematik og basale *færdigheder* i at arbejde med matematiske processer. Den vil være karakteriseret ved, at forventningerne til omfanget af dette basale arsenal vil være stigende med stigende uddannelsestrin. Det vil endvidere være karakteriseret ved imitativ matematisk tænkning, mønstergenkendelse. Hermed findes G lokalt hos eleven til en bestemt tid og i bestemte situationer.
- V: Den vertikale *kompetence* defineres som det at kunne videreudvikle noget, der allerede er på matematisk-symbolsk form. Den vil være karakteriseret ved, hvad vi kan betegne som en intern matematisk kreativitet; det betyder, at eleven kan se alle de trin, der skal til for at løse et matematisk problem, og eleven kan selv formulere denne procedurale fremgangsmåde.
- H: Den horisontale *kompetence* defineres som det at kunne tænke på tværs af fagområder internt i matematikken og at kunne koble matematikken med andre fag og/eller i forhold i omverdenen. Den vil være karakteriseret ved, at eleven formår at gå på tværs i matematikkens faglige områder i forhold til en omverdenssituation, hvad vi kan betegne som en ekstern matematisk kreativitet.

Note: V og H inkluderer altid G. En H-opgave, der bruger G på højeste niveau i forhold til, hvor eleven er i uddannelsessystemet, betegnes GH, mens en H-opgave, der alene bruger G på et meget elementært niveau, betegnes H.

Vejledningen opererer med en model for matematikfaglighed, der grundlæggende består af tre faglige områder (tre søjler): funktionsteori, geometri samt sandsynlighedsregning og statistik samt forbindelserne mellem disse. Disse er at betragte som videns- og færdighedsområder (se figur 9, s. 27).

Vejledningen benytter metaforerne søjle, spiral og spor, som henviser til V, og bro og altan, som henviser til H, og refererer samlet set til modellen som et didaktisk spiralprincip. Søjle og spiral giver



Figur 9. Model over søjler, broer og altaner i matematik. Forord til *Vejledning til Matematik A/B/C, stx* (2018).

sig selv. Metaforen spor knytter sig til den mulighed, som et (med vejledningens ord) alsidigt værktøjsprogram giver for at "introducere til begreber og procedurer, der teoretisk er knyttet til emner, der behandles grundigere på overliggende niveauer". I praksis tænkes her på arbejde med CAS-værktøjer, som giver eleverne mulighed for at arbejde med matematiske problemer, som de først bliver i stand til at forstå matematikken i på et senere niveau. Heri ligger, hvad der i den matematikdidaktiske litteratur benævnes instrumentel genese (se Trouche 2005; Skott 2018), dvs. at eleven først lærer teknikken (instrumentalisering) og derigennem tilegner sig forståelsen (instrumentering). Metaforen bro henviser til kombinationer på tværs af søjlerne, og altan til kig i retning af andre fag og omverdenen.

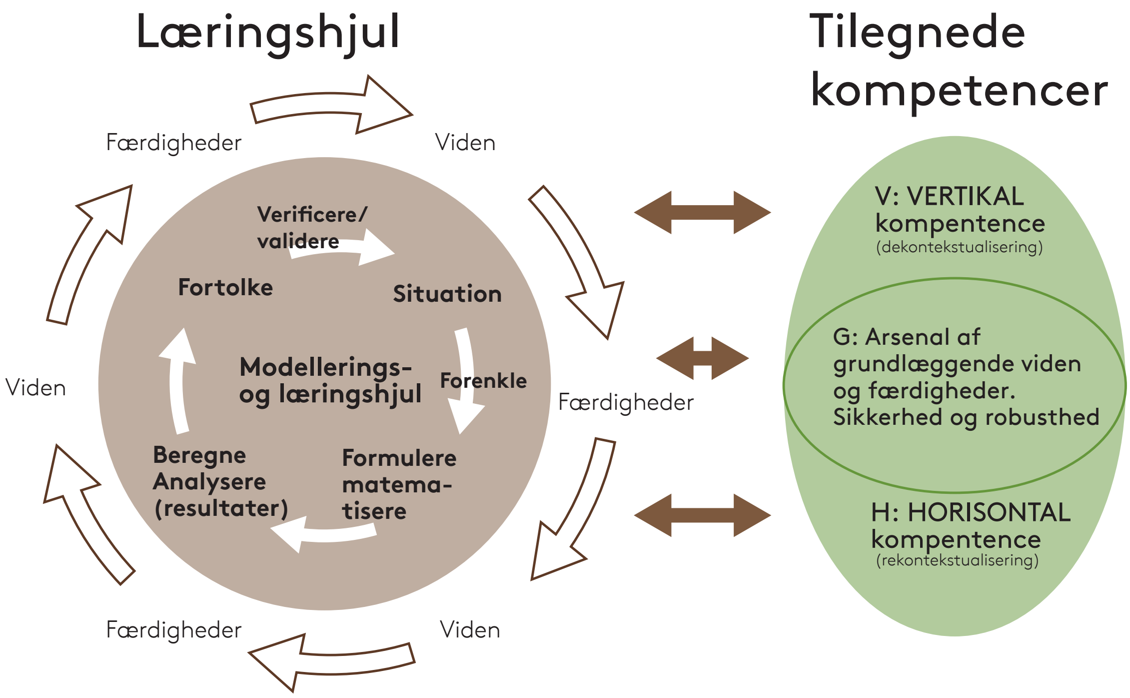
3.10. Elevers matematiklæring: proces og produkt

I den ovenfor skitserede faglighedsforståelse ligger en procestænkning. Elevens tilegnelse af matematisk kompetence bevæger sig vertikalt i spiraler og horisontalt ad broer og altaner. Den analyse, ekspertudvalget har haft mulighed for at gennemføre, består primært i en undersøgelse af eksamenssæt og elevbesvarelser, hvilket er produkter, hvor disse bevægelser i elevens læring ikke kan iagttages. Læringsprocessen til en given tid og på et givet niveau beskriver vi med et læringshjul, der på den udvendige side består af tilegnelse af viden og færdigheder og på den indre side består af en modellerings- og matematiseringsproces (se højre side af figur 10 nedenfor). Som minimum skal eleven tilegne sig viden og færdigheder for at kunne arbejde med matematik, dvs. arbejde med det ydre hjul. Men for at opnå en dybere forståelse af matematikken er eleven også nødt til at arbejde med det indre hjul. Ved at arbejde med læringshjulet opbygger eleven et arsenal af viden og færdigheder, en sikkerhed og en robusthed i sin matematikforståelse (G), som er grundlag for den vertikale (V) og den horisontale kompetence (H) (se højre side af figur 10). Elevernes opbygning af G-V-H-kompetencer virker tilbage på deres arbejde med læringshjulet.

I forhold til matematiske værktøjsprogrammer og den instrumentelle geneses to faser foregår instrumentaliseringen (at lære værktøjet at kende) i den ydre læringscirkel og instrumenteringen (at bruge værktøjet til matematiske aktiviteter) i den indre cirkel. Til grund for undersøgelsen af elevbesvarelser ligger der en antagelse om, at elever, der besvarer opgaver med elementer af vertikal kompetence og horisontal kompetence, i højere grad end andre elever har arbejdet med det indre læringshjul, dvs. selvstændigt har arbejdet med matematisering og modellering. Men det er ikke det, udvalget undersøger. Ved undersøgelse af undervisningsbeskrivelser søger vi dog at få et indblik i H-arbejdet i skolernes matematikundervisning.

3.11. Måling af elevernes matematikfaglige niveau: F/R/I-U-rammen

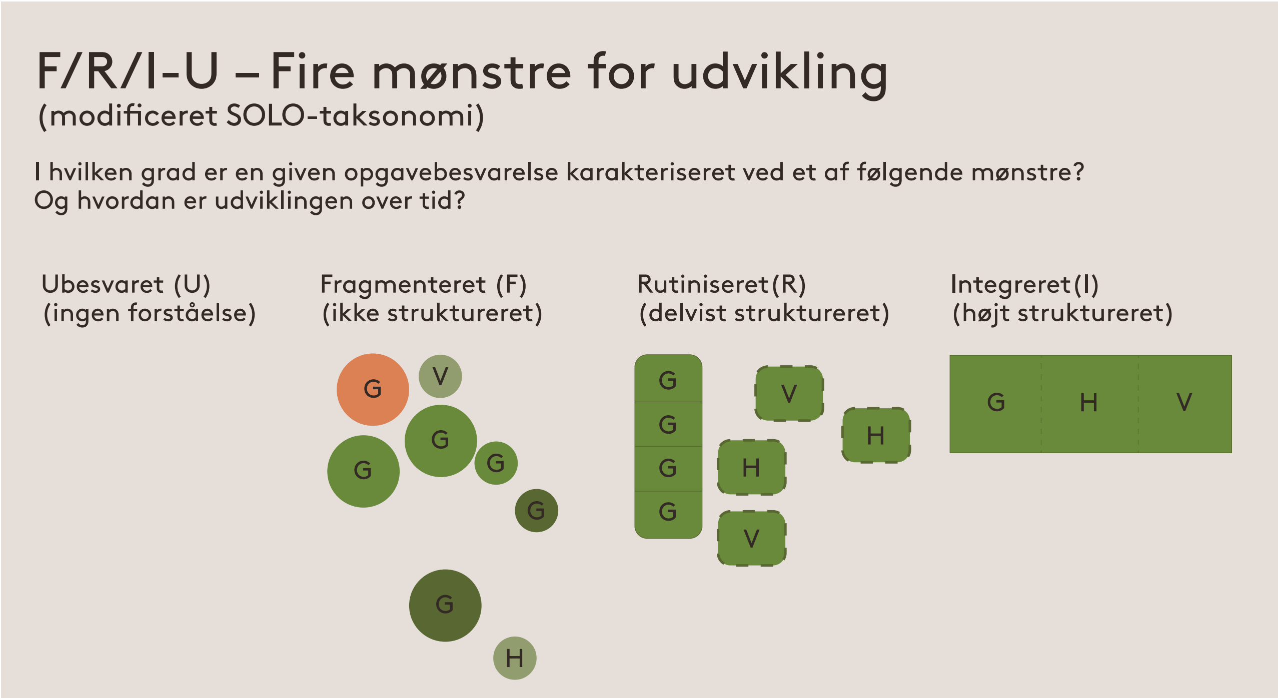
G, V og H er udtryk for de niveauer, der efterspørges i eksamensopgaver. G er defineret som det arsenal af grundlæggende færdigheder og sammenhængende matematisk forståelse, som læreplanen forventer, at en elev på et bestemt uddannelsestrin har. For at mestre dette må eleven benytte sig af algoritmisk tænkning og udenadslære, hvilket Lithner betegner som imitativ tænkning. Det vil vi i denne undersøgelse betegne som et rutiniseret niveau. Hvis en elev kun delvist mestrer dette niveau, betegner vi det som et fragmenteret niveau (F), hvis en elev derimod mestrer det, betegner vi niveauet som rutiniseret (R). Hvis eleven på kreativ vis bryder grænserne for G og kan arbejde med V og H, betegner vi det som et integreret niveau (I). F-R-I-skalaen læner sig op ad SOLO-taksonomien og kan ses som en forenklet udgave af denne. Vi har tilføjet kategorien (U), der henviser til 'ubesvaret opgave' og 'ingen matematikfaglig forståelse hos eleven'. F/R/I-U-rammen giver mulighed for forholdsvis enkelt at observere mønstre i elevbesvarelserne (se figur 11, s. 29).



Figur 10. Model over læringshjul og tilegnede kompetencer i matematik.

3.12. Hvad kan vi undersøge?

Da denne undersøgelse omfatter eksamenssæt og elevbesvarelser over tid, vil det være muligt at iagttage, om der har fundet en ændring sted i eksamenssættenes efterspørgsel af G, V og H, og i hvilken grad elevbesvarelserne honorerer kravene i de stillede opgaver. Til det sidste benytter vi ovenstående skala, U for ubesvaret/ingen forståelse, F for fragmenteret/ikke struktureret, R for rutiniseret/delvist struktureret og I for integreret/højt struktureret.



Figur 11. Model over mønstre for niveau i elevbesvarelser i matematik.

Ved undersøgelse af undervisningsbeskrivelser fra 2008 til 2018 og via en spørgeskemaundersøgelse søger udvalget endvidere at indkredse, om der kan spores en udvikling i forhold til den instrumentelle genese, og helt enkelt, om der har været en udvikling i undervisningens arbejde med G-, V- og H-elementer.

Undersøgelsen har afgrænset sig til 3. g A-niveau, for elever, der har valgt et A-niveau-forløb allerede i 1. g, idet vi anser dette for at være det højeste stx-matematiske niveau. I de ældre eksamenssæt er det matematik for mat-fys-hold (eller tilsvarende), der er blevet undersøgt. Alle eksamenssæt fra 2008 og frem (2005-reformen) har været todelte. En del uden hjælpemidler og en del med hjælpemidler.

Spørgsmålene i de undersøgte eksamenssæt er omhyggeligt blevet kategoriseret efter følgende betegnelser:

G, hvis et spørgsmål alene efterspørger matematik på et grundlæggende niveau,
V, hvis et spørgsmål efterspørger vertikal matematisering,
H, hvis et spørgsmål efterspørger horisontal matematisering,
GH, hvis et spørgsmål efterspørger horisontal matematisering og samtidig efterspørger matematik, på et grundlæggende niveau i betydelig grad,
HV, hvis et spørgsmål efterspørger både horisontal og vertikal matematisering.

Betegnelserne er endvidere blevet forsynet med betegnelsen for, hvilken søjle der er tale om:

Funk, for funktionsteori,
Geo, for geometri,
Funk/Geo, hvis spørgsmålet går på tværs af Funk og Geo,
Stat, for Statistik,

og et tal, som betegner søjlehøjden:

1, for laveste søjlehøjde,
2, for mellemste søjlehøjde,
3, for højeste søjlehøjde.

En samlet betegnelse kan eksempelvis være VFunk3, som angiver, at der er tale om et spørgsmål om funktionsteori, som kræver vertikal matematisering, og som stiller krav om højeste niveau for at blive besvaret.

For hvert af de undersøgte år har vi indenfor hhv. funktionssøjlen og geometrisøjlen udvalgt et spørgsmål på højeste niveau, dvs. på niveau 3 eller niveau 2, hvis der ikke var et spørgsmål på niveau 3. Disse spørgsmål, som repræsenterer det højeste matematikniveau i et års eksamenssæt, har vi sammenholdt med F/R/I-U-bedømmelserne af de modsvarende elevbesvarelser, der indgår i vores datamateriale. Herved får vi både et billede af det højeste matematikniveau i eksamenssættene og et billede af, hvordan eleverne klarer/mestrer disse opgaver.

4. Kort om læreplanen

Vi har valgt at inkludere beskrivelsen af den gældende læreplan i afsnittet om analysemodellen ovenfor, da analysemodellen essentielt er afledt af den vejledende beskrivelse. Der henvises derfor dertil.

5. Undervisningsbeskrivelser

5.1. Metoder og materialer

Undervisningsbeskrivelserne omhandler stort set kun, hvilket stof der er blevet undervist i, og kun perifert hvordan og hvorfor. Det betyder, at det ikke har været muligt systematisk at analysere dem i forhold til viden, færdigheder og kompetencer. Da vi ovenfor har konstateret, at kernefagligheden er ret stabil over tid, har vi valgt at fokusere på det supplerende stof, som vil kunne indikere noget om udviklingen i fagligheden. Der henvises til rapportens datablad for oversigt over, hvilke undervisningsbeskrivelser der indgår i analysen.

Undervisningsbeskrivelser med henblik på identifikation af **V (= nye emner), H og HV-emner.** Emnerne dækker over såvel Projekter i forbindelse med den daglige undervisning, Indgående stof i forbindelse med almen studieforberedelse (AT) og/eller studieture eller enkeltstående forløb.

Årstal er anført for at se, om der skulle være en udvikling over år.

5.1.1. Forbehold/kommentarer

- ”Papir er taknemmeligt”.
- Modulantal for hele forløb er dels ikke sammenlignelige, da modullængder kan variere fra skole til skole, dels ofte ikke er anførte.
- Skelnen mellem projekter og temaopgaver tyder mere på at være traditionsrelateret/ skoletradition end defineret efter fagkonsulentens udmelding.
- Omfanget (timeforbrug og tidshorisont) af projekter og temaopgaver er ikke kendt, ligesom eventuel skriftlig aflevering med feedback ikke er kendt.
- Detaljeringsgraden i undervisningsbeskrivelserne følger læreren fremfor emne og årstal.
- Der er typisk brugt bogsystemer til kernestof, mens det supplerende stof er en blanding af kapitler i bogsystemer, egne noter og noter fundet på nettet (emu, kolleger osv.).
- Brugen og omfanget af digitale matematikfaglige værktøjer i undervisningen kan ikke læses af undervisningsbeskrivelserne. Didaktiske overvejelser kan ikke læses af undervisningsbeskrivelserne (i relation til mønstergenkendelse, kreativitet osv.).
- Utrolig stor forskel på detaljeringsgraden i de enkelte undervisningsbeskrivelser kan skyldes skoletradition, bogsystem, lærertype m.m.

- Nogle af undervisningsbeskrivelserne har været opgraderingshold/1-årige forløb og er derfor udeladt de pågældende år.
- Sammenfaldende emner samme år men fra forskellige skoler er ikke anført flere gange i nedenstående oversigt, idet sammentælling ikke er muligt, i forhold til reelt tidsforbrug.

5.2. Resultater (deskriptive analyser)

Data

Årstal	Emne (undervisningstype)
2007	Historisk: Den matematiske begejstring (Forløb) Generel udvikling af Maple
2008	Fysiologiske målinger og modellering
2009	Introduktion til Maple
2010	Praktiske eksempler på vækst (projekt) Polynomier af højere grad (del af forløb) Projekt om modeller Parameterkurver (projekt, Vektorer) Matematikkens deduktive væsen "Sådan læser man en matematisk tekst" Komplekse tal Ægyptisk matematik Fibonaccital og Det gyldne snit Pascals trekant Forskellige beviser for Pythagoras' sætning Intro til Geometer Lorenzkurver og Ginikoefficient – fattigdom i DK? (AT) Lommeregnerkursus Epidemimodeller (sro) Trediegradspolynomier (forløb)
2011	Matematikkens deduktive væsen (trigonometri og diff.ligninger) Praktisk anvendelse af geometri og trigonometri-projekt Numeriske metoder (SRO) 3D-bogstaver (del af forløb) Kryptering (AT) Kædereglen (supp. stof) Øjeblikkelig hastighed Funktionspapir Det gyldne snit og Fibonaccital Studietur: Topologi, Fraktaler, Grafteori, Kædelinjer, cosh(x) og sinh(x)Historisk matematik Triangulering Geometrien bag perspektivet Matematikkens deduktive væsen Model for skorsten Kryptologi (Bletchley Park) (AT) Taylor polynomier ved PH-beregninger (SSO) Optimering ved fremstilling af farvelagte mønstre (AT)

	Reaktionskinetik Betinget sandsynlighed (sro med biologi) Maple Meningsmålingers troværdighed og virkning (AT) Økonomi: omkostninger, omsætning og avance (forløb) Kinematik Challengerulykken (projekt) Algebra, kompositioner, grupper, neutrale element, inverts element Vækst og økonomisk kredsløb (AT) Chi-i-anden på bygplanter (sro) Livsforsikringer (AT)
2012	Historieprojekt om oplysningstiden Parameterkurver (projekt) Projekt i differentialligninger (salt i beholder) Radioaktivt henfald Helikoider, paraboloider, hyperboloider Differentialregningens historie Geometriske modeller Deduktive og induktive slutningsformer Keplers love og ellipsebaner, Halleys komet Differentialligningsmodeller (Temaopgave) Lorenzkurver og Ginikoefficient – fattigdom i DK? (AT) Betinget sandsynlighed og Bayes formel t-test (studietur) Fibonacci og Det gyldne snit, Geometri i naturen Optisk bedrag med udgangspunkt i bandereklamer til fodboldkampe (projekt) Kvantitative metoder (AT)
2013	Ellipsen som geometrisk sted Indsamling af data i Budast til chi-i-anden senere på skoleåret Parameterkurver (SRO) Fordybelsesprojekt: parameter- og banekurver Simuleringer (forløb sandsynlighedsregning) Grafteori (forløb) Summer Lige og ulige funktioner (forløb) Matematikkens historie (forløb): ægyptisk, babylonsk og græsk matematik Rækker og følger (forløb) (Komplekse tal?) Temaopgave i optimering Genetiske fodspor Den gode matematikaflevering Historisk matematik (artikler fra Videnskab.dk) Et-tallets historie (film) Vækstmodeller (temaopgave) Konstruktion af trekanter med Nspire Optimeringsproblemer (temaopgave) Mono- og polyalfabetiske kryptosystemer – enigmamaskinen (AT) Keglesnit – især ellipsen, planetbevægelser (SRO) Eksperimentel tilgang til harmoniske funktioner Fibbonaccital og Det gyldne snit Temperaturer og temperaturskalaer (projekt)

	Isolering og varmetab (projekt) Geometriprojekt, eksperimenter med højdebestemmelse Opvarmning og afkøling af vand (projekt) Navigation (studietur) Differentialligningsprojekt: Andenordens diff.ligninger, Harmonisk og dæmpede svingninger (eksperiment), Logistisk vækst for USA's befolkning 1800-1940 Pythagoras sætning (projekt) Vækstmodeller (projekt) Rolles – Middelværdi- og monotonisætning
2014	Historisk forløb – Regnestokken Modeller (?) Projekter ... Toricellis lov Matematik i renæssancen Temaopgave om geometri i praksis Almindeligt sprog og matematisk sprog Forløb: Gaudi – Geometrien bag arkitekturen Differentialligninger og kolesterolniveau hos mennesker Matematiksprog/dagligdagssprog Kroppen (AT) Matematik og madvarer Felix Baumgartners spring "Huspriser giver højere karakterer" – fra Søndagsavisen Spørgeskemaundersøgelse om unges vaner (temaopgave) Rovdyr/byttedyr-model (temaopgave) Anamorfoser Fermats sidste sætning Det gyldne snit og Fibonaccital Uendelighed Triangulering Mængdelære og Logik (Forløb) Bevisteknik (forløb) Uendelighed (samarbejde med dansk) Astronomiske afstande Det gyldne snit i kunst og matematik Østbroen over Storebælt – analyse af arkitekturen CAS-kursus (forløb) Kryptering og Enigma (sro) Sætning-bevis-træning (forløb) Simulering med nspire, terningskast Ikke-euklidsk matematik
2015	Praktisk anvendelse af geometri og trigonometri Projekt om lineær vækst Matematik i renæssancen (forløb) Matematikkens deduktive væsen (del af flere forløb) Differentialligningsmodel AT: Matematiske beviser (sammen med historie) AT: Den naturvidenskabelige revolution i renæssancen AT: Kommunikation (sammen med dansk) Differentialregningsrapport Enzymkinetik og Michaelis-Menten-modellen (SRO) Historie: Talsystemer, inkommensurable størrelser, diskrete tal, kontinuerte geometriske størrelser

	Vinkler i polygoner og fliselægning Manhattenprojekt, simulering Tivoli-matematik-fysik Vandforsyning i det gamle Rom, modeller, Roms breddegrad ved middagsskyggen Fjedersvingninger og dataanalyse Keglesnit – Rigsdagskuplen Hauptbahnhof i Berlin Arkitektur og allometrisk skalering Barcelona i matematisk perspektiv
2016	Geometriprojekt Terningekast og penduler (del af forløb om vækst) Projekt om epidemimodeller Forsøg med Newtons afkølingslov (del af forløb) AT: bakterievækst AT SIR-modellen Fibonacci og Det gyldne snit (AT) Datafangst – Golden Bridge Dynamisk grafsporing Græsk matematik (studietur) Polynomiers division Separation af de variable
2017	Binære talsystem (del af Tal-forløb) Cramers regel (del af Vektor-forløb) Vinkelsum i konveks polygon Temaopgave Trigonometri Kurvelængder Dykning (modeller) Triangulering Det gyldne snit – kropsproportioner (AT) LoggerPro – længde- og højdespring Hoppebold Matematisk pendul Matematik og økonomi (temaopgave) Newton og differentialregning Statistisk undersøgelse af maltesere og danskere (studietur) Afstandsbestemmelse på jordoverfladen Hardy-Weinberg og chi-i-anden (SRO) Plejebosag og triangeltest Rovdyr/byttedyr-model (Temaopgave) Differentialligninger i bioteknologi (ebola, kræft, pest m.m.) Plane bevægelser og banekurver (temaopgave) Lineære sammenhænge (rapport) Vækstmodeller (rapport) Flaskedesign og optimering (rapport) Anamorf projektion Euklids elementer Polynomiers division Newton-Raphsons metode og Bisection-metode
2018	Euklids elementer Det gyldne snit (AT) Fokus på at skrive matematik Fokus på mundtligt at fremlægge bevis

	Optimering (projekt) Kriminalitet i USA – hypotesetest (AT) Følgere og rækker Funktioner af to variable Talteori Logik og bevisteknik (AT) Projekt om polynomier Flaskedesign og optimering Opstilling af model over gærudvikling Projekt om omdrejningslegemer Anamorf projektion Tredjegradspolynomium (noter) Polynomiers division, polynomiumsbrøker Taylorpolynomier (forløb) 3D-projekt

Tabel 4. Oversigt over supplerende stof (analyse af undervisningsbeskrivelser 2007-2018).

Tabel 5 på side 39 opsummerer analysen af undervisningsbeskrivelserne. Vi har samlet opsummeringen i en tabel af hensyn til overskuelighed. Tabellen skal læses i *kolonner*, da rækkerne ikke giver mening. De tre første grå kolonner henviser til vores kategorisering af historisk matematik, videnskab og modellering som undervisningsemner. De næste tre rødlige kolonner henviser til de tre matematikfaglige søjler og deres tilhørerende emner. Den sidste grønne søjle er nye emner.

5.3. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner på analysen af undervisningsbeskrivelser

Alle de undersøgte 3-årige A-niveauhold er undervist i læreplanens kernestof, dvs. matematikhuset er konstant i den undersøgte årrække, og indenfor den konstans oplever vi, at læreplanerne bliver opfyldt. Undervisningsbeskrivelser og analyse af elevernes eksamensbesvarelser siger ikke, hvad eleverne har lært. For at få indblik i, hvordan og i hvilket omfang eleverne har arbejdet med stoffet, er det nødvendigt at observere undervisningen. Der kan ikke på grundlag af undervisningsbeskrivelserne konkluderes på balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer, men vi kan konstatere, at konnektiviteten i domænet, forstået som progressionen i og imellem de matematikfaglige søjler, er til stede.

Søjler, spor og altaner genkendes i undervisningsbeskrivelserne for alle årene. Opfyldelsen af læreplanen for Matematik A i stx sker i den samme rækkefølge indenfor de matematiske fagsøjler, idet den typiske gennemgang af kernestoffet (søjlerne: funktioner, geometri samt statistik og sandsynlighed) er:

1. g: Grundlæggende begreber, Trigonometri, Lineære funktioner, Eksponentielle funktioner, Potensfunktioner, Vækstmodeller, Polynomier,

2. g: Differentialregning, Integralregning, Statistik & sandsynlighedsregning,

3. g: Differentialligninger, Vektorer i 2 og 3 dimensioner, Trigonometriske funktioner (samt Valgfrit emne).

Historisk matematik	Videnskab	Modellering	Funktioner	Geometri	Sandsynlighed og statistik	Nye emner
Fra Kepler til Newton	Matematiks rolle i udviklingen	Praktiske eksempler på vækst	Polynomier af højere grad	Geometri i praksis	t-test	Binære tal
Videnskab i renæssancen	Matematikkens deduktive væsen	Projekt om modeller	Parameterkurver	3D-bogstaver	Dataindsamling (studietur)	Grafteori
Kryptering, Enigma	Deduktive og induktive beslutningsformer	Newtons afkølingslov	Numeriske metoder (SRO)	Deduktive væsen	Genetiske fodspor	Læsning af matematisk tekst
Oplysningstiden		Epidemier	Kædereglen	Vinkelsum i konveks polygon	"Huspriser giver højere karakter"	Komplekse tal
Regnestokken		Toricellis lov	Differentialligningsmodel	Helikoider, paraboloider, hyperboloider	Hardy Weinberg	Topologi
Beviser		Radioaktivt henfald	Ellipsen som geo-sted	Triangulering	Plejebosag	Fraktaler
Fibonaccital og Det gyldne snit		Enzymkinetik og modelvurdering	Summer	Konstruktion af trekanter med Nspire	Triangeltest	Den gode matematikaflevering
Descartes normalmetode		SIR-model	Lige og ulige fkt	Vinkler i polygoner og fliselægning	Kriminalitet i USA	Perspektivtegning
Fermats tangentmetode		Bakterievækst	sinh(x) og cosh(x)	Vandforsyning i det gamle Rom	Livsforsikringer	Mono- og polyalfabetiske kryptosystemer
Leibniz' differentialer		Manhattenprojekt simulering	Fysiologiske tests og modellering (AT)	Keglesnit – Rigsdagskuplen Hauptbahnhof i Berlin		Anamorfoser
Newtons fluxioner		LoggerPro – længde- og højdespring	Funktionspapir	Arkitektur og allometrisk skalering		Følger og rækker
Gaudi – arkitektur		Hoppebold	Differentialligning – Kolesterol	Dykning (modeller)		Talteori
Talsystemer, inkommensurable størrelser, diskrete tal, kontinuerte geometriske størrelser		Matematisk pendul	Kurvelængder	Østbroen over Storebælt		Logik og bevisteknik
Fermats sidste sætning		Kinematik	Taylor polynomier			Optisk bedrag
Newton og differentialregning		Gærvækst	Keplers love og Ellipsebaner			Uendelighed
Euklids elementer			Matematik og madvarer (diff.)			Algebra (grupper m.m.)
Græsk matematik			Planetbevægelser			
Ikke-euklidsk matematik			Rovdyr/byttedyr			
			Tivoli-matematik- fysik			
			Bioteknologi projekter			
			Banekurver			
			Funktion af to variable			
			Lorenzkurver og Ginikoefficient			
			Temperaturer og temp-skalaer			
			Newton-Raphsons metode og Bisectionmetode			
			Polynomiers division og polynomiumsbrøk			

Tabel 5. Opsummering af analysen af undervisningsplanerne.

Analysen viser dertil, at man i vid udstrækning forsøger at arbejde tværfagligt, dvs. horisontalt fra matematik ud mod andre fag. Følgende er eksempler på sådanne ”horisontale” emner fra undervisningsbeskrivelserne:

- **Bio**: Fysiologiske tests og målinger, Kolesterolniveau beskrevet med differentialligninger, Rovdyr-Byttedyr, Højde- og Længdespring (dataopsamling), Bakterievækst, Epidemier, Dykning, Hardy-Weinberg, Triangeltest, Genetiske fodspor, Betinget sandsynlighed, Gærvækst.
- **Fysik**: Keplers love, Tivoli-mat-fys, Hoppebold, Svingende pendul, Radioaktivt henfald, Newtons afkølingslov, Manhattenprojekt, Toricellis lov, Kinematik, Isolering og Varmetab.
- **Kemi**: Enzymkinetik.

Der er markant flest H-emner med relation til de naturvidenskabelige fag (fys, bio, ke) men også eksempler på samarbejder med historie og samfundsfag. Matematik er også indgået i en del AT-forløb, både med udvidet kernestof og helt nye emner såsom: Binære tal, Komplekse tal, Topologi, Fraktaler, Perspektivtegning, Kryptologi, Følger og rækker, Talteori, Anamorfoser og perspektivtegning, Logik. Samarbejdet med historie har bl.a. været om: Regnestokken, Fermats tangentmetode, Fibonaccital og Det gyldne snit, Newton og differentialregning, Descartes’ normalmetode, Leibniz’ differentialer, Newtons fluxioner, Gaudi og arkitektur, Euklids elementer, Triangulering.

Samfundsfag og matematik har arbejdet sammen om: Kriminalitet i USA, Plejebosag, ”Huspriser giver højere karakterer”, Fattigdom i DK, Livsforsikringer.

VH-emner: Planetbaner, Rovdyr/byttedyr-modeller (koblede differentialligninger), SIR-model, Enigma, Vandforsyning i det gamle Rom (grafteori), Keglesnit i Berlins bygninger.

V-emner: sinh(x) og cosh(x), Kurvelængder, Taylorpolynomier, Ellipser, Banekurver, Funktion af to variable, Numeriske metoder.

Med hensyn til digitale matematikværktøjer er det kun de første år (til og med 2010), hvor der i undervisningsplanerne ses projekter/temaopgaver, der udelukkende handler om fx et CAS-værktøj. Herefter må det så antages, at brugen af CAS-værktøjet indgår naturligt i den daglige undervisning, hvilket også understøttes af spørgeskemabesvarelser fra gymnasiet.

6. Eksamenssæt

6.1. Metoder og materialer

Eksamenssæt for matematik studentereksamen erhvervet fra Matematiklærerforeningen har været brugt i denne undersøgelse (se afsnit 13: Datagrundlag for rapporten, for oversigt over anvendte eksamenssæt). Det er vigtigt at være opmærksom på, at forskellige perioder har været forbundet med forskellige eksamensformer, og at der har været forskellig tradition for antal af opgaver. Derfor er analyserne med vores GVH-terminologi udført på *alle* opgaverne i et givent eksamenssæt, hvorefter analysen er harmoniseret, så opgaverne rapporteres som %-andel af den samlede mængde opgaver i et eksamenssæt. Metodisk er eksamenssættene kodet af mindst to deltagere fra ekspertudvalget, og derefter er kodningen af opgaverne med GVH-kategorierne kalibreret i fællesskab i forbindelse med udvalgets møder.

Vi har i udvælgelsen af eksamenssæt fokuseret på at analysere eksamenssæt:

- Der også indgår i analysen af opgavebesvarelser (fra 1981 og frem til 2018).
- Som repræsenterer nedslag i forskellige læreplansperioder (1980-2018).
- Som *kun* angår det højest mulige faglige matematikniveau i gymnasiet, fx er Mat-A for samfundsfaglige studenter valgt fra. Dette er gjort for at bevare sammenligneligheden i eksamenssættene, da eksamenssæt for fx samfundsfaglige studenter med Mat-A har en anden vægtning af matematisering af omverdensproblemer, end de naturfaglige matematikeksamenssæt på A-niveau har. Dette gælder både grengymnasiet og studieretningsgymnasiet.
- Der kommer fra "den store eksamensdato", hvor den største andel af en årgang af elever afvikler deres skriftlige matematik-studentereksamen.

6.2. Resultater (deskriptive analyser)

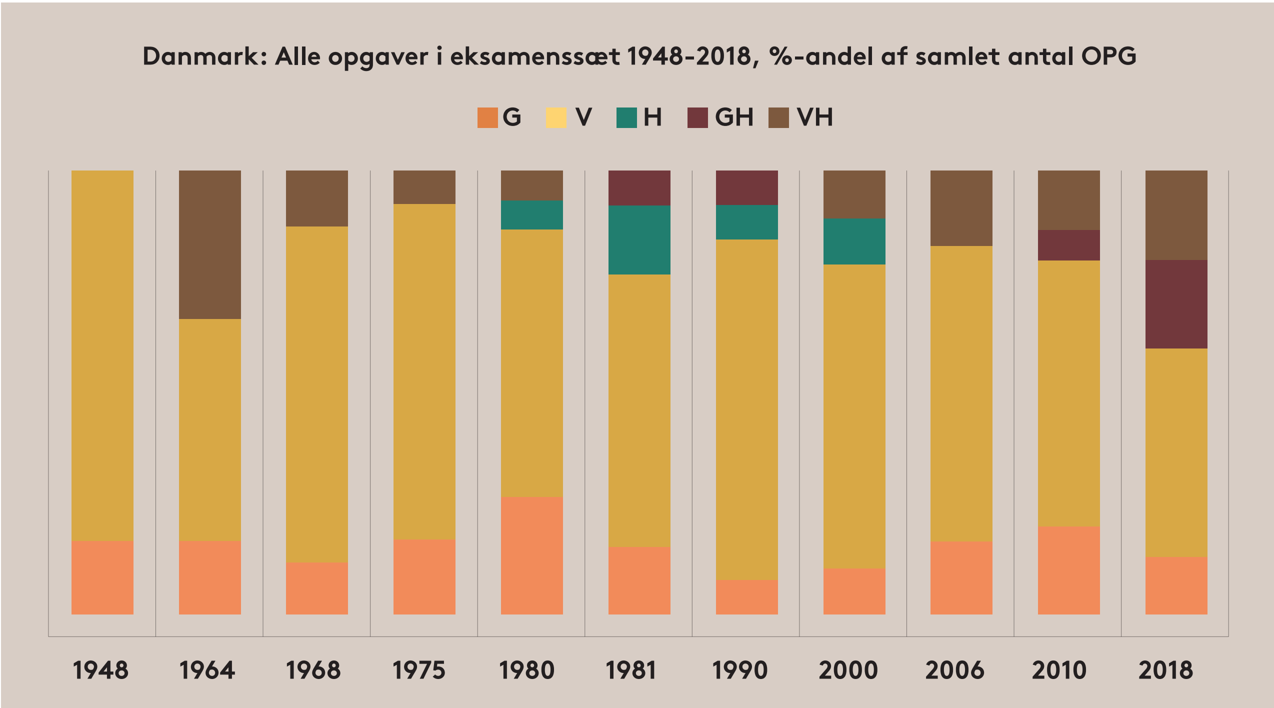
Resultatafsnittet er opdelt i to underafsnit:

1. GVH-analyse af eksamenssættene, samlet og hver for sig mht. med og uden hjælpemidler
2. Analyse af, hvordan eksamenssættenes opgaver fordeler sig på de matematikfaglige søjler og højden på opgaverne.
   a. Vi har på baggrund af læreplanen fra reformen i 2017 analyseret med de tre søjler: funktioner, geometri og statistik. Hertil har vi tilføjet søjlen funktion/geometri, som er en selvstændig faglig søjle.

b. Vi bruger på baggrund af læreplanen fra reformen 2017 søjlehøjderne (sværhedsgrad/kompleksitet) 1-3.

Afsnittene kan læses uafhængigt af hinanden, men tilsammen leverer de en analyse af samspillet mellem viden, færdigheder og kompetencer i den matematikfaglighed, som eksamenssættene udtrykker over tid set i sammenhæng med de konkrete matematikfaglige opgaver. Iagttagelsen af udviklingen i samspillet mellem viden, færdigheder og kompetencer må forankres 1) i de faglige søjler, der stilles opgaver i, og i søjlehøjden på de stillede opgaver, og 2) prioriteringen af G-, V-, og H-opgaver i hvert eksamenssæt og over tid. Som nævnt til slut i afsnittet om analysemodellen har vi i analysen tilføjet opgavekategorien VH og GH.

6.2.1. GVH-analyse af eksamenssæt



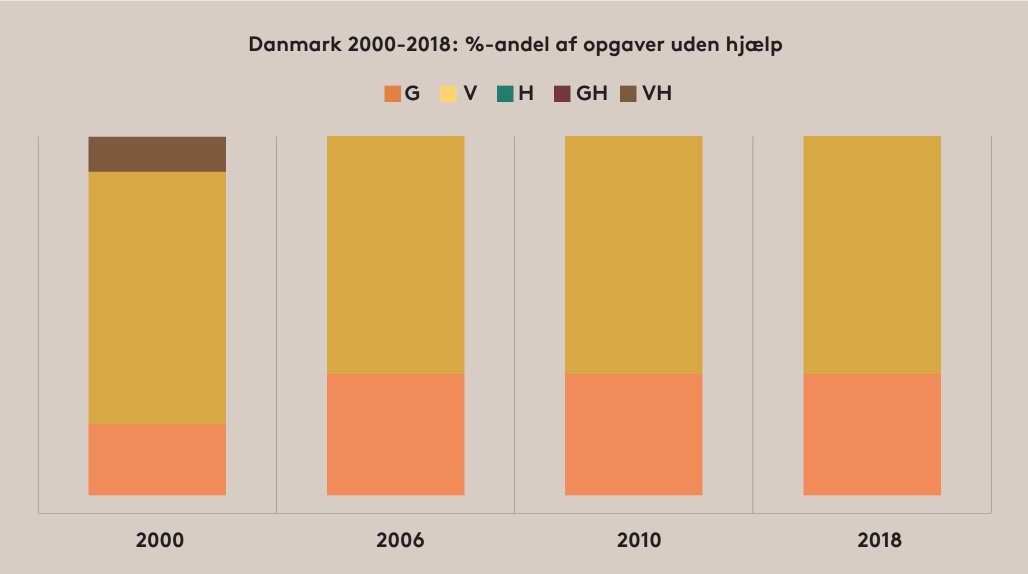
Figur 12. Danmark: GVH-fordeling i samlede eksamenssæt, udvalgte år 1948-2018.

Figur 12 indikerer en forskydning i andelen af V-opgaver, der er faldende over perioden fra 1948 til 1980, hvorefter V-andelen af opgaver stiger lidt i 1981 og stiger tydeligt i 1990 og igen er faldende fra 1990 til 2018. Den mindre andel af V-opgaver giver mulighed for flere H-, GH- og VH-opgaver, da andelen af G-eksamensopgaver ligger stabilt omkring 0,15% af det samlede opgavesæt igennem alle årene (her undtages 1975 og 1980).

Denne forskydning er måske udtryk for en fluktuerende prioritering af elevernes kompetence til matematisering og modellering af omverdens- og andre fags problemstillinger kombineret med matematisk viden og færdigheder (GH- og VH-opgaver) overfor en prioritering af matematisering indenfor matematikken selv (V-opgaver). Det er interessant, at årene 1964 og 2018 er meget lig hinanden mht. prioriteringen af V-opgaver og GV og VH-opgaver.

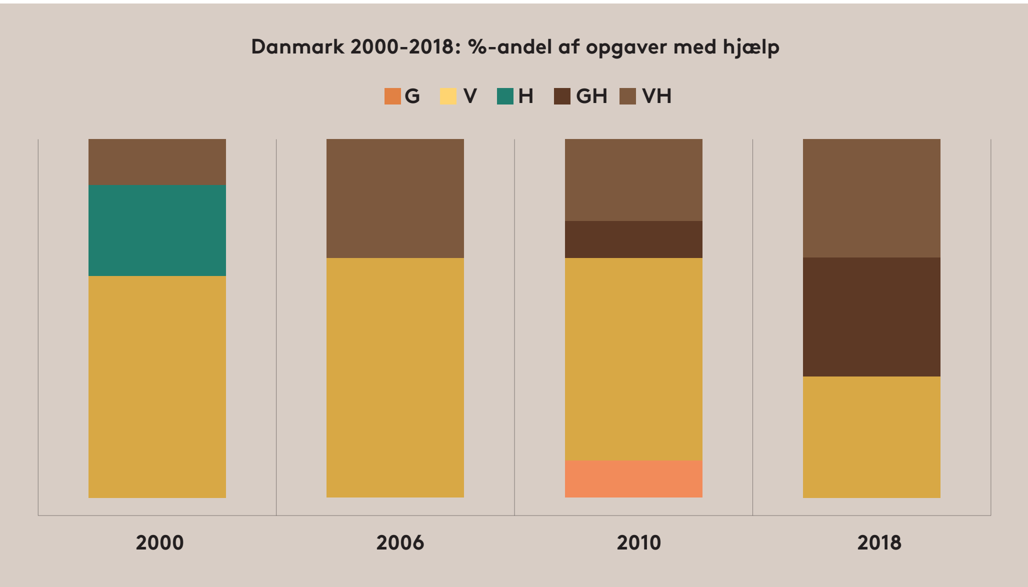
En anden tolkning kan være, at andelen af V-opgaver er stabilt over årene, men at V-opgaverne i stigende grad, og især i 2018, relateres til modellering af omverdensproblemstillinger, hvorved

VH-typen bliver tydelig i eksamenssættene, men stadig er at opfatte som en V-opgave. Dette er særligt tydeligt for eksamenssættet med hjælpemidler.



Figur 13. Danmark 2000-2018: GVH-fordeling for eksamenssæt uden hjælpemidler.

Figur 13 viser, at det er tydeligt, at de analyserede eksamenssæt *uden* hjælpemidler fra 2000 og frem til 2018 (de første todelte prøver blev afholdt i 1999), hvor der er en eksamensform opdelt i hhv. uden og med hjælpemidler, ser ensartede ud. Der er en ensartet fordeling af G- og V-opgaver henover årene, og et fravær af de øvrige opgavetyper. Der er fokus på at afprøve elevernes matematiske viden og færdigheder.



Figur 14. Danmark 2000-2018: GVH-fordeling af opgaver med hjælpemidler.

I figur 14 kan det ses, at opgaverne *med* hjælpemidler varierer. I alle årene er der foruden V-opgaver indenfor matematikfagligheden fokus på de opgaver, der inkluderer matematisering af omverdenen og andre fags problemstillinger, hvilket især er tydeligt i år 2018. I 2018 er der flest VH-opgaver i sammenligning med alle andre år. VH-opgaver er kombinationen af matematisering indenfor matematikfagligheden med matematisering af et omverdensproblem, hvilket stiller krav til elevernes matematiske kompetencer indenfor alle faserne af modellerings- og problemløsningskompetencerne.

Det kan altså se ud som om, der er et fald i V-opgaver såvel i det samlede eksamenssæt som i eksamenssættet for matematik *med* hjælpemidler.

6.2.2. Analyse af søjlehøjden på opgaver i eksamenssæt og fordelingen af opgaver på søjler

Analysen er baseret på en opgørelse, der er repræsenteret ved en figur for hvert af de årstal, der er analyseret eksamenssæt fra.

Figurerne læses på den måde, at stolpens farve (grøn, orange og brun) henviser til opgavehøjderne 1-3. Den vandrette akse viser de forskellige faglige søjler (funktioner, geometri, funktion/geometri og statistik) og den lodrette akse henviser til antallet af opgaver i eksamenssættet tilhørerende denne søjle med denne højde. Således er der fx i figur 15 for eksamenssættet 'Danmark 1981' fem opgaver i den faglige søjle 'funktioner' med en søjlehøjde på 2.

I det følgende kommenteres den faglige udvikling i de eksamenssæt, der analyseres, samlet. Herefter er figurerne indsat. Der analyseres i alt seks år i denne sammenhæng: 1981, 1990, 2000, 2006, 2010 og 2018.

I 1981 og 1990 indgår der kun opgaver med en søjlehøjde på 2 eller 3 med flest opgaver i den faglige søjle 'funktioner'. I 2000 optræder langt størstedelen af opgaver med søjlehøjde 3 i søjlen 'funktioner', mens opgaver med søjlehøjden 2 optræder i søjlen 'geometri'. Det samme billede gør sig gældende for 2006 med den forskel, at der næsten er lige så mange opgaver i geometrisøjlen som i funktionssøjlen.

I årene 1981-2000 er der løbende en opgave i statistik-søjlen, men i 2006 og i 2010 er der ingen opgaver i denne søjle.

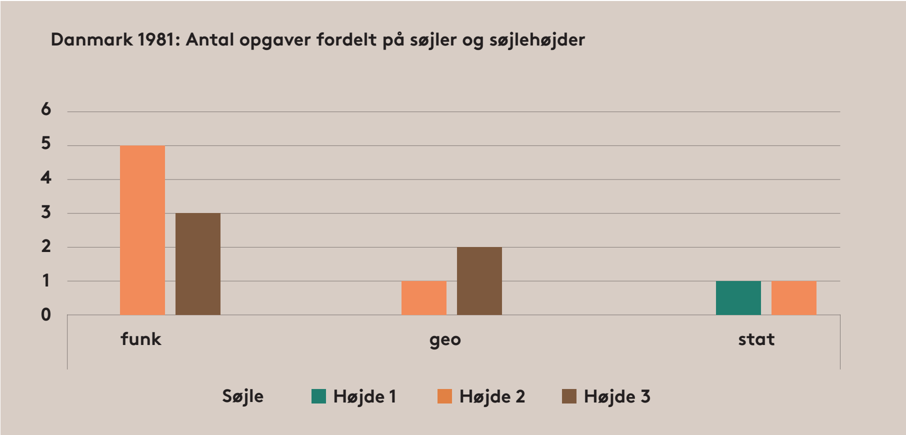
I de to år 2010 og 2018 er der opgaver i alle tre højder på både funktions- og geometrisøjlen, stadig med en overvægt af opgaver på funktionssøjlen. I 2018 er der atter en opgave i statistik med søjlehøjden 2.

I år 2000 er der to opgaver med søjlehøjde 1. Fremefter er der opgaver med søjlehøjde 1 i eksamenssættene, i 2010 er der fem og i 2018 er der tre. Dette kan meget vel have noget at gøre med udviklingen i opgavekonstruktionerne, og om opgaverne er splittet op i underopgaver. I vores analyse er underopgaver analyseret som en selvstændig opgave. Det vil sige, at 1a og 1b fremstår som to opgaver i vores figurer, mens de i 1981 muligvis blot var en enkelt opgave.

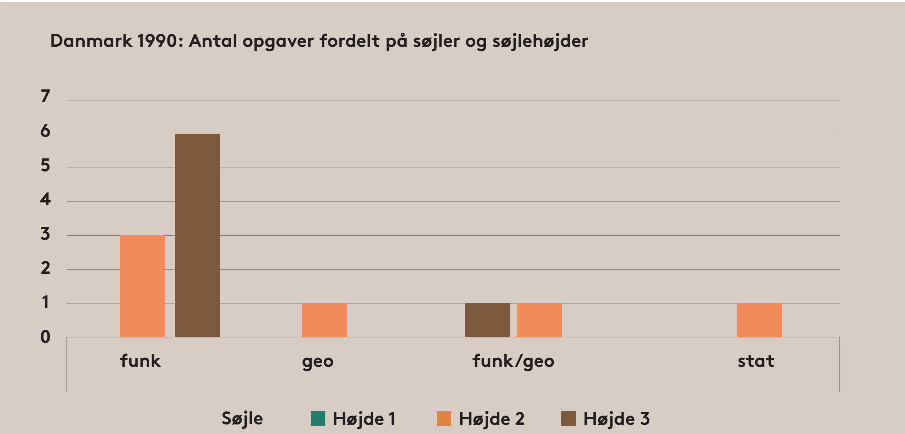
Samlet set er billedet stabilt, hvad angår fordelingen af opgaver på de faglige søjler, forstået på den måde, at der er flest opgaver i funktionssøjlen, næstflest i geometri og 1-2 opgaver i statistiksøjlen og den konstruerede søjle funktion/geometri. Der er en tendens til at være flest opgaver med søjlehøjde 3 i alle årene med lidt færre på søjlehøjde 2 og få eller ingen på søjlehøjde 1. Billedet i 2010 og 2018 adskiller sig en smule, idet der er opgaver i alle 3 højder på både funktions- og geometrisøjlen med supplement i enten funktion/geometri-søjlen eller den statistiske søjle.

At billedet af opgaverne er stabilt, både hvad angår det faglige indhold fra søjlerne og den faglige sværhedsgrad, hvad angår søjlehøjderne, understøtter GVH-analysen af samspillet mellem viden, færdigheder og kompetencer i den matematikfaglige udvikling.

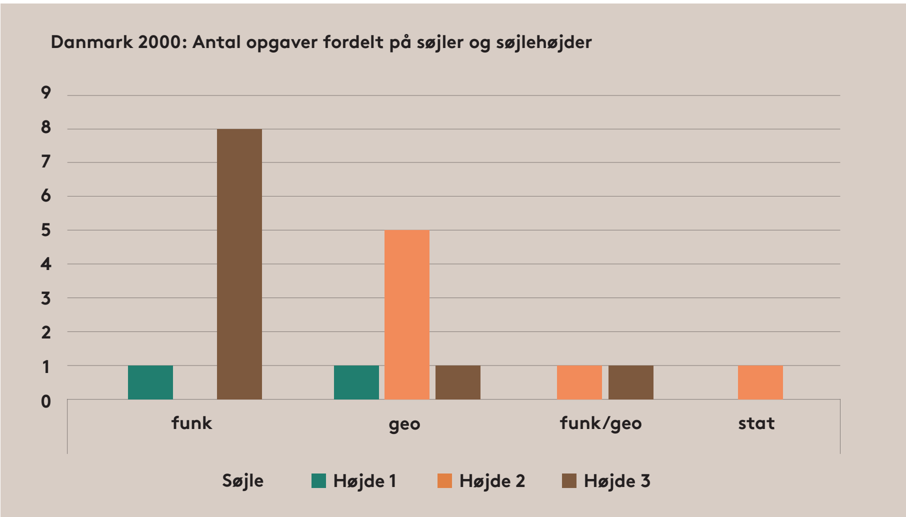
Resultatet fra analysen af eksamenssættene kan dermed sammenholdes med den *oplevede* udvikling af matematikfagligheden i gymnasiet, som kan iagttages igennem dataene fra spørgeskemaet.



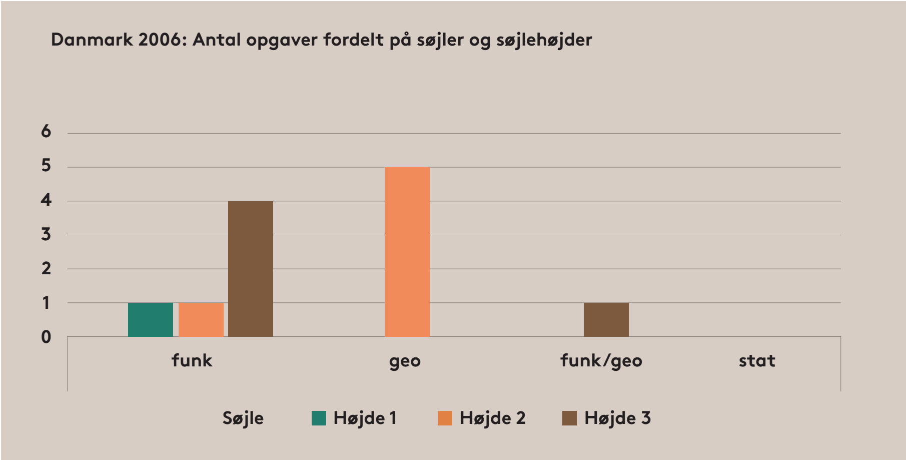
Figur 15. Danmark 1981: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.



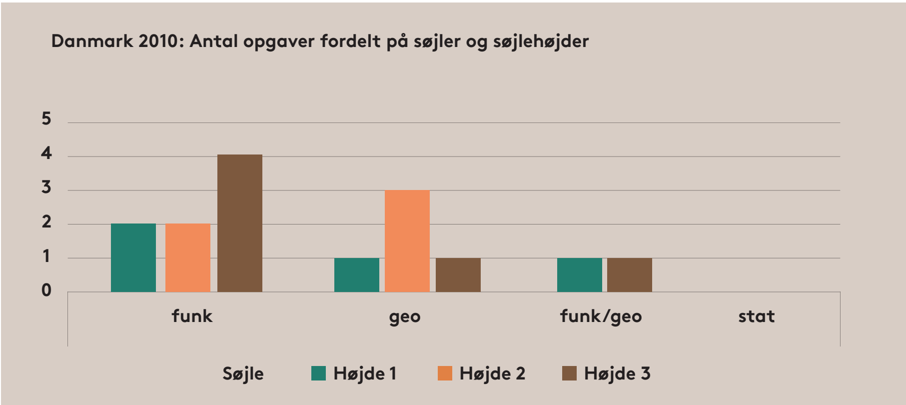
Figur 16. Danmark 1990: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.



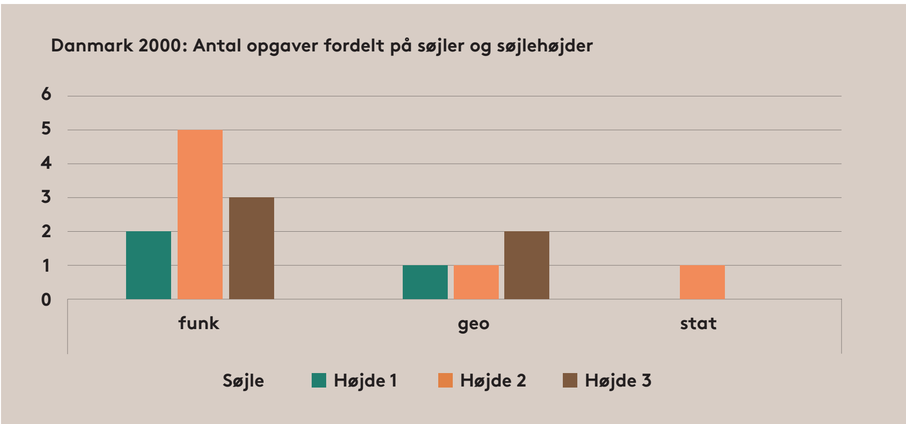
Figur 17. Danmark 2000: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.



Figur 18. Danmark 2006: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.



Figur 19. Danmark 2010: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.



Figur 20. Danmark 2018: Antal opgaver fordelt på søjler og søjlehøjder.

6.3. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner

Det var overraskende for ekspertudvalget, at andelen af G-, V-, og H-opgaver er konstant over tid igennem de år, der er inkluderet i undersøgelsen. I alle årene er der en betydelig mængde af V-opgaver, der kræver grundviden og færdigheder og samtidig en fornemmelse for, hvordan man løfter sig opad i matematikken. Det betyder også, at det krævede niveau i matematik ikke var højere tidligere end i dag; der blev spurgt på en anden måde, men det er det samme kernefaglige stof, der indgår i søjlerne og med den samme højde. Stilladseringen af eksamensopgaverne, der hjælper eleverne med rækkefølgen af trin i deres løsningsprocedure, kan gøre det lettere at få karakteren 02, men det er ikke blevet lettere at opnå karakteren 12.

Samtidig er det også en kommentar fra ekspertgruppen, at populationen af stx-elever er blevet bredere, hvilket også er af betydning for matematikfaget og den enkelte elevs opbygning af matematikhuset, da den bredere population også skal opleve matematikfaget og være glade for og trygge ved at beskæftige sig med det.

Til sammenligning ses det, at matematikken i eksamenssættene i Norge har mere fokus på et nytteperspektiv, der har givet matematikken nye perspektiver, mens det i Danmark er mere konstant.
I Norge er kompleksiteten i eksamensopgaverne faldet og har udviklet sig til kortere opgaver med mere entydige svar. I Sverige er der ikke eksamenssæt men nationale prøver, som spiller en anden rolle, hvorfor der ikke direkte kan sammenlignes med de svenske ”eksamenssæt”.

7. Eksamensbesvarelser

7.1. Metoder og materialer

7.1.1. Materialer

Det har været muligt at analysere eksamensbesvarelser fra seks år: 1981, 1990, 2000, 2006, 2010 samt 2018. Der er ikke sammenhæng i, hvor eksamensbesvarelserne kommer fra. Der er alle årene 5 elevbesvarelser fra den samme skole på "den store eksamensdag", undtagen 2018, hvor der indgår besvarelser fra 4 skoler. Forstået på den måde, at der i 1981 er 5 elevbesvarelser fra skole A og i 1990 5 besvarelser fra skole B. Der er i vores udvalg af eksamensbesvarelser før 2000 to forskellige dage med matematikeksamen (del 1 og del 2 i mat-fys-greneksamen), og fra 2000 og frem er der hhv. prøven med og uden hjælpemidler. De eksamenssæt, vi har fået adgang til, indeholdt typisk *forskellige* elever fra de to eksamensdage og de to prøveformer. Vi har ikke haft mulighed for at gøre andet end at stykke en hel elevbesvarelse til en given studentereksamen sammen af to forskellige elevers besvarelser. I de klassesæt, hvor vi har haft adgang til en samlet besvarelse fra den samme elev, har vi selvfølgelig anvendt denne.

Med hensyn til udvælgelse af elevbesvarelser fra klassesættene for begge prøvedage eller begge prøveformer har vi valgt hver femte elev fra en klasseliste, hvor vi havde adgang til en sådan, eller vi har udtaget de fem første elevbesvarelser med den nummerering, der nu blev anvendt i et givent eksamenssæt (elevnummer, eksamensnummer eller andet).

Der er *ikke* udvalgt på baggrund af kendskab til karakterer, som vi kendte for nogle eksamensbesvarelser, men ikke kendte for andre.

Der indgår *ikke* elevbesvarelser fra forsøg med eksamen med digitale opgaver eller fra linjer og studieretninger, hvor A-niveau i matematik er opnået ved opgradering fra B-niveau. Der indgår besvarelser fra forsøg med matematikeksamen, det gælder elevbesvarelserne fra 1990. Der er kun elevbesvarelser medtaget fra de samme eksamensdage, så det er muligt at sammenligne besvarelserne, som vi gør.

Således er det et meget tilfældigt udsnit af elevbesvarelser, vi er endt med at have. Der indgår 45 elevbesvarelser i analysen, hvoraf 20 er fra 2018.

7.1.2. Metoder

Analysen af eksamensbesvarelser er foregået ved hjælp af den udviklede F/R/I-U-kategorisering, der er en modificeret SOLO-taksonomi. To medlemmer fra ekspertudvalget (gymnasielærere) har vurderet alle 45 eksamensbesvarelser hver for sig og har derefter kalibreret deres vurderinger på udvalgsmøderne, så der var enighed om vurderingen. Se afsnittet om analysemodellen for en uddybning af F/R/I-U-kategorierne.

Med respekt for formidlingen af vores analyse og fordelingen af opgaver på de to faglige søjler: funktioner og geometri, har vi valgt at vise den faglige udvikling i elevbesvarelserne ved at udvælge tre opgaver med søjlehøjden 3 fra hvert eksamenssæt fra funktions-, geometri- og funktions-/geometrisøjlen. Alle de udvalgte opgaver er *med hjælpemidler* fra og med år 2000 og primært V-opgaver. Vi viser i analyseresultatet (se figur 21), hvordan eleverne fra de forskellige år besvarer de udvalgte opgaver, som modsvarer det højest mulige matematikfaglige niveau det år i stx. Der er nedenunder resultatfiguren medtaget den opgave fra eksamenssættet, der er udvalgt til at indgå i analysen fra funktionssøjlen med højden 3. Hvis en opgavesøjle er tom for et år, fx funk/geo for 1981, henviser det til, at der ikke indgik en sådan opgave i det pågældende eksamenssæt.

7.2. Resultater (deskriptive analyser)

Resultatet af analysen af elevernes besvarelse af eksamensopgaverne er opsummeret nedenfor i figur 21, som efterfølgende kommenteres. Det er vigtigt at holde sig for øje, at vi ikke med en analyse af elevernes besvarelser til eksamen kan afgøre, hvad eleven har lært. Kvaliteten af eksamensbesvarelsen siger ikke alt om læreprocessen, eller om eleven er i stand til at tage sin læring med til en videregående uddannelse. Vi forsøger med kombinationen af GVH- og F/R/I-U-analysen at anlægge et andet perspektiv på dokumentation af det faglige niveau, hvor vi knytter an til den forudgående *dynamik i læreprocessen.*

1981: mat-fys gren, to dage						
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**		**FUNK 3**		**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**		**V**		
5 eksamensbesvarelser fra én skole		U		U		
		F		F		
		F		F		
		I		I		
		I		I		
		OPG 4, dag 2		OPG 3, dag 2		

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 3 + 4}, \qquad x \epsilon [-1; \infty[$$

Bestem en stamfunktion til f, og beregn tallet

$$\int_1^2 f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

1990: mat-fys gren, to dage, udkast til ny bekendtgørelse						
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**		**FUNK 3**		**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav			**V**		V
5 eksamensbesvarelser fra én skole				F		U
				F		F
				R		R
				R		R
				I		R
				OPG 3, dag 1		OPG 6, dg 2*

For ethvert tal a, hvor $a \neq 0$, er en parabel $\mathcal{P}_a$ bestemt ved

$$\mathcal{P}_a: \quad y = ax^2 + 2x + 1$$

Skitsér parablerne $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_{-\frac{1}{2}}$ i samme koordinatsystem.

Bestem, udtrykket ved a, koordinatsættet til toppunktet for $\mathcal{P}_a$

Vis, at dette toppunkt for enhver værdi af a ligger på linjen med ligningen

$$y = x + 1$$

En anden mængde af parabler er bestemt ved ligningen

$$y = x^2 + bx + 2\,,$$

Hvor b er et tal

Der findes en parabel, på hvilken alle disse parablers toppunkt ligger.

Bestem en ligning for denne parabel.

2000: med/uden hjælpemidler (2 t)						
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**		**FUNK 3**		**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**		**H**		V
5 eksamensbesvarelser fra én skole		F		U		R
		R		F		R
		R		R		R
		R		I		R
		I		I		R
		OPG 3 MH		OPG 6 MH		OPG 4 MH

(Opgave 6, ca. 15 point)

En funktion f er løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}(x+2)\,, \quad y > 1$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, e)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

2006: med/uden hjælpemidler (1 t)				
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**	**FUNK 3**	**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**	**V**	
5 eksamensbesvarelser fra én skole		F	U	
		R	U	
		R	R	
		I	R	
		I	I	
		OPG 2 MH	OPG 4 MH	

En hurtig fordampende olie løber med jævn fart ud af havet. Olien fordeler sig i et tyndt lag på overfladen. Med $A(t)$ betegnes det areal (m^2), som olien dækker til tidspunktet t (timer). Så længe der tilføres olie, er A den løsning til differentialligningen

$$\frac{dA}{dt} = 10^3 - 0{,}2 \cdot A\,,$$

hvor $A(0) = 0$

Bestem en forskrift for A

Bestem $\lim_{t \to \infty} A(t)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Efter 24 timer stopper tilførslen af olie. Herefter vil A være løsningen til differentialligningen

$$\frac{dA}{dt} = -0{,}2 \cdot A$$

Hvor lang tid går der, fra tilførslen stopper, til olien dækker $1m^2$?

2010: med/uden hjælpemidler (1 t)				
Eksamens-sæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**	**FUNK 3**	**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**	**V**	VH
5 eksamensbesvarelser fra én skole		R	U	U
		R	F	U
		R	R	R
		I	R	R
		I	R	R
		OPG 12 MH	OPG 14 MH	OPG 15 MH

En linje l har ligningen

$$y = -2x + 1$$

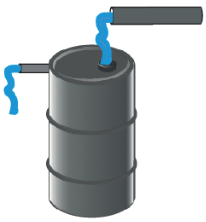
Det oplyses, at linjen l er tangent til grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

i punktet $P(1, f(1))$.

a) Gør rede for, at $f^1(1) = -2$ og $f(1) = -1$, og bestem tallene *b* og *c*.

2018: med/uden hjælpemidler (1 t)				
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**GEO 3**	**FUNK 3**	**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**	**VH**	
20 eksamensbesvarelser, 4 skoler		U	U	
		U	U	
		U	U	
		U	U	
		U	F	
		U	F	
		F	R	
		F	R	
		F	R	
		R	R	
		R	R	
		R	R	
		R	R	
		R	R	
		R	R	
		I	R	
		I	R	
		I	R	
		I	I	
		I	I	
		OPG 3 MH	OPG 6 MH	OPG 4 MH



En væske indeholdende et bestemt stof løber med stigende hastighed ned i en fyldt beholder med overløb. I en model kan koncentrationen af stoffet i beholderen beskrives ved en funktion, der er løsningen til differentialligningen

$$C' = 2 \cdot t \cdot \frac{30 - C}{30}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

hvor $C(t)$ betegner koncentrationen af stoffet i beholderen (målt i ppm) til tidspunktet t (målt i døgn). Det oplyses, at til tidspunktet $t = 0$ er der ikke noget af stoffet i beholderen.

a) Bestem en forskrift for $C(t)$, og tegn grafen for C.

b) Bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen af stoffet i beholderen vokser hurtigst.

Figur 21. Søjler: søjlehøjde (1, 2, 3), kompetencekrav (GVH) og besvarelsesniveau (F/R/I-U) på studentereksamensopgaver i matematik på højeste gymnasiale niveau 1981-2018.

Det følgende afsnit belyser prøvebesvarelser uden brug af hjælpemidler i de danske besvarelser, de såkaldte opgaver uden hjælpemidler. Denne analysedel er et supplement til analysen vist i figur 21 af søjlehøjder (1, 2 og 3) kompetencekrav (G, V og H) og besvarelsesniveau (F/R/I-U) på studentereksamensopgaver på højeste gymnasiale niveau 1981-2018.

I lighed med figur 21 er der i figur 22 udvalgt eksempler på opgaver uden hjælpemidler fra opgavesættene. Der er udvalgt opgaver uden hjælpemidler med højest mulig søjlehøjde. Der er *ikke* opgaver uden hjælpemidler i vores sæt af eksamensbesvarelser fra analyseårerne 2010 og 2006, hvorfor figur 22 kun indeholder analyse af prøvebesvarelser fra 2018 og 2000.

2000: UDEN hjælpemidler (2 t)				
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**FUNK 3**	**FUNK 3**	
	Kompetencekrav	**V**	**V**	
5 eksamensbesvarelser fra én skole		F	U	
		R	F	
		R	I	
		I	I	
		I	I	
		OPG 10 U HJ	OPG 11 U HJ	

(Opgave 10, ca. 4 point)

Bestem følgende grænseværdier:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{4-2x} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(2+3x)^2-4}{6x}$$

2018: med/uden hjælpemidler (1 t)				
Eksamenssæt	Type og søjlehøjde	**FUNK 3**	**GEO 2**	**FUNK/GEO**
	Kompetencekrav	**V**	**V**	
20 eksamensbesvarelser, 4 skoler, uden hjælpemidler		U	F	
		U	R	
		U	R	
		U	R	
		U	R	
		U	R	
		F	R	
		F	R	
		F	R	
		F	I	
		R	I	
		R	I	
		R	I	
		I	I	
		I	I	
		I	I	
		I	I	
		I	I	
		I	I	
		I	I	
		OPG 6 U HJ	OPG 2 U HJ	

(Opgave 6)

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = a \cdot x^2 + 2x - 4$$

Funktionen F er stamfunktion til f, og grafen for F går gennem punkterne $P(0,4)$ og $Q(1,3)$.

Bestem en forskrift for F

Figur 22. Søjler: søjlehøjde (1, 2, 3), kompetencekrav (GVH) og besvarelsesniveau (F/R/I-U) på studenter-eksamensopgaver i matematik på højeste gymnasiale niveau 2000 og 2018. De mellemliggende analyseår, 2006 og 2010, er ikke inkluderet i modellen, da vi ikke har haft adgang til eksamensbesvarelser uden hjælpemidler fra disse to år.

Hvis man sammenligner prøvebesvarelserne uden hjælpemidler med besvarelserne med hjælpemidler, ser figurerne ensartede ud over de to år.

Det ses, at opgave 2 fra eksamenssættet i 2018 besvares bedre af eleverne, men det er også en opgave på søjlehøjde 2 til sammenligning med opgave 6 fra samme år, der er på søjlehøjde 3. De to udvalgte opgaver uden hjælpemidler fra 2000 er fra funktionssøjlen på søjlehøjde 3 og dermed sammenlignelige med opgave 6 fra år 2018; med det forbehold, at prøven uden hjælpemidler i 2000 varede 2 timer mod 1 time i 2018.

På det foreliggende grundlag er der ingen dokumentation for at antage, at elevernes prøvebesvarelser har udviklet sig over tid.

Dermed gælder det også for prøvebesvarelser uden hjælpemidler, at de på baggrund af en kvalitativ vurdering udgør *et stabilt mønster* i lighed med prøvebesvarelser med hjælpemidler. Det vil sige, at elevernes evne til at anvende deres matematikfaglighed i prøvebesvarelserne uden hjælpemidler er stabil ud fra det foreliggende grundlag, som dog vurderes at være noget spinkelt.

Hvis man sammenholder figur 22 med figur 13, der viser GVH-fordelingen af opgaver uden hjælpemidler ses tilsvarende et stabilt mønster i de stillede opgaver, hvor der stilles G- og V-opgaver i samme fordeling over årene.

7.3. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner på analysen af eksamensbesvarelser

Det er som beskrevet en tilfældigt udvalgt stikprøve af elevbesvarelse1r, og analysen med tilfældigt udvalgte besvarelser viser hele spektret af fragmenterede, rutiniserede og integrerede besvarelser og u = ubesvarede. Ud fra en kvalitativ vurdering er der den samme fordeling af fragmenterede, rutiniserede og integrerede elevbesvarelser samt ubesvarede opgaver over årene. Figuren ovenfor viser således, at der ikke er faglig 'skævhed' på årene, men *et stabilt mønster*: Flest svarer på en rutiniseret vis, færre svarer fragmenteret eller integreret.

Elevernes evne til at anvende deres matematikfaglighed i eksamensbesvarelserne er stabil. Vurderingen af niveauet for en besvarelse er baseret på elevens evne til at argumentere for sine løsninger og valg i det matematikfaglige sprog og elevens evne til at gennemføre beregninger og modelleringer for at kunne gennemføre opgaven (se afsnittet om analysemodellen).

Der er stadig tre matematikfaglige søjler, men måden, matematiklærere arbejder med disse søjler på, har forandret sig. Eleverne er gode til at beherske de nye måder at arbejde på, de bruger deres værktøj på en hensigtsmæssig måde. Det er ikke noget, man bare lige gør – og det må derfor skyldes både lærernes og elevernes indsats. Der har fundet en forandring sted af matematikfagets værktøjer og sproglige kommunikation i fx eksamenssæt, hvor mange har spillet med, og den forandring ser ud til at være lykkedes på en måde, så matematikhuset fortsat er stabilt. Forandringerne kommer til udtryk i eksamensopgaverne i de forskellige år, og eleverne har været i stand til at honorere de nye krav.

"Indkøringen" af H-opgaver med hjælpemidler er tydelig fra år 2000. I år 2000 er der en tydelig opdeling mellem V- og H-opgaver, hvor der i opgavesættet i 2006 allerede er ca. 1/3 af opgaverne, der er af typen VH. Det næste år, vi har analyseret eksamenssæt fra, er 2010, hvor der foruden VH-opgaver er GH-opgaver, hvilket ekspertudvalget tolker som et tegn på den begyndende stigende stilladsering af opgaverne. I 2018 er der 1/3 rene V-opgaver, 1/3 GH-opgaver og 1/3 VH-opgaver. Dette udviklingsbillede viser, hvordan kompleksiteten i kravene til den matematikfaglige modelleringskompetence øges over en årrække. Analysen af undervisningsbeskrivelserne konkluderer, at det kun er til og med år 2010, at der ses projekter/temaopgaver, der udelukkende handler om CAS-værktøjet, hvorefter det må antages, at disse værktøjer indgår som en del af matematikfagligheden. Og at der som en del af denne udvikling er sket en stigende stilladsering af matematikopgaverne. Som ekspertudvalget konkluderende tolker udviklingen: *Det er ikke blevet lettere at få topkarakter, men det er blevet lettere at bestå.*

Det interessante er, at anvendelsen af matematikfaglige it-værktøjer som CAS giver mulighed for at understøtte V-aspektet igennem arbejde med modellering og undersøgelse i undervisningen, samtidig med at H-aspektet understøttes, fordi det bliver muligt at modellere problemer fra omverdenen og fra andre fag og koble matematisk viden og færdigheder på tværs af de matematikfaglige søjler. Dette understøttes af analysen af undervisningsbeskrivelser, hvor der rapporteres, at der undervises i bredere VH-emner og naturvidenskabelige H-emner, som kunne lægges til grund for sådanne undersøgende opgaver.

Udviklingen af den kombinerede VH-opgaveløsning har givet anledning til, at der i ekspertgruppen er formuleret følgende to skitser til eksamensopgaver i stx på det højeste matematikfaglige niveau, og de præsenteres i denne sammenhæng som *fremtidsscenarier*.

7.3.1. Fremtidsscenarier for skriftlige eksamensopgaver

Figur 23 på side 57 viser et fremadrettet kig på opgaver til skriftlig eksamen. Opgave 1 d) vedrørende hældningsfeltet løses simplest med et matematisk værktøj, der kan vise det felt sammen med løsningskurverne. Et værktøj, der kan dét, vil typisk også kunne bruges til at løse (dvs. finde alle løsninger til) differentialligningen og til at undersøge, om en given funktion er en løsning. Opgave 2 kan løses uden hjælpemidler. Figuraflæsning kan/bør tillades. Det vil sige, at inspektion af et givet output fra et kendt eller ukendt værktøjsprogram på den måde kan benyttes i forbindelse med (eksamens-)opgaver uden hjælpemidler. En tilsvarende opgave med hjælpemidler er allerede at finde i delprøve 2, opgave 14, Stx, Matematik A, maj 2019. Med disse eksempler er her kun antydet et åbent terræn af mulige nye opgaver og sammenhænge, som involverer og inducerer læring i alle tre søjler i matematikhuset: funktioner (her af to variable), geometri (niveaukurver, tangentplaner) og sandsynlighedsregning (fx flervariabel normalfordeling).

Opgave 1: Om en funktion g oplyses, at den er løsning til differentialligningen

$$5y' - 2y = 0$$

Det oplyses derudover, at $g(0) = 3$.

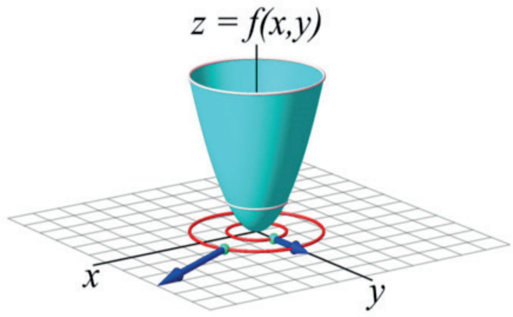
a. Bestem en forskrift for g.

b. Undersøg, om funktionen h, bestemt ved $h(x) = -g(x)$, er en løsning til den givne differentialligning.

c. Undersøg, om funktionen f, bestemt ved $f(x) = -g(x) + 3$, er en løsning til differentialligningen.

d. Beskriv forløbet af graferne for de tre funktioner g, h, og f i forhold til hældningsfeltet for differentialligningen i et (x, y)-koordinatsystem.

Opgave 2: En funktion f af to variable er givet ved $f(x, y) = x^2+y^2$.



Figuren viser grafen for f sammen med gradientvektoren for f i punkterne $(x, y) = (0, 1)$ og $(x, y) = (2, 1)$, henholdsvis.

a. Bestem koordinat erne for gradientvektoren for f i punktet $(x, y) = (2, 1)$ og forklar betydningen af gradienten.

b. Gradientvektoren for f er nul-vektoren i ét punkt (x, y). Hvilket punkt er det?

c. En funktion g er givet ved $g(x, y) = -f(x, y)$. Bestem koordinaterne for gradientvektoren for g i punktet $(2, 1)$.

d. En funktion h er givet ved $h(x, y) = -f(x, y) + 7$. Bestem koordinaterne for gradientvektoren
for h i punktet $(2, 1)$.

Figur 23. To forslag til fremtidige skriftlige eksamensopgaver.

7.3.2. Øvrige kommentarer til fremtidsscenarier for skriftlig eksamen

Det var en klar udmelding i ekspertgruppen, at sådanne mere undersøgende eksamensopgaver typisk vil være sværere for eleverne, da de skal bevæge sig på et højere niveau i SOLO-taksonomien. Eleverne skal trække på ræsonnementer og deduktive kompetencer. Dette er baggrunden for vores anbefaling om at arbejde med de undersøgende opgaver i en *portefølje*sammenhæng fremfor en *eksamens*sammenhæng.

8. Spørgeskema

8.1. Metoder og materialer

I forbindelse med konstruktionen af spørgeskemaet har der været fokus på at frembringe fagspecifikke spørgsmål, der især inkluderer fokus på instrumentel genese. Den instrumentelle genese er udfoldet i afsnittet om analysemodellen. Samtidig er der fokuseret på at inkludere spørgsmål om modellering, eksperimentel tilgang, evne til at formulere relevante matematikfaglige, undersøgende spørgsmål og kompetence til at tale i matematikfagligt sprog.

Der indgår i alt 447 matematiklærere som respondenter i den matematikfaglige del af undersøgelsen, som fordeler sig på denne måde:

- Grundskole: 223 svar af 344: 64,9 %
- Gymnasium: 155 svar af 342: 45,3 %
- Videregående uddannelsesniveau og relaterede uddannelser: 69 svar af 126: 54,8 %

Herefter er der lavet databehandling med henblik på at opnå overblik over materialet. I resultatafsnittet til spørgeskemaet beskrives særligt relevante observationer herfra med respekt for vores udvalgte fokuseringer. Der er tale om *udelukkende* kvalitative og beskrivende resultater, ligesom materialet er behandlet udelukkende med beskrivende statistik. Dette hænger bl.a. sammen med metodiske forbehold (se næste afsnit) samt størrelsen på respondentgrupperne, hvor især antallet af svar fra de videregående universitetsuddannelser giver små grupperinger på 5-punkts-skalaerne i spørgeskemaet, der ikke er velegnede til statistiske tests.

8.2. Metodiske forbehold for spørgeskemaets validitet

- De matematikfaglige spørgsmål er kalibreret med de andre tre fag i undersøgelsen i det samlede skema, hvilket gør spørgsmålene til mindre præcise operationaliseringer af matematikfaglighed, end hvis de kun skulle operationalisere matematikfaglighed. Dette er et forbehold for skemaets målingsvaliditet.
- Praktikerne fra stx-uddannelsen i ekspertudvalget anfører, at kønsfordelingen er skæv mht. besvarelserne i gymnasiet.
- For de videregående uddannelser er det værd at bemærke, at kun ganske få kvinder har besvaret skemaet.
- Aldersprofilen for respondenter i gymnasiet vurderes at være overensstemmende med populationen.

	Antal	Procent
Sporadisk erfaring (1-5 klasser eller hold undervist i matematik)	108	69,7
Nogen erfaring (5-10 klasser eller hold undervist i matematik)	43	27,7
Meget erfaring (+10 klasser eller hold undervist i matematik)	4	2,6
Total	155	100,0

Tabel 6. Respondenter i gymnasiet: konkret erfaring med matematikundervisning. Spørgsmål: Hvor mange klasser vurderer du, at du de seneste 10 år har undervist i matematik på sluttrinnet 3. g Matematik A?

- Ovenstående tabel giver anledning til et væsentligt forbehold i forhold til, hvem det er, der svarer på spørgeskemaet i gymnasiet. Forbeholdet drejer sig om, at der er 108 lærere med 'sporadisk erfaring' i matematik over de sidste 10 år, hvilket indikerer, at hovedparten af respondenterne i gymnasiet også underviser i andre fag end matematik (69,7 %). I praksis betyder det, at det er forventeligt, at erfaringer fra andre fag spiller ind på deres vurderinger og iagttagelser af matematikfagligheden. Der er med andre ord mindre end halvt så mange "rene" matematiklærere i respondentgruppen fra stx end andre lærere.
- Dermed bliver det tilsvarende uklart, hvilken konkret erfaring med matematikundervisning, de lærere har, der er inkluderet i spørgeskemaets databehandling og svar som 'erfarne undervisere med 5-10 års erfaring i matematik'. Det må i sagens natur i dette datasæt være lærere, der har undervist i matematik i 5-10 år, men måske kun undervist ét hold pr. år i den tidsperiode, jf. den høje frekvens af lærere med 'sporadisk erfaring'. Det er tilsvarende heller ikke muligt på baggrund af spørgsmålene at konstatere, om respondenterne er lærere, der har erfaring med undervisning i Matematik A i ubrudte forløb fra 1. g til og med 3. g, eller om deres erfaring stammer fra undervisning på hold med 'opgradering af B-niveau'.
- Med hensyn til respondenter fra de videregående uddannelser er der et tilsvarende forbehold.
- Forbeholdene for gruppen af respondenter fra stx indikerer samlet set udfordringer med reliabiliteten i spørgeskemaundersøgelsen.
- Det er en faktuel mulighed, at læreres og underviseres vurdering af matematikfagligheden i forbindelse med besvarelsen af spørgeskemaet tager afsæt både i respondenternes erfaringer og oplevelser med elever og studerende i undervisningen og vurderingen af deres matematikfaglige niveau ved eksamen på det højest muligt faglige niveau i stx. Da undersøgelsen ikke inkluderer studier af undervisningen selv, kan det være svært analytisk at præcisere "snittet" mellem undervisningens læringshjul og det realiserede faglige niveau af tilegnede kompetencer i vurderingerne af matematikfagligheden i spørgeskemaet.

Samlet set er det vores vurdering, at den gennemførte spørgeskemaundersøgelse af matematikfagligheden har udfordringer både i forbindelse med målingsvaliditeten og reliabiliteten, da datasættenes respondenter ikke uden videre kan jævnføres med de tilsvarende populationer på de tre undersøgte niveauer af uddannelsessystemet, og operationaliseringen af indholdet og begreberne i matematikfaglighed er mest meningsfuldt indfanget i de fagspecifikke spørgsmål.

Dermed må vi forvente tilfældige fejl i resultaterne fra spørgeskemaet på grund af forbeholdene knyttet til reliabilitet, mens de nævnte forbehold for målingsvalidteten forventeligt giver mere systematiske fejl: Måler vi det, vi gerne vil måle med denne undersøgelse?

På trods af disse metodiske forbehold gennemføres analysen af spørgeskemaet, og konklusionerne må derfor tages med disse forbehold. Ikke desto mindre har analysen givet ekspertgruppen mulighed for at forholde sig diskuterende og refleksivt til resultaterne, og sammenholde disse med udvalgsmedlemmernes egne erfaringer og forhåndsforventninger.

8.3. Hvad har vi fokuseret på – og hvad kan vi ikke indhente viden om?

Målet med analysen af spørgeskemaet har været at fokusere på nedenstående tre områder med henblik på at kunne konkludere på *potentialerne* for videreudvikling af matematikfaglighed i stx-uddannelsen.

1. Progressionen i matematikfagligheden vertikalt igennem uddannelsessystemet, det vil sige vurdering af elevernes matematikfaglige niveau i overgangene mellem grundskolen, gymnasiet og de videregående universitetsuddannelser.
2. Forskelle og ligheder i uddannelsesniveauernes iagttagelse af matematikfagligheden og dens udvikling, hvilket undersøges gennem sammenligning af forudsætninger og parathed for både det gymnasiale og det videregående uddannelsesniveau, samt undersøgelse af udviklingen i fagligheden over tid for elever og studerende, der modtages, samt elever, der afsluttes i 3. g.
3. Instrumentel genese som følge af vores analysemodel, da den instrumentelle genese er svær at iagttage igennem de øvrige analyser i undersøgelsen.

8.4. Resultater (deskriptive analyser)

8.4.1. Vurdering af elevernes matematikfaglige niveau i overgange mellem uddannelsesniveauer

Nedenfor analyseres afleveringslærernes vurdering af deres elevers matematikfaglige afgangsniveau fra hhv. folkeskole og gymnasium (treårigt Mat-A) og tilsvarende modtagelæreres vurdering af elevernes matematikfaglige niveau på hhv. gymnasium og videregående uddannelse. Selvom stikprøven repræsenterer et bredt udvalg af skoler/institutioner på de forskellige uddannelsesniveauer, kan vi (som ovenfor nævnt) ikke hævde, at den er repræsentativ. Dette bliver især et problem, når stikprøven deles op i mindre dele, som tilfældet er i nedenstående analyse. Derfor sigter analysen alene på at identificere nogle mønstre, som vil kunne danne grundlag for hypoteser om, hvordan overgangene er.

8.4.2. Overgangen mellem folkeskole og start på gymnasiets 3-årige A-niveau

I spørgeskemaet er folkeskolelærere i matematik blevet bedt om at angive, hvor stor en del af deres elever, de vurderer, der lever op til en række forskellige udsagn om deres elevers afgangsniveau. Svarene viser, at lærerne er ret enige i deres vurdering. Det helt afgørende billede er, at lærerne vurderer, at mellem 40 og 80 % af deres elever lever op til de fleste af de udsagn om viden, færdigheder og kompetencer, der er opstillet i spørgeskemaet. Dog vurderer et flertal, at over 80 % af deres elever har *kendskab til matematikfagets begreber,* og at de *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*. Omvendt er det også en meget udbredt vurdering, at elever *ikke fordyber sig i det matematikfaglige udover de skemalagte opgaver.*

Mønsteret er for så vidt ikke overraskende. Lærerne mener, at eleverne ved afslutningen af folkeskolen har grundlæggende viden og færdigheder i matematik, de mener, at mange af deres elever har et fagligt niveau, der sætter dem i stand til at bruge matematikken rutinemæssigt. Og de vurderer, at kun et mindretal af eleverne besidder mere selvstændige kompetencer i matematik (se fordeling i tabel 6 nedenfor).

Der anvendes kun 3 kategorier af hensyn til overblikket i den første tabel. Det er den højeste frekvens i én svarkategori til hvert spørgsmål, der rapporteres, for at give et mønster i lærernes primære prioriteringer. Hvis svarfordelingerne i kategorierne ligger meget tæt, placeres den samme variabel i flere søjler, se fx 'De har kendskab til matematikfagets begreber'.

> 80 % af mine elever kan	**> 40 - < 80 % af mine elever kan**	**> 20 - < 40 % af mine elever kan**
	VIDEN	
De har kendskab til matematikfagets begreber (41 %).	De har kendskab til matematikfagets begreber (43 %).	De fordyber sig i det matematikfaglige også udover de skemalagte opgaver (35 %).
	De forstår Matematikfagets teorier (43 %).	
	De forstår matematikfagets metoder (49 %).	
	De forstår matematikfagets mulige samspil med andre fagområder (34 %).	
	De forstår, hvad matematikfaget kan bruges til (herunder dets styrker og begrænsninger) (32 %).	
	FÆRDIGHEDER	
	De kan rutinemæssigt anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser (47 %).	
	De kan rutinemæssigt arbejde med matematikfagets eksperimentelle metoder (43 %).	
	De kan relatere deres viden indenfor matematik til andre fag i uddannelsen (38 %).	
	De er i stand til at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter (30 %).	
	De er i stand til at fordybe sig i matematikfaglige emner (30 %).	
	De kan formidle matematikviden til en given målgruppe (39 %).	
	KOMPETENCER	
	De kan selvstændigt anvende fagets teorier, metoder, begreber og/eller værktøjer til analyse af komplekse matematiske problemstillinger (39 %).	
	De kan selvstændigt opstille matematiske modeller til undersøgelse af matematikfaglige problemer (34 %).	
	De kan selvstændigt anvende faget til at formulere relevante matematikfaglige, undersøgende spørgsmål (38 %).	

	De kan anvende matematikfaget til at tænke nyt i forbindelse med modellering og anvendelser af matematikken (34%).	
	De er i stand til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget (37%).	
	De er i stand til at oversætte mellem matematikfaglige begreber og/eller teorier og fænomener i hverdagslivet, naturen og/eller samfundet (39%).	
	LYST OG INTERESSE	
	De er optagede af at skulle læse videre (på gymnasiet/videregående uddannelse) (31%).	
	De er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof) (36%).	
	De er gode til at tage ansvar for deres faglige udvikling (32%).	
	De er gode til at samarbejde om løsning af matematikfaglige opgaver (39%).	
	FAGSPECIFIKKE SPØRGSMÅL	
Kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer) (36%).	Kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer) (35%).	
	Har forståelse for begrænsninger og muligheder ved de matematiske værktøjer, de anvender (42%).	
	Kan vurdere og argumentere for den matematiske realiserbarhed af ideer, påstande og/eller produkter (39%).	
	Kan vurdere rigtigheden af egne beregninger og resultater (41%).	

Tabel 7. Folkeskolelærernes vurdering af deres elevers afgangsniveau i matematik (angivelse af hyppigste svarkategori).

Vi har ikke nogen mulighed for direkte at sammenligne folkeskolelærernes vurdering af deres elevers afgangsniveau med gymnasielærernes vurdering af indgangsniveauet for de 1. g-elever, der vælger at følge et treårigt A-niveau. For det første har de to lærergrupper svaret på forskellige skalaer. Folkeskolelærerne har svaret på, hvor mange af deres elever der har et godt niveau, og gymnasielærerne har svaret på, hvor enige de er i, at eleverne har et godt niveau. For det andet er den population, lærerne svarer i forhold til, forskellig i de to tilfælde, idet vi må forvente, at det er de folkeskoleelever, der er dygtigst til matematik, der vælger et treårigt A-niveau i gymnasiet. Man kunne godt have en forventning om, at gymnasielærerne er enige og overvejende enige i, at netop de folkeskoleelever, der er dygtigst til matematik, har et godt niveau ved start i gymnasiet. Men det er ikke tilfældet, jf. tabel 8 (s. 64-65). Bemærk, at kategorierne 'helt enig' og 'overvejende enig' er slået sammen i rapporteringen.

> 75 % er enige/ overvejende enige i, at elever	< 75 - > 40 % er enige/ overvejende enige i, at elever	< 40 - > 15 % er enige/ overvejende enige i, at elever	< 15 % er enige/overvejende enige i, at elever
		VIDEN	
	Har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber (67 %).	Udviser interesse for at tilegne sig viden om matematik, også udover de skemalagte opgaver (40 %).	Har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles (10 %).
	Har kendskab til grundlæggende teorier indenfor matematik (45 %).		
	Har kendskab til grundlæggende metoder indenfor matematik (48 %).		
	Har grundlæggende forståelse for relationen mellem matematik og andre fagområder (såvel naturvidenskabelige som øvrige) (49 %).		
		FÆRDIGHEDER	
	Har øvet sig i at anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser (50 %).	Har prøvet at relatere deres viden om matematik på tværs af emner i faget (26 %).	Har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter (7 %).
	Har trænet arbejdet med matematikfagets metoder (55 %).	Har trænet evnen til at tilegne sig viden om matematikfaglige emner (26 %).	
		Har trænet evnen til at formidle matematikfaglig viden (30 %).	
		KOMPETENCER	
	Har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematikfaglige problemstillinger (47 %).	Har forståelse for, hvordan man kan anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i nye sammenhænge (17 %).	Har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik (6 %).
		Har trænet evnen til at bruge matematikfaget til at forstå sammenhænge i hverdagslivet, naturen og/eller samfundet (33 %).	
		Finder interesse i at søge matematikfaglig viden på egen hånd (18 %).	
		Har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget (33 %).	

LYST OG EVNE			
	Er gode til at tage ansvar for deres matematikfaglige udvikling (46 %).	Er meget optagede af at skulle læse videre på videregående uddannelse (35 %).	
	Har trænet evnen til at samarbejde om løsning af matematiske opgaver (64 %).	Er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof) (40 %).	
FAGSPECIFIKKE SPØRGSMÅL			
	Har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer) (48 %).	Har forståelse for begrænsninger og muligheder ved de matematiske værktøjer, de anvender (17 %).	Har erfaring med at vurdere den matematiske realiserbarhed af ideer, påstande og/eller produkter (8 %).
		Har erfaring med at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater (33 %).	

Tabel 8. Matematiklærere i gymnasiet: Andel matematiklærere, der er 'helt enig' og 'overvejede enig' i udsagn om faktisk indgangsniveau for 1. g (treårigt A-niveau).

Af tabellen fremgår det, at der er meget forskellige vurderinger blandt gymnasielærerne af elevernes indgangsniveau i matematik, og tendensen er, at der er størst enighed om, at eleverne på nogle af de mere komplekse parametre ikke har et godt niveau. Meget få mener således, at eleverne *har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles* (10 %), *har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* (7 %), *har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik* (6 %) og *har erfaring med at vurdere den matematiske realiserbarhed af idéer, påstande og/eller produkter* (9 %). Der er størst enighed om, *at eleverne har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber* (67 %) og *har trænet evnen til at samarbejde om løsning af matematiske opgaver* (64 %), altså mere grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer, hvilket stemmer godt overens med folkeskolelærernes vurdering. Det bør også bemærkes, at 48 % af gymnasielærerne mener, *at eleverne har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter på gymnasiets 3-årige A-niveau, hvilket også hænger godt sammen med folkeskolelærernes bedømmelse af deres elever.

På den anden side svarer over 80 % af gymnasielærerne, at de er enige (helt eller overvejende) i, at elevernes matematikkundskaber svarer til deres forventninger. Hvis det skal fortolkes sådan, at gymnasielærerne stort set er tilfredse med det niveau, eleverne har, når de begynder i gymnasiet, tyder svarmønstrene på, at lærerne i folkeskolen og lærerne i gymnasiet mener noget forskelligt, når de taler om et godt niveau i matematik.

Tabel 8 skal læses i kolonner, som opdeler variablene efter, hvor mange der er enige/overvejende enige i, at gymnasieelever kan den del af matematikfagligheden, som variablene i kolonnen beskriver. Fx hører kolonnen helt til venstre til den gruppe af variable, som 75 % eller flere af gymnasielærerne er enige eller overvejende enige i, at eleverne kan, når de starter i gymnasiet.

8.4.3. Overgangen mellem gymnasium og videregående uddannelse

I spørgeskemaet har vi også bedt gymnasielærere i matematik vurdere, hvor stor en del at deres afgangselever (Mat-A, ubrudt treårigt forløb), de vurderer, lever op til de samme udsagn om matematikfaglighed som dem, folkeskolelærerne blev bedt om at vurdere deres afgangselever i forhold til.

Det kan bemærkes, at en høj andel af gymnasielærerne mener, at mellem 80 og 100 % af deres elever *har kendskab til matematikfagets begreber* (63 %), hvilket må siges at være det mest grundlæggende niveau. Der er en næsten lige så stor andel, der mener, at eleverne *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)* (61 %). På de fleste udsagn om viden- og færdigheder er den hyppigste vurdering fra gymnasielærerne, at mellem 60 og 79 % af deres elever ved afslutningen af gymnasiet behersker disse. Deres vurdering af, hvilken andel af deres elever der lever op til udsagnene om kompetencer, er imidlertid lavere. Det typiske svar er, at det lever mellem 20 og 59 % af eleverne op til.

Tabel 9 skal læses som kategorier af, hvor stor en andel af eleverne der kan leve op til fagligheden. Kolonnen til venstre beskriver fx den del af matematikfagligheden, som 80-100 % af eleverne kan leve op til ved slutniveauet i 3. g på Mat A-niveauet. 63 % af gymnasielærerne har svaret, at 80-100 % af eleverne har kendskab til matematikfagets begreber.

Kan 80-100 % af mine elever	**Kan 60-79 % af mine elever**	**Kan 20-59 % af mine elever**	**Kan 0-19 % af mine elever**
		VIDEN	
De har kendskab til matematikfagets begreber (63 %).	De forstår matematikfagets teorier (48 %).	De forstår, hvad matematikfaget kan bruges til (herunder dets styrker og begrænsninger) (47 %).	De fordyber sig i det matematikfaglige også udover de skemalagte opgaver (46 %).
	De forstår matematikfagets metoder (46 %).		
	De forstår matematikkens mulige samspil med andre fagområder (38 %).		
		FÆRDIGHEDER	
	De kan rutinemæssigt anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser (46 %).	De er i stand til at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter (54 %).	
	De kan rutinemæssigt arbejde med matematikfagets eksperimentelle metoder (41 %).	De er i stand til at fordybe sig i matematikfaglige emner (43 %).	
		De kan relatere deres viden indenfor matematik til andre fag i uddannelsen (47 %).	
		De kan formidle matematikviden til en given målgruppe (41 %).	

KOMPETENCER			
		De kan selvstændigt anvende faget til at formulere relevante matematikfaglige, undersøgende spørgsmål (66 %).	
		De kan selvstændigt anvende fagets teorier, metoder, begreber og/eller værktøjer til analyse af komplekse matematiske problemstillinger (50 %).	
		De kan selvstændigt opstille matematiske modeller til undersøgelse af matematikfaglige problemer (57 %).	
		De kan anvende matematikfaget til at tænke nyt i forbindelse med modellering og anvendelser af matematikken (59 %).	
		De er i stand til at oversætte mellem matematikfaglige begreber og/eller teorier og fænomener i hverdagslivet, naturen og/eller samfundet (54 %).	
		De er i stand til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget (43 %).	
LYST OG INTERESSE			
De er gode til at samarbejde om løsning af matematikfaglige opgaver (42 %).	De er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof) (38 %).	De er optagede af at skulle læse videre på videregående uddannelse (33 %).	
	De er gode til at tage ansvar for deres faglige udvikling (40 %).		
FAGSPECIFIKKE SPØRGSMÅL			
Kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer) (61 %).	Kan vurdere rigtigheden af egne beregninger og resultater (45 %).	Har forståelse for begrænsninger og muligheder ved de matematiske værktøjer, de anvender (43 %).	
		Kan vurdere og argumentere for den matematiske realiserbarhed af ideer, påstande og/eller produkter (52 %).	

Tabel 9. Gymnasielærernes vurdering af deres elevers afgangsniveau i matematik (angivelse af hyppigste svarkategori).

Der er af samme grund som ved sammenligningen af folkeskolelærernes og gymnasielærerne oplevelse af elevernes niveau heller ikke nogen direkte sammenligningsmulighed mellem gymnasielærernes oplevelse af deres elevers afgangsniveau og undervisernes oplevelse af de BA-studerendes niveau ved start på videregående uddannelse. En grov sammenfatning af gymnasielærernes oplevelse af deres elevers afgangsniveau er (jf. ovenfor), at det for de fleste elevers vedkommende er på et grundlæggende niveau med henvisning til det 'grundlæggende arsenal af viden og færdigheder', jf. G i GVH-rammen.

Af tabel 10 nedenfor fremgår det, at matematiklærerne på de videregående uddannelser har ret forskellige vurderinger af, om deres BA-studerendes indgangsniveau kan siges at være godt. Det kan hænge sammen med mange forhold, hvor et af dem er, at de forskellige uddannelser kan tænkes at stille forskellige krav. Men vi kan se, at langt de fleste (72 %) er enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter på deres videregående uddannelse. Og vi kan også se, at mange (62 %) er enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber*.

Der kan således spores en vis enighed om disse to elementer hele vejen fra folkeskolen til videregående uddannelse. Vi kan også se, at meget få matematiklærere på de videregående uddannelser vurderer, at deres studerende kommer med et godt niveau på en række af de mere komplekse kompetencer, vi spørger til: Kun 6 % er således overvejende enige i, at de studerende har et godt niveau, når det gælder *viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles*, kun 9 % er overvejede enige i, at de studerende har øvet sig *i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* eller *har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik*. 24 % er enige/overvejende enige i, at de studerende *har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget*. Her er der altså klart nogle elementer, der kan arbejdes med i forhold til overgangen fra gymnasium til videregående uddannelse. Tabel 10 viser ligeledes, at forholdsvis mange matematiklærere på de videregående uddannelser vurderer, at deres studerende ikke har et meget højt niveau på en række videns-, færdigheds- og kompetenceelementer. Men som i forholdet mellem folkeskole og gymnasium er det også her et åbent spørgsmål, hvad der skal forstås ved et godt niveau. Ekspertgruppen diskuterede, at de videregående uddannelser har tilpasset sig det niveau, de studerende kommer med.

Bemærk, at kategorierne 'helt enig' og 'overvejende enig' er slået sammen for at anskueliggøre, hvad eleverne kan ved start på deres videregående uddannelse. Tabellen skal læses i kolonner, som opdeler variablene efter, hvor mange der er enige/overvejende enige i, at deres studerende kan den del af matematikfagligheden, som variablene i kolonnen beskriver.

> 75 % er enige/overvejende enige i, at studerende	**< 75 - > 40 % er enige/ overvejende enige i, at studerende**	**< 40 - > 15 % er enige/ overvejende enige i, at studerende**	**< 15 % er enige/overvejende enige i, at studerende**
		VIDEN	
	Har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber (62 %).	Udviser interesse for at tilegne sig viden om matematik, også udover de skemalagte opgaver (39 %).	Har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles (6 %).

	Har grundlæggende forståelse for relationen mellem matematik og andre fagområder (såvel naturvidenskabelige som øvrige) (41 %).		
	Har kendskab til grundlæggende teorier indenfor matematik (43 %).		
	Har kendskab til grundlæggende metoder indenfor matematik (57 %).		
FÆRDIGHEDER			
	Har øvet sig i at anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser (52 %).	Har prøvet at relatere deres viden om matematik på tværs af emner i faget (32 %).	Har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter (9 %).
	Har trænet arbejdet med matematikfagets metoder (52 %).	Har trænet evnen til at formidle matematikfaglig viden (30 %).	
	Har trænet evnen til at tilegne sig viden om matematikfaglige emner (32 %).		
KOMPETENCER			
		Har forståelse for, hvordan man kan anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i nye sammenhænge (17 %).	Har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik (4 %).
		Har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematikfaglige problemstillinger (35 %).	
		Har trænet evnen til at bruge matematikfaget til at forstå sammenhænge i hverdagslivet, naturen og/eller samfundet (17 %).	
		Finder interesse i at søge matematikfaglig viden på egen hånd (28 %).	
		Har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget (25 %).	

LYST OG EVNE			
	Er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof) (46 %).		
	Er gode til at tage ansvar for deres matematikfaglige udvikling (48 %).		
	Har trænet evnen til at samarbejde om løsning af matematiske opgaver (52 %).		
FAGSPECIFIKKE SPØRGSMÅL			
Har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer) (72 %).		Har forståelse for begrænsninger og muligheder ved de matematiske værktøjer, de anvender (19 %).	Har erfaring med at vurdere den matematiske realiserbarhed af ideer, påstande og/eller produkter (9 %).
		Har erfaring med at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater (23 %).	

Tabel 10. Matematiklærere på videregående uddannelser: Andel 'helt enig' og 'overvejede enig' i udsagn om faktisk indgangsniveau for BA-studerende.

I næste afsnit går vi nærmere ind på spørgsmålet om, hvad matematikunderviserne på de videregående uddannelser anser for nødvendige forudsætninger for at starte på BA-uddannelsen, og om de studerende er parate, når de starter.

8.4.4. Forskelle og ligheder i iagttagelse af matematikfaglighed og dens udvikling

I dette analyseafsnit ses der først på de forudsætninger, som uddannelsesniveauerne forventer af elever og studerende, og i hvilken grad lærere og undervisere vurderer, at eleverne lever op til forudsætningerne (er parate til undervisningen i matematik på dette niveau). Dernæst analyseres den oplevede udvikling i matematikfagligheden for elever og studerende.

8.4.4.1. Forudsætninger, der vurderes at være vigtige, når elever/studerende begynder deres matematikundervisning

Gymnasielærerne vurderer, at det især er vigtigt, at eleverne har følgende forudsætninger (dvs. flest, der har svaret 'helt enig' og 'overvejende enig' på skalaen, de konkrete spørgsmål er gengivet i enkelt citationstegn):

- Viden: 'har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber' (93 % har svaret helt enig eller overvejende enig), og 'har kendskab til grundlæggende metoder indenfor matematikfaget' (85 %).

- Færdigheder: 'har øvet sig i at anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser (84%) og 'har trænet arbejdet med matematikfagets metoder (83%)
- Kompetencer: 'har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematikfaglige problemstillinger' (87%) og 'har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget' (81%) og 'har erfaring med at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater' (85%).
- Lyst og interesse: 'er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof' (87%) og 'er gode til at tage ansvar for deres matematikfaglige udvikling' (92%).

På de **videregående uddannelser** er prioriteringen af, hvad der er vigtige forudsætninger for de studerendes læring af matematik (svaret 'helt enig' og 'overvejende enig' på skalaen) stort set de samme, som de er hos gymnasielærerne. Variationen viser sig i prioriteringen, idet respondenterne fra det videregående niveau hyppigere svarer 'helt enig' end gymnasielærerne på de centrale forudsætningsvariable.

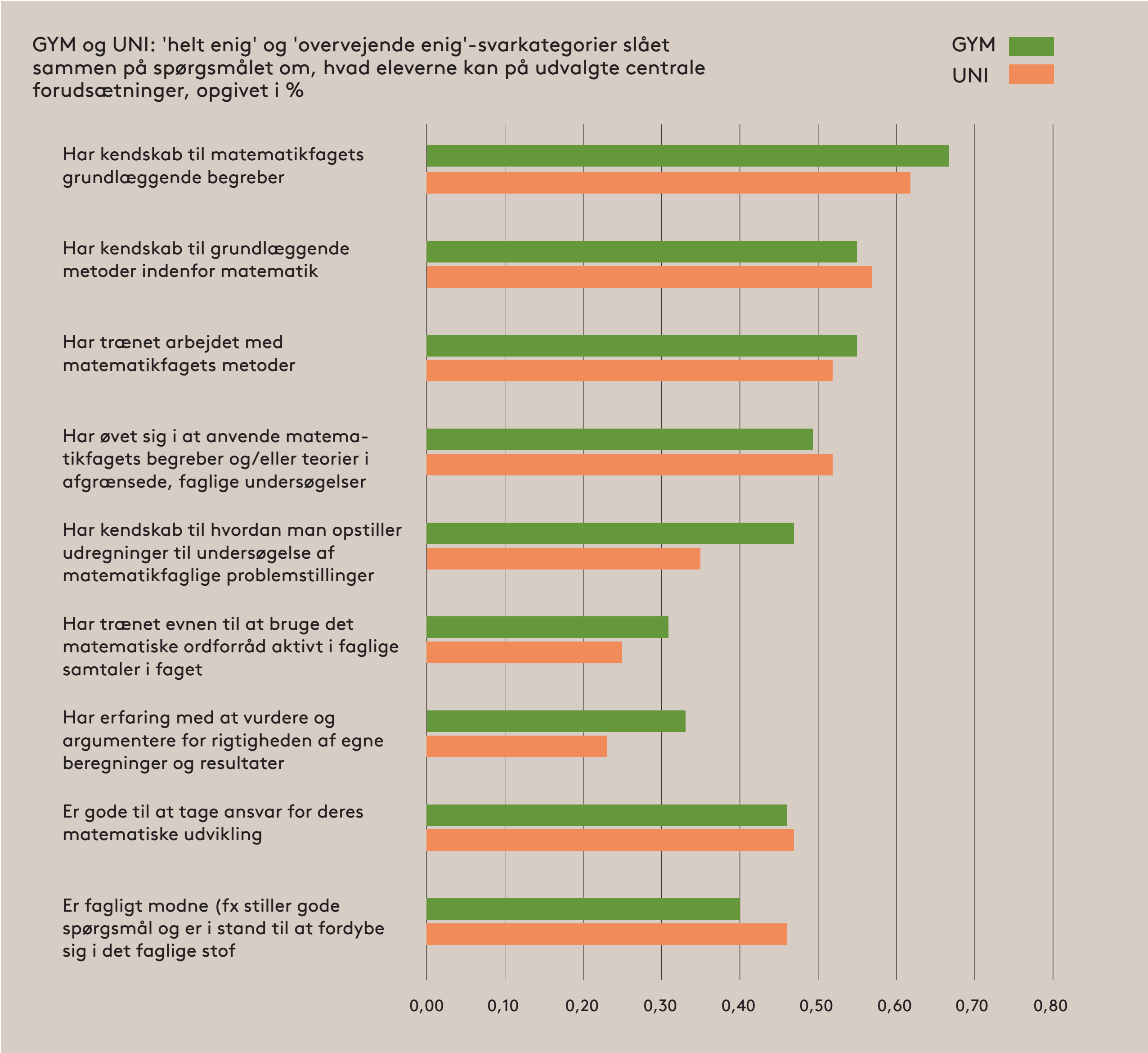
- Viden: 'har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber' (94% har svaret helt enig eller overvejende enig), og 'har kendskab til grundlæggende metoder indenfor matematikfaget' (94%). På det videregående niveau er der flere, der svarer 'helt enig' end på gymnasieniveauet på disse variable.
- Færdigheder: 'har øvet sig i at anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i afgrænsede, faglige undersøgelser' (85%) og 'har trænet arbejdet med matematikfagets metoder' (93%).
- Kompetencer: 'har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematik-
faglige problemstillinger' (90%) og 'har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt
i faglige samtaler i faget' (84%) og 'har erfaring med at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater' (96%).
- Lyst og interesse: 'er fagligt modne (fx stiller de gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof' (93%) og 'er gode til at tage ansvar for deres matematikfaglige udvikling' (94%).

Det indikerer, at der er enighed om de centrale matematikfaglige forudsætninger *vertikalt* i uddannelsessystemet. Det underbygger vores antagelse i GVH-analyserne af, at hvert nyt uddannelsesniveau påbegyndes på G-niveauet. Arsenalet af viden, færdigheder og kompetencer på højest muligt faglige niveau på det foregående uddannelsestrin 'konverteres' til G-niveauet på det nye uddannelsesniveau, og for at udbygningen af matematikfagligheden kan fortsætte, er der brug for ovenstående faglige afsæt; uanset hvilket uddannelsesniveau den lærende er kommet til.

Det næste afsnit beskriver den oplevede grad af parathed hos elever og studerende, det vil sige, i hvilken grad gymnasielærere og undervisere på de videregående uddannelser oplever, at de studerende har det påkrævede G-niveau på dette trin for deres matematiske faglige udvikling.

8.4.4.2. Hvad kan elever og studerende, når undervisningen i matematik begynder (parathed)

Figur 24 opsummerer, hvad det vurderes, at eleverne *kan* i forhold til de nævnte centrale, vigtige matematikfaglige forudsætninger fra forrige afsnit. Bemærk, at svarkategorierne 'helt enig' og 'over



Figur 24. Gymnasium og universitet. Enighed i spørgsmål om, hvad eleverne kan (udvalgte matematikfaglige forudsætninger).

vejende enig' er slået sammen, da det dels er uklart, hvor skillelinjen mellem kategorierne går i de vurderinger, vi beder respondenterne om, og dels er det som nævnt uklart, hvilket erfaringsgrundlag de svarer på. Det er dog værd at bemærke, at andelen af 'helt enig' er væsentligt mindre end andelen af 'overvejende enig' for begge uddannelsesniveauer vedr. elevers og studerendes parathed.

Hvis det er en korrekt antagelse, at tidligere uddannelsesniveauers højeste faglige niveau af viden, færdigheder og kompetencer "konverteres" til grundlæggende niveauer ved start på et nyt uddannelsestrin, så viser figur 24, at mellem 50 og 67 % af respondenterne på begge uddannelsestrin finder, at grundlæggende viden og færdigheder er på plads, når eleverne/studerende påbegynder deres uddannelse (4 første søjlepar i figur 24). Lysten til matematikken løftes i gymnasiet, hvad angår den faglige modenhed. Hvad angår de 3 kompetencevariable (gengivet i enkelt citationstegn), så mener 23-47 % af respondenterne, at elever/studerende 'har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematikfaglige problemstillinger', 'har erfaring med at vurdere egne beregninger og resultater' samt 'har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd i faglige samtaler'.

Det vil sige, at viden og færdigheder og parathed står skarpere som både ønskede forudsætninger hos elever og studerende end kompetencer. Det er især på kompetencerne, at både gymnasielærere og undervisere på de videregående uddannelser oplever diskrepans mellem deres ønsker til forudsætning, og hvad de oplever at modtage.

Igen er der stor lighed mellem vurderingerne fra hhv. gymnasielærere og universitetsundervisere, her undtages variablen 'faglig modenhed (fx stiller gode spørgsmål og er i stand til at fordybe sig i det faglige stof)', som flere universitetsunderviserne vurderer, at de studerende kan, end gymnasielærere vurderer, at elever kan. Ligeledes undtages variablen 'har kendskab til, hvordan man opstiller udregninger til undersøgelse af matematikfaglige problemstillinger', som flere gymnasielærere vurderer, at eleverne kan, end universitetsundervisere vurderer, at de studerende kan.

Udover konstateringen om, at elever og studerende kan leve op til de matematikfaglige centrale forudsætninger, så træder følgende frem:

Gymnasielærere vurderer, at eleverne *ikke* (mange svar i kategorierne 'overvejende uenig' og 'uenig')

- har forståelse for, hvordan man kan anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i nye sammenhænge (78%),
- har øvet sig på at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter (79%),
- har arbejdet nyskabende i forhold til egen viden i matematik (81%),
- har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles (88%).

Undervisere på videregående universitetsuddannelser vurderer, at de studerende *ikke* (mange svar i 'overvejende uenig' og 'uenig')

- har forståelse for, hvordan man kan anvende matematikfagets begreber og/eller teorier i nye sammenhænge (65%),
- har øvet sig på at identificere matematikkens bidrag til ny viden/nye produkter (58%) (også mange 'ved ikke'-svar på denne variabel, 33%),
- har arbejdet nyskabende i forhold til egen viden i matematik (74%),
- har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles (81%).

8.4.5. Oplevelse af forandring i matematikfagligheden over tid

Spørgeskemaet indeholder matematiklærernes *oplevelse* af udviklingen i den matematiske faglighed over tid. Denne oplevelse er i nærværende undersøgelse inddraget i diskussionen af de øvrige analyser, der er gennemført. På baggrund af analysen af eksamenssættene og undervisningsbeskrivelser er konklusionen, at de matematikfaglige kerneemner, der dækkes (og bør dækkes), er de samme hen over de år, hvorfra vi har adgang til materialer. Det betyder, at de matematikfaglige søjler er konstante og sammenhængende. Det er det samme billede, vi ser i Norge og Sverige, hvad angår eksamenssættene.

Ses der på analysen af elevernes besvarelser af opgaver på det højest mulige matematikfaglige niveau i stx, er der også stabilitet i elevernes viden, færdigheder og kompetencer over årene. Opgaverne dækker viden, færdigheder og kompetencer med et konstant niveau af faglighed, og eleverne besvarer opgaverne med en stabil fordeling i F/R/I-U-rammen, som vi arbejder med. Det ses i de senere år, at der bliver flere delspørgsmål, fordi opgaverne stilladseres mere, så der så at sige opstår faglig progression indenfor den enkelte opgave. Men opgavernes faglige søjlehøjde er ensartet over årene.

Disse analyseresultater skal ses som bagtæppe for matematikunderviseres oplevelser af udviklingen i matematikfagligheden. Det interessante er, at vi på baggrund af spørgeskemadataene kan spore en svækkelse af matematikfagligheden på visse områder, hvilket bliver opsummeret i de to kommende afsnit. Diskrepansen kan skyldes, at vi ikke har undersøgt undervisningen men kun den *erfaringsbaserede oplevelse* af undervisningen.

8.4.5.1. Vurdering af forandring i fagligheden i matematik ved **modtagelse** af elever og studerende 2018 (både videregående uddannelser og gymnasiet)

Vurderingen af forandringer i fagligheden foregår på en skala med svarmulighederne 'væsentlig bedre', 'nogenlunde på samme niveau' og 'væsentligt ringere' samt 'ved ikke'. Respondenten vurderer udviklingen i matematikfagligheden ved at *sammenligne fagligheden hos de elever/studerende, der er modtaget i 2018 med egne erfaringer fra de startede som lærere til 2018.*

Den følgende tabel opsummerer de mest hyppige svar for hver af de tre skalakategorier fordelt på de to institutionstyper, der har besvaret dette spørgsmål. De nævnes i rækkefølge, så nr. 1 har den højeste hyppighed blandt respondenterne.

Institutions niveau	**Væsentligt bedre** ved modtagelse af elever/studerende 2018	**Nogenlunde samme niveau** ved modtagelse af elever/studerende 2018	**Væsentligt ringere** ved modtagelse af elever/studerende 2018
GYMNASIUM **(N=114)**	1. Evne til at bruge matematiske værktøjer til matematisk modellering (med værktøjer mener vi alt fra regnestok, lommeregner til it-programmer (34%). 2. Evne til at arbejde undersøgende/eksperimenterende med modeller i matematikfaget (11%). 3. Forståelse for matematikfagets bredde (3%).	1. Forståelse for matematikfagets bredde (66%). 2. Evne til at arbejde undersøgende/eksperimenterende med modeller i matematikfaget (62%). 3. Evne til at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater (61%).	1. Grundlæggende færdigheder indenfor matematik (53%). 2. Dybdeforståelse (ikke-overfladisk forståelse) (49%). 3. Evne til abstrakt tænkning (43%).
UNIVERSITET **(N=38)**	1. Evne til at bruge matematiske værktøjer til matematisk modellering (med værktøjer mener vi alt fra regnestok, lommeregner til it-programmer (35%). 2. Evne til at arbejde undersøgende/ eksperimenterende med modeller i matematikfaget (14%). 3. Forståelse for matematikfagets bredde og den grundlæggende viden om matematik (5%).*	1. Kompetence til at tage selvstændigt stilling til matematik (58%). 2. Kompetence til at arbejde selvstændigt i matematik (51%). 3. Fundamentet for at fortsætte kompetenceudviklingen i matematik og evnen til at bruge matematiske værktøjer til matematisk modellering (47%).*	1. Dybdeforståelse (ikke-overfladisk forståelse) (70%). 2. Grundlæggende færdigheder indenfor matematik (65%). 3. Evne til abstrakt tænkning (56%).

Tabel 11. Oversigt over de mest hyppige svar for hver af de tre skalakategorier fordelt på gymnasium og universitet. *Der er flere spørgsmål med denne frekvens, alle er medtaget.

Der er to iagttagelser at gøre: Den første er, at gymnasielærere og undervisere på de videregående universitetsuddannelser er stort set enige i udviklingen over tid mht. matematikfagligheden hos de elever og studerende, de modtager. Kort sagt kan man sige, at elever og studerende er blevet bedre til at modellere problemer med værktøjer og arbejde eksperimenterende og undersøgende. Dette bakkes op af et stabilt niveau i at kunne forholde sig til modellernes rigtighed og beregninger i gymnasiet, og på universitetsniveauet til at kunne arbejde selvstændigt og selvstændigt forholde sig til matematikken. Det opleves samtidig som en bredde i matematikken, der over tid vurderes at blive mere udtalt. Dette står overfor en oplevelse af væsentligt ringere grundlæggende færdigheder, dybdeforståelse af matematikken og evne til abstrakt tænkning.

8.4.5.2. Vurdering af forandring i fagligheden i matematik ved afslutning af elever i 2018 (kun gymnasiet)

I forhold til den faglige udvikling ad åre i forhold til de elever, der sendes videre fra gymnasiet (fagligt niveau ved afslutning af 3. g), svares der meget forskelligt indenfor respondentgruppen. Lærerne er grundlæggende enige om, at den viden, der gives videre, vurderes til at være nogenlunde på samme niveau som tidligere (66 % siger nogenlunde samme niveau, mens 21 % siger væsentlig ringere). I forhold til de grundlæggende færdigheder indenfor matematik hos de elever, der i dag afsluttes, siger 49 %, at det er nogenlunde samme niveau, mens 40 % siger, at det er væsentligt ringere. Det er dermed en vurdering, der indikerer, at de grundlæggende færdigheder af gymnasielærerne vurderes til at være mere skrøbelige ved afslutningen af eleverne. Det vil sige, at matematikhuset er nogenlunde konstant, men fundamentet vurderes til at være blevet mere skrøbeligt. Mht. selvstændighed i forhold til arbejdet med matematik er meningerne blandt gymnasielærere delte.

Hvad angår 'dybdeforståelse' og 'evne til abstrakt tænkning', som universitetsundervisere vurderer, er blevet ringere, mener 57 % af gymnasielærere, at de afleverer elever med nogenlunde samme niveau af 'dybdeforståelse' til videre uddannelse, og 61 % mener, at de afleverer elever med nogenlunde samme niveau af 'abstrakt tænkning'. Hvis gymnasielærerne samtidig vurderer, at de elever, de selv modtager fra grundskolen, også er ringere på dybdeforståelse og abstrakt tænkning, så må der ske et vist fagligt løft igennem stx-uddannelsen til det 'nogenlunde samme niveau' over tid, som eleverne vurderes at afslutte på. Samtidig er der gymnasielærere, der mener, at dybdeforståelse er blevet ringere ved afslutning af 3. g-elever på højeste faglige niveau (32 %), og at evne til abstrakt tænkning er blevet ringere (29 %).

Endelig er der 70 % af gymnasielærerne, der vurderer, at elevernes evne til at vurdere og argumentere for rigtigheden af egne beregninger og resultater er på nogenlunde samme niveau, når de afslutter eleverne i 3. g.

Alt i alt vurderer matematiklærerne i gymnasiet det faglige niveau, deres elever går ud af gymnasiet med, som nogenlunde det samme over tid både for elever, de modtager fra grundskolen, og for elever, de sender videre i uddannelsessystemet. Det er på samme niveau alle årene, den enkelte lærer har erfaring med, og med hensyn til matematikfaglige it-værktøjer er der ligefrem tale om et fagligt løft.

8.4.6. Iagttagelse af instrumentel genese på baggrund af analyserne af spørgeskemaet

Den instrumentelle genese er i denne analyse opfattet som et væsentligt bidrag til den centrale matematiske modelleringskompetence. På baggrund af de øvrige analyser, der er lavet i undersøgelsen, har det været svært at iagttage den instrumentelle genese, men de fagspecifikke spørgsmål i spørgeskemaet og et par af de generelle spørgsmål kan indikere potentialet i den instrumentelle genese, og at elever og studerende har et matematikfagligt fundament, der yderligere kan udbygges gennem instrumentel genese.

Aktuelt vurderer 61 % af gymnasielærerne, at 80-100 % af de elever, de afsluttede i 3. g i 2018 på Matematik A 'kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)'.

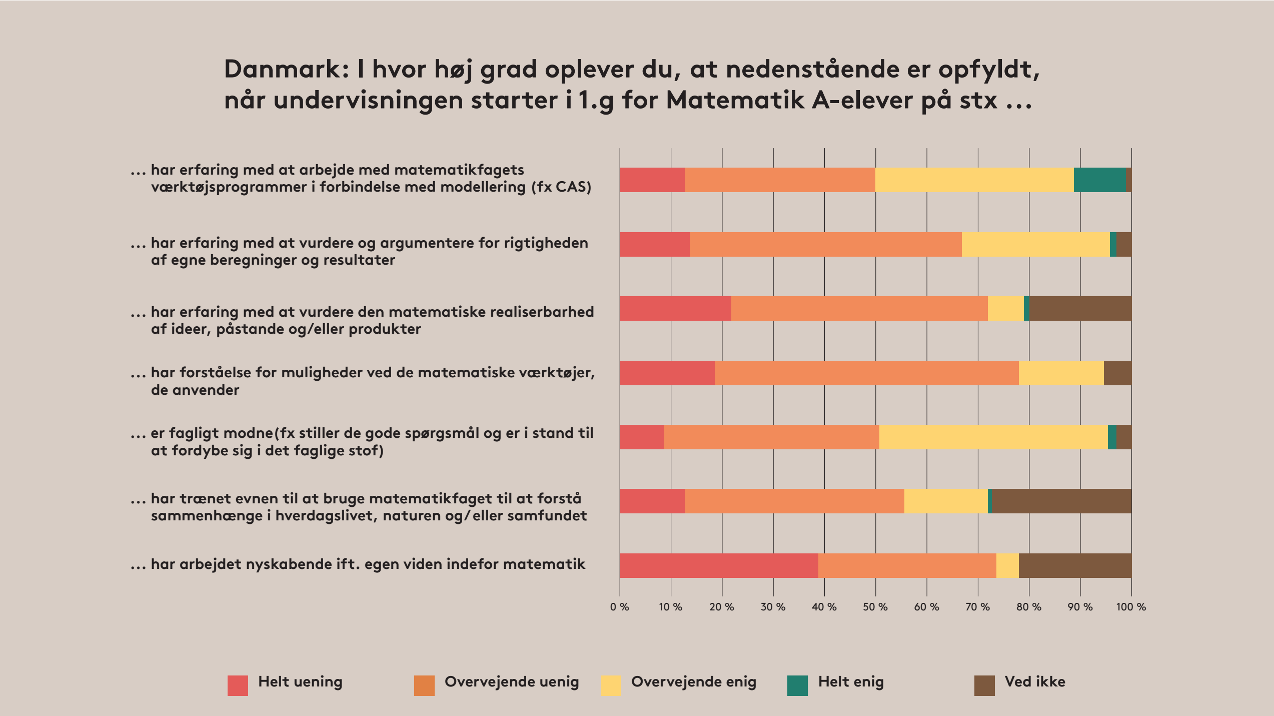
Både universitetsundervisere og gymnasielærere svarer, at elever og studerende *over tid* er blevet væsentligt bedre til at anvende matematikfaglige it-værktøjer som CAS, og samtidig er lærere og undervisere fra begge niveauer helt enige og overvejende enige i, at elever og studerende har erfaringer i at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering, når de starter deres uddannelse.

Således svarer 48 % af gymnasielærerne, at elever, de afsluttede i 2018, er væsentligt bedre til at anvende matematiske værktøjer til matematisk modellering end tidligere års elever, mens 34 % svarer, at elever, de modtog i 2018 i 1. g sammenlignet med tidligere tiders elever også er væsentligt bedre til at bruge matematikværktøjerne til modellering. 35 % af universitetsundervisere svarer, at de studerende i 2018 sammenlignet med tidligere års studerede er væsentligt bedre til at anvende matematiske værktøjer til modellering.

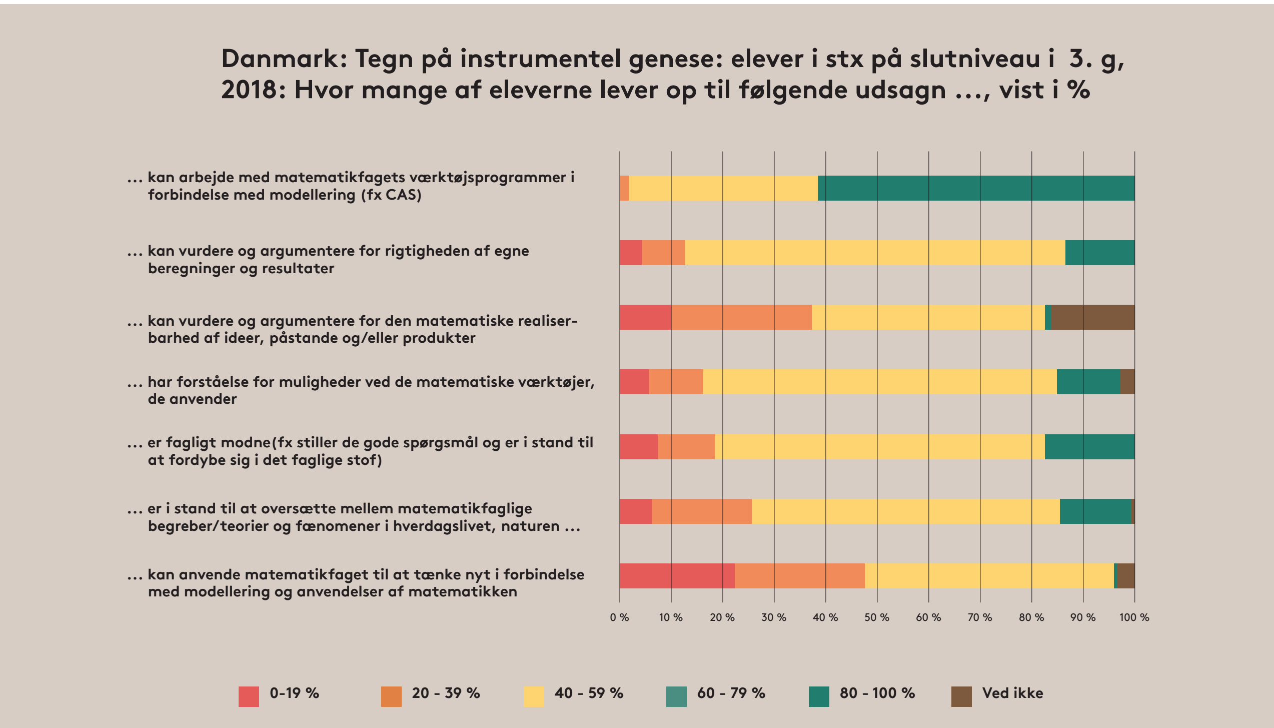
72 % af universitetsunderviserne svarer 'helt enig' eller 'overvejende enig' i, at de opstartende studerende har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer, og på det tilsvarende spørgsmål svarer 48 % af gymnasielærerne, at de er 'helt enig' eller 'enig' i, at eleverne, de modtager, har erfaringer i modellering i værktøjsprogrammerne fra grundskolen, når de starter i 1. g.

Med til at indikere potentialet for den instrumentelle genese *i nutidens* stx-uddannelse hører, hvad eleverne kan, når de starter i 1. g, og når de afslutter 3. g, med hensyn til udvalgte variable fra spørgeskemaet, der kan operationaliseres som *tegn* på instrumentel genese. **Bemærk, at spørgsmålene ikke er målt på den samme skala og derfor ikke er direkte sammenlignelige.** Skalaen på spørgsmålet om elevernes niveau i 1. g er "vendt om", og med farvelægningen antydes sammenlignelighed: Kategorierne 'helt uenig' og 'overvejende uenig' er fortolket til at modsvare hhv. 0-19 % og 20-39 %. Da der ikke er et midtpunkt på enighedsskalaen, fortolkes 40-59 % som 'overvejende enig' *sammen med* 60-79 % (og de har derfor samme farve i figur 26), mens kategorien 80-100 % tolkes som 'helt enig'.

Diagrammerne (s. 77) viser fordelingen af svar i svarkategorier, og kategorierne har hver sin farve. Hvis man sammenligner de to figurer, så kommer det til udtryk, at der i løbet af gymnasieforløbet i Matematik A for stx-elever skabes et markant fagligt løft i arbejdet med modellering med digitale matematikfaglige værktøjer som CAS, elevernes evne til vurderingen af egne beregninger og resultater samt elevernes forståelse for begrænsninger og muligheder ved de matematiske redskaber og værktøjer. Det vil sige, at der skabes et grundlag for instrumentel genese, der antages at have yderligere potentiale, når man ser på elevernes evne til at stille gode spørgsmål, til at kunne forstå sammenhænge i hverdagslivet, naturen og/eller samfundet samt elevernes evne til at være nyskabende i forbindelse med modellering og anvendelser af matematikken.



Figur 25. Danmark. Læreroplevelse af opfyldelse af matematikfaglige forudsætninger hos elever ved start i 1. g.



Figur 26. Danmark: Tegn på instrumentel genese i gymnasiet. BEMÆRK: Kategorierne 40-59 % og 60-79 % er slået sammen i figur 26 som udtryk for 'overvejende enig' jf. skalaen for foregående figur 25 af hensyn til sammenligneligheden, og derfor har de to kategorier den samme gule farve i denne figur 26. Dette er der argumenteret for i teksten ovenfor.

8.5. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner på spørgeskemaundersøgelserne

Der er en oplevet diskrepans mellem, hvad gymnasielærerne synes, de leverer, og hvad aftagerne på de videregående universitetsuddannelser oplever, at de modtager. Det samme gør sig gældende for folkeskolerne og gymnasieniveauet. Sammenfattende om overgangen mellem gymnasium og videregående uddannelse kan vi konkludere, at den grundlæggende matematik ser ud til at være på plads, men også at de mere komplekse kompetencer ikke er det i samme grad.

Dette er i ekspertgruppen blevet diskuteret som et potentiale for at anvende matematikfaglige it-værktøjer, bl.a. CAS-værktøjer, så de understøtter både bredden og dybden i matematikfagligheden. *Potentialet* i gymnasiet er at åbne for de kreative, undersøgende og eksperimenterede matematikfaglige analyser og modelleringsopgaver for bedre at bygge bro til de videregående universitetsuddannelser, der ønsker sig dette (abstrakt tænkning mv.), og som oplever, at netop denne del er blevet ringere. Forskellige delanalyser af spørgeskemadata, fx af instrumentel genese, og iagttagelse af, hvad der er på nogenlunde samme niveau over tid, indikerer, at der er et fundament at bygge på i forhold til en anden anvendelse af CAS-værktøjer end til at håndtere de grundlæggende matematikfaglige færdigheder.

> *"Det er forskelligt, hvordan vi [som underviser i matematik i stx] giver matematikfaget videre – det er ikke entydigt, hvad der gives videre: Nogle synes, det er et regnefag, andre synes det er et dannelsesfag. I gymnasiet har vi ikke det samme [ikke alle har det samme] fagsyn på matematik." (stx-matematiklærer i ekspertudvalget)*

9. Analyser af materiale fra forskellige perioder

9.1. Metoder og materialer

Det historiske perspektiv er allerede berørt under de enkelte analyseafsnit. Formålet med analysen i nærværende afsnit har været at bruge analyserammen til at beskrive udviklingen i matematikfagligheden. Udover at sammenkæde de gennemførte analyser tilføjer dette afsnit figurer, der opsummerer fordelingen af opgaver i eksamenssættene over tid.

I det følgende beskrives kort de indsigter, som de foregående afsnit har bidraget med, og herefter udvides analysen af eksamenssættene.

Elevbesvarelserne af eksamenssættene viser, at eleverne ikke bliver hverken bedre eller dårligere til at besvare de opgaver, der stilles i deres eksamenssæt. Deres matematikfaglige niveau udviser dermed stabilitet, selvom opgavesættene udvikler sig, hvilket vi tager som en indikation af, at matematikfagligheden også udvikler sig og åbner sig for nye *potentialer.*

Analysen af **undervisningsbeskrivelserne** fra 2007 til 2018 viser, at alle undersøgte 3-årige A-niveau-hold er undervist i læreplanens kernestof, og at matematikhuset er konstant i den undersøgte årrække.

På baggrund af **spørgeskemaerne** kan der konstateres en udvikling i oplevelsen af elevernes matematikfaglige niveau.

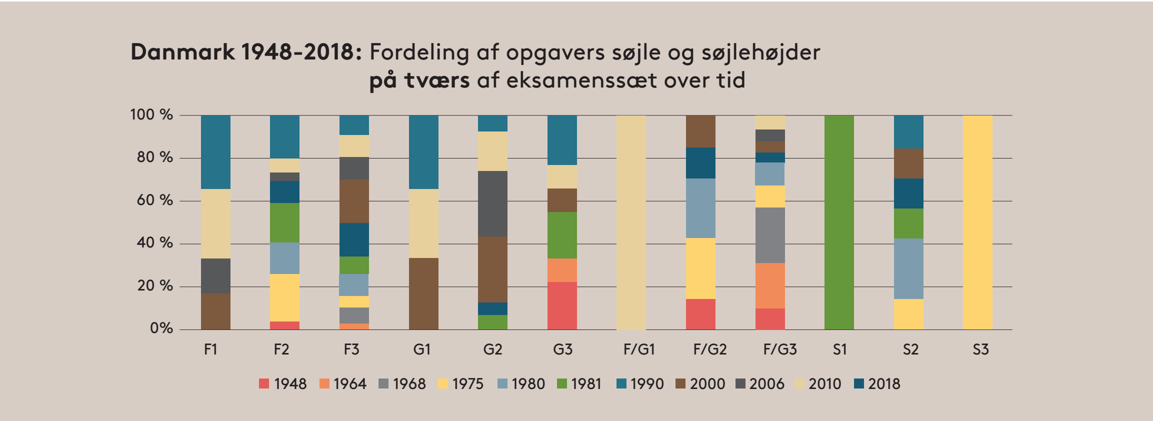
Endelig kan det fra GVH-undersøgelsen af **eksamenssættene** konkluderes, at elever opbygger et arsenal af viden og færdigheder, og hvordan viden og færdigheder kan anvendes til at løfte elevens vertikale og horisontale kompetencer. GVH-fordelingen af opgaver er over årene stabil, og andelen af V-opgaver er stabil, omend der spørges på en anden måde i dag end i 1948, er det den samme faglige højde på opgaverne. Det vil sige, at opgaverne stiller de samme krav til grundviden hos eleverne, mens der samtidig er et andet færdighedsniveau, hvor eleverne nu skal kunne vælge redskab; nogle opgaver kan mest effektivt og efficient løses med it-værktøjer, andre med blyanten. For nogle elever bliver det lettere, for andre bliver det sværere. ”[...] kompleksiteten er større, de skal selv træffe et værktøjsvalg, men du kan nemmere komme til målet, der er ikke alle de trin, der var påkrævet i 1981. Er det så bedre?” (ekspert).

9.2. Resultater (deskriptiv analyse)

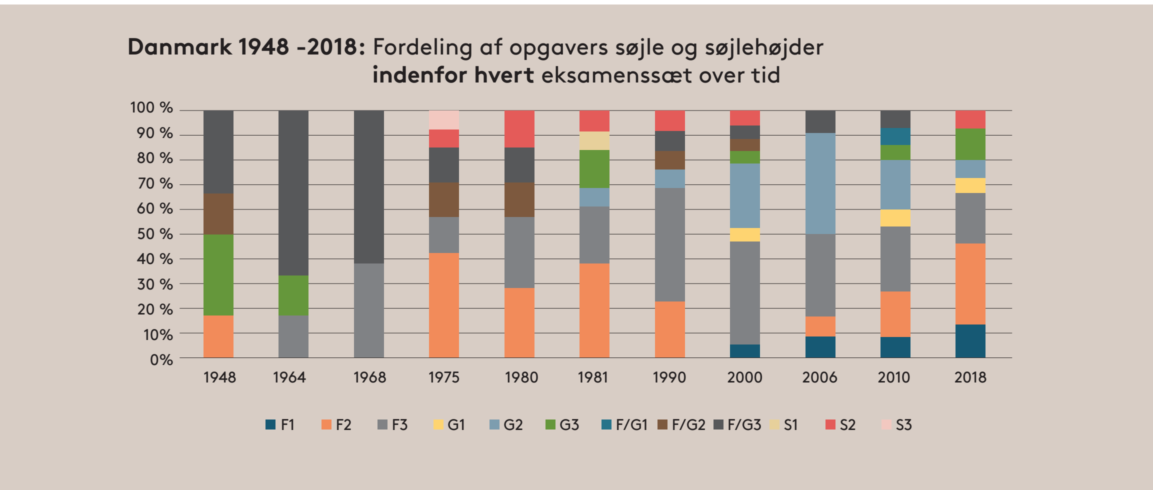
De analyser, der er gennemført ovenfor, suppleres nedenfor med tre karakteristikker af:

- *udviklingen i hver søjlehøjde på tværs af eksamenssæt* over årene, fx udviklingen i F3-opgaver (figur 26).
- *udviklingen af eksamenssættene* over årene, det vil sige udviklingen fra 1948 til 2018 i de samlede eksamenssæt (figur 27).
- *udviklingen i søjlerne*, fx funktionssøjlen over årene.

Til denne del af analysen har vi valgt at fremstille analyserne af eksamenssættene opgjort i frekvenser, da antallet af opgaver over årene er meget varierende, og det ellers er svært at sammenligne.

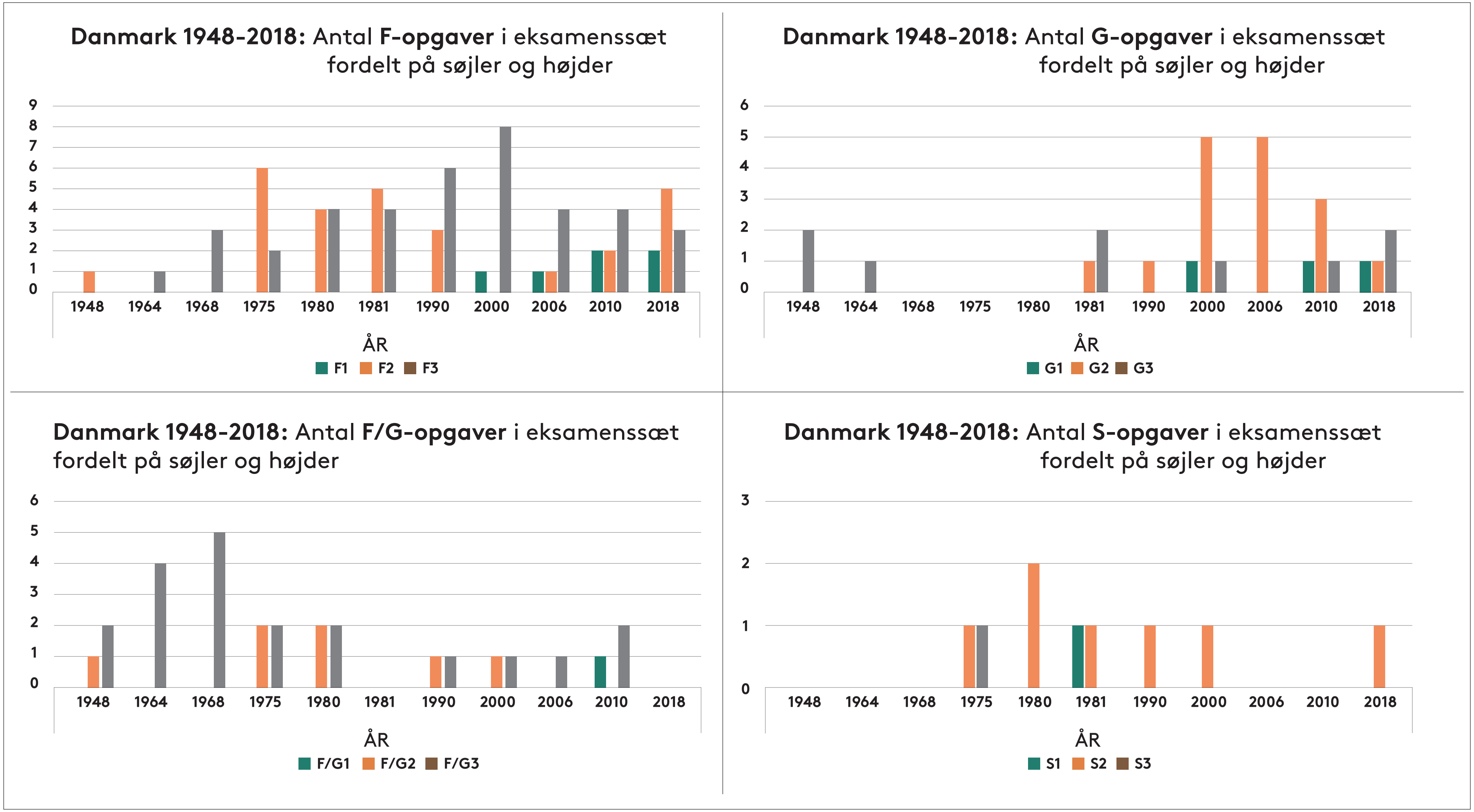


Figur 27. Danmark 1948-2018: Fordeling af opgavers søjler og søjlehøjder på *tværs* af eksamenssæt over tid. Figur 27 skal læses på den måde, at fx opgaver i den statistiske søjle med en højde på 3 (S3), kun er stillet ét år, i 1975, mens opgaver fx i funktionssøjlen med en højde på 3 (F3) er stillet de fleste år (ikke 1948).



Figur 28. Danmark 1948-2018: Fordeling af opgavers søjler og søjlehøjder *indenfor hvert* eksamenssæt over tid. Figur 28 skal læses på den måde, at eksamenssættet i fx 1948 indeholdt en andel af F2 opgaver, G3, F/G2 og F/G3. Til sammenligning indeholdt eksamenssættet i 2018 F1-, F2-, F3-, G1-, G2-, G3- og S2-opgaver.

Danmark 1948-2018: Antal opgaver i de enkelte søjler over årene, **katakteristik af søjler**



Figur 29. Danmark 1948-2018: Antal opgaver i de enkelte søjler over årene, karakteristik af søjler.

9.3. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner på analysen af materiale fra forskellige perioder

Man kan opsummerende sige, at "huset" er nogenlunde uforandret frem til gymnasiereformen af 2005, men indretningen forandres fra 1975, idet de store og rummelige værelser afløses af flere mindre og mere snævre værelser. De lange, og i visse tilfælde ret vidtrækkende opgaver, blev afløst af flere, men væsentlig kortere opgaver. Det kan også aflæses i karakteristikken af hver søjle, hvor den geometriske søjle i en årrække findes i opgaver (1968 til og med 1980), der er en hybrid af funktions- og geometrisøjlen. Disse hybride opgaver er bredere og mindre stilladseret end de senere opgaver fra år 2000 og frem (efter grengymnasiet). Samtidig er opgaverne i de undersøgte eksamenssæt relativt lange før 1975, idet de inddrager flere forskellige elementer fra pensum i enkeltopgaver. Fra sættene i 1975 er der flere, men mindre omfattende opgaver, og abstrakt algebra inddrages nogle enkelte gange. Den abstrakte algebra forsvinder dog i 1990 med grengymnasiets ophør. Indenfor matematikbygningen, som vi har kaldt matematikhuset, er der frem til og med sættene fra 1968 kun opgaver, som er geometri- og/eller funktionsopgaver, mens den tredje søjle, sandsynlighedsregning og statistik, ikke er berørt i nogen af de undersøgte opgavetekster fra den periode.

Den supplerende analyse med historisk perspektiv understreger dermed GVH-analysen af eksamenssættene. V-opgaver med søjlehøjde 2 og 3 er de mest hyppige over årene (her undtages statistiksøjlen), jf. konklusionen om, at det faglige niveau er stabilt over tid. Især eksamenssættene fra 2010 og 2018 indeholder stilladserede opgaver af forskellig højde og fra forskellige faglige søjler, hvilket er udtryk for en stigende kompleksitet i den måde, der spørges på til eksamen i matematik i stx på højeste faglige niveau, såvel som den beskrevne kompleksitet med at vælge redskab er tilkommet. Kompleksiteten med at skulle udføre alle beregninger i hånden er til gengæld faldet i takt med, at de digitale matematikfaglige værktøjer som fx CAS-værktøjerne er taget i brug.

10. Analyser af materiale fra Danmark, Norge og Sverige

10.1. Metoder og materialer

Den følgende analyse supplerer den analyse af matematikfaget med udblik til Norge og Sverige, der indgår i den samlede tværgående rapport. I nærværende analyse anvendes GVH-delen af vores analyseramme, da vi ikke har haft adgang til elevbesvarelser fra de to øvrige skandinaviske lande. Der ses på de samlede eksamenssæt samt fordelingen af GVH-opgaver hhv. med og uden hjælpemidler. Den svenske nationale prøve er opdelt i tre skriftlige dele, hvor den første del (B) er helt uden hjælpemidler, den anden del er med lommeregner (C), og den sidste del er med CAS-værktøjer (D). A er en mundtlig del, som ikke indgår. Kun del D henregnes til kategorien 'med hjælpemidler' af hensyn til sammenligneligheden med den danske eksamen og anvendelsen af CAS.

Materialerne er beskrevet i databladet (afsnit 13) i denne rapport, og indsamlingen af materialer fra Norge og Sverige er beskrevet i den tværgående rapport.

Der er så vidt muligt analyseret eksamenssæt og prøvesæt (Sverige) fra de samme læreplansperioder, så de samfundsmæssige omgivende forhold såsom teknologisk udvikling, udvikling i uddannelsesvidenskab, didaktik med videre er ensartede. Når det er sagt, må det samtidig fremhæves, at der fortsat er betydelige forskelle mellem eksamen i matematik i de tre nordiske lande.

10.2. Resultater (deskriptive analyser)

GVH-analysen af materiale fra Danmark, Norge og Sverige falder i tre dele, der er systematiseret efter perioder med skift i læreplanerne.

1. Sammenligning af *samlede eksamens- og prøvesæt* fra Norge 1997/99, Sverige 1998 og Danmark 2000 samt Norge 2002/03, Sverige 2012/13 og Danmark 2006/2010.
2. Sammenligning af nyeste *samlede eksamenssæt:* 2018 fra Norge og Danmark; der er intet prøvesæt fra Sverige fra 2018.
3. Sammenligning af prøverne med og uden hjælpemidler, alle tre lande.

10.2.1. Sammenligning af eksamens- og prøvesæt fra forskellige perioder

10.2.1.1. Årene 1997/99 i Norge (læreplan 1994), 1998 i Sverige og 2000 i Danmark

Alle opgaver i de samlede eksamenssæt: Det norske eksamenssæt fra denne periode er tydeligt præget af en matematikfaglighed, hvor der er fokus på problemløsning og matematisering af omverdensproblemer, hvilket hænger sammen med en opfattelse af "nyttiggørelse" af matematikfagligheden. I Sverige ser der ud til at være en betydelig stilladsering af opgaverne i deres nationale prøve med den største andel af G-opgaver i de tre lande på dette tidspunkt. Det danske eksamenssæt fra 2000 indeholder flest V-opgaver sammenlignet med de øvrige lande, som betoner en fokusering ned i de enkelte matematikfaglige søjler i den danske kontekst. Der er flere opgaver i de danske eksamenssæt end tidligere, hvilket indvarsler stilladseringen af opgavesættene til matematikeksamen.

10.2.1.2. Årene 2002/3 Norge (efter revision af læreplan fra 1994), 2012/13 Sverige og 2006/10 Danmark

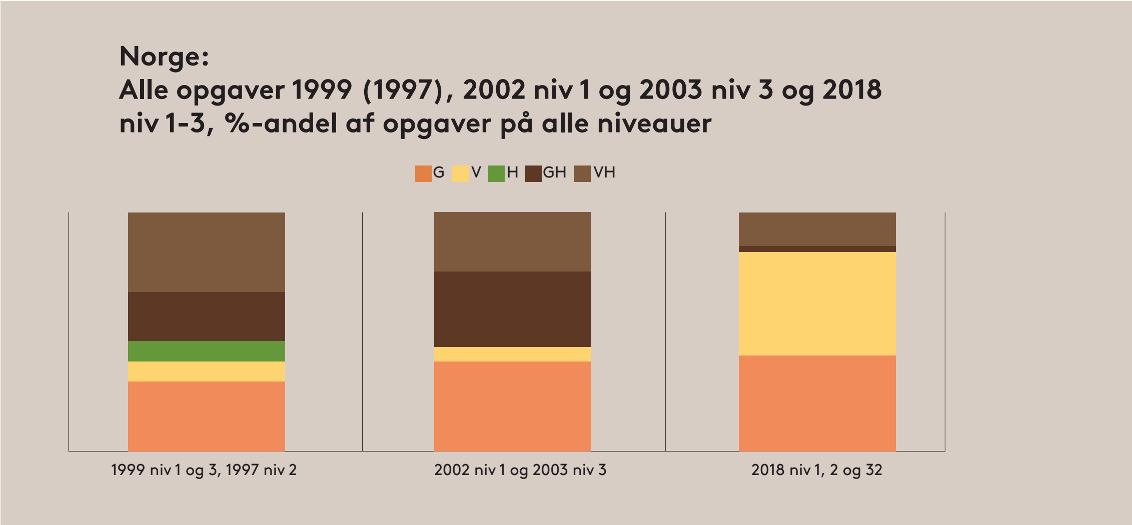
Alle opgaver i de samlede eksamenssæt: I den næste historiske periode er der ikke markant udvikling i de danske eksamenssæt, hvad angår fordelingen af GVH. V-dominerer med en begyndende tendens til inddragelse af horisontale kompetencer. Den svenske nationale prøve ligner ligeledes prøven fra den tidligere periode, hvad angår GVH-fordelingen. Der er heller ikke en markant udvikling fra den tidligere læreplansperiode i Norge, måske er der en tendens til fokusering på det grundlæggende arsenal, idet både G og GH fylder mere i dette eksamenssæt. Ser man direkte på figuren (figur 30), ligner det en forenkling af variationen i eksamenssættet, hvad angår GVH.

10.2.2. Sammenligning af eksamenssæt fra nyere læreplansperioder i Norge, Sverige og Danmark

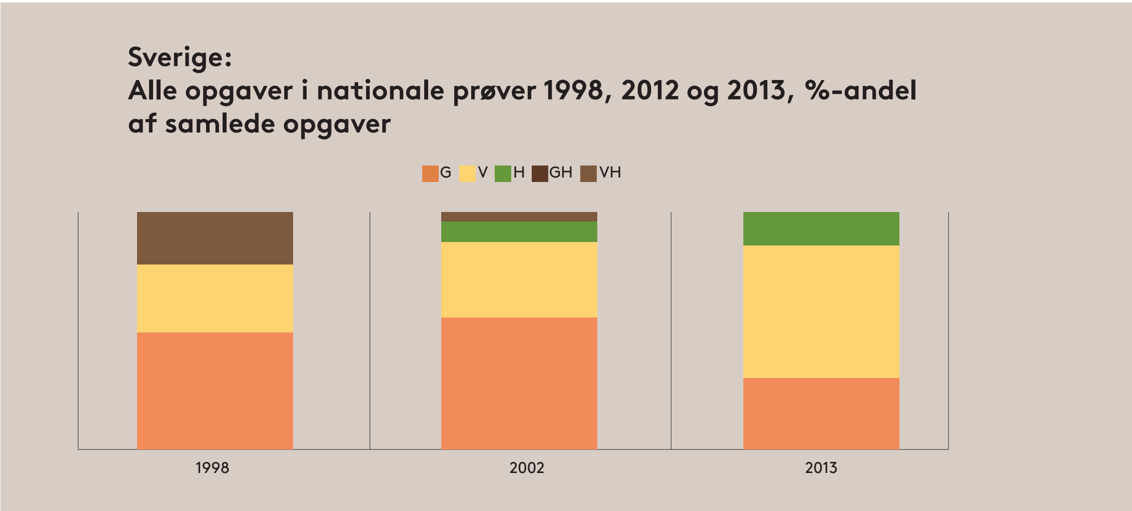
Alle opgaver i de samlede eksamenssæt: Det norske eksamenssæt fra 2018 (læreplan fra 2006) indeholder en markant forøgelse af V-opgaver, mens niveauet af G er stabilt (bemærk, at det er alle 3 norske eksamenssæt, der er samlet i én GVH-søjle). De norske elever går op til eksamen både efter 1., 2. og 3. klasse, modsat Danmark, hvor de afslutter med én samlet eksamen for alle tre år. Den horisontale kompetence er væsentligt nedtonet i dette norske eksamenssæt (lidt overraskende set i forhold til det ovenfor omtalte nytteaspekt, der var fremtrædende i de norske eksamenssæt før 2006-læreplanen). Det er den modsatte udviklingstendens, der spores i det danske eksamenssæt fra 2018, hvor en del af V-kompetencen er kædet sammen med H-kompetencen i matematisering af omverdensproblemer og tværgående opgaver for de matematiske fagsøjler. Samtidig er andelen af G-opgaver faldet en smule i det danske opgavesæt sammenlignet med 2010.

Det tyder med andre ord på, at det danske eksamenssæt begynder at tilnærme sig en afprøvning af en dynamisk læreproces hos eleverne, hvor G, V og H antages at spille tæt sammen i modelleringen af og opstillingen af procedurer til opgaveløsningen.

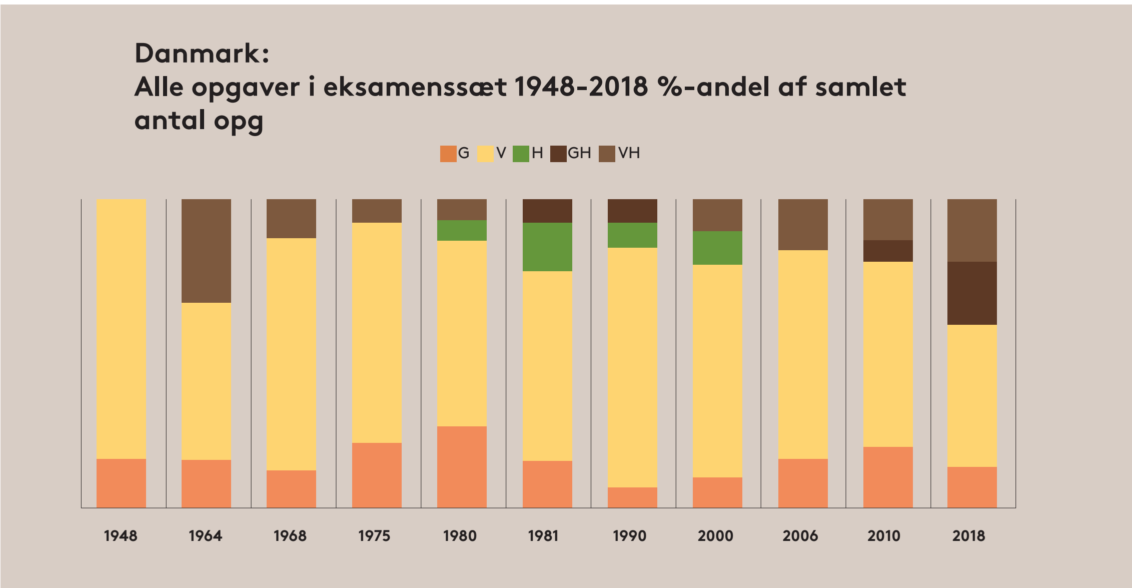
Der indgår eksamenssæt fra to forskellige år i søjlen til venstre, nemlig 1997 og 1999, hvilket var de eksamenssæt, det lykkedes at få fat på. De to år er sammenlignelige, da det var den samme læreplan, der var gældende, og for at få alle 3 niveauer repræsenteret er denne løsning valgt.



Figur 30. Norge: Fordeling af GVH, alle opgaver 1999-2018 niveau 1-3.



Figur 31. Sverige: Fordeling af GVH, alle opgaver 1998-2013.

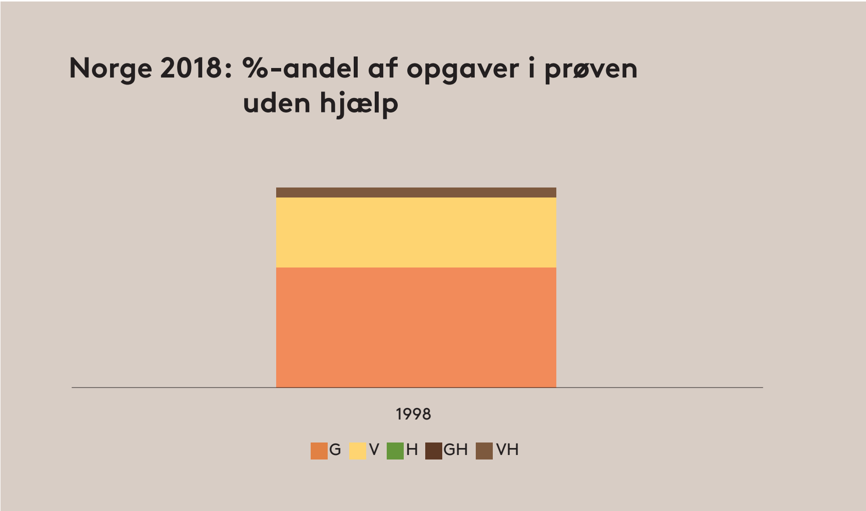


Figur 32. Danmark. Fordeling af GVH, alle opgaver 1948-2018.

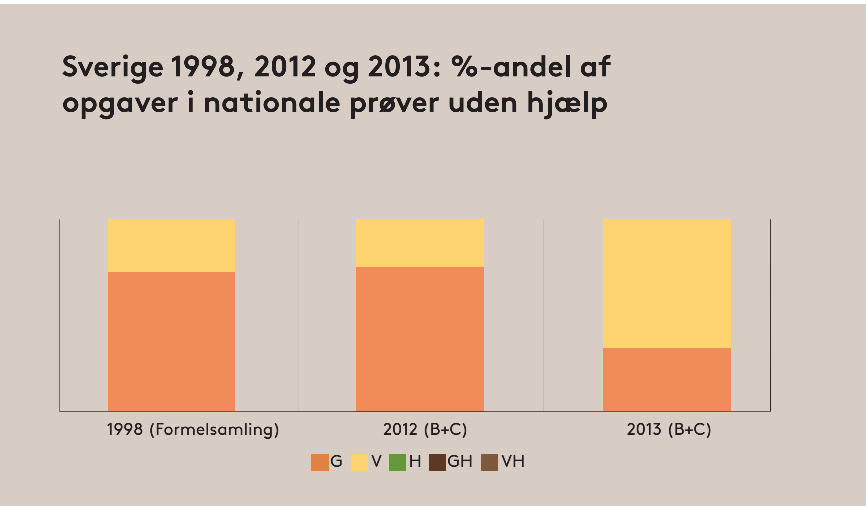
10.2.3. Sammenligning af prøverne med og uden hjælpemidler, alle tre nordiske lande

10.2.3.1. UDEN hjælpemidler

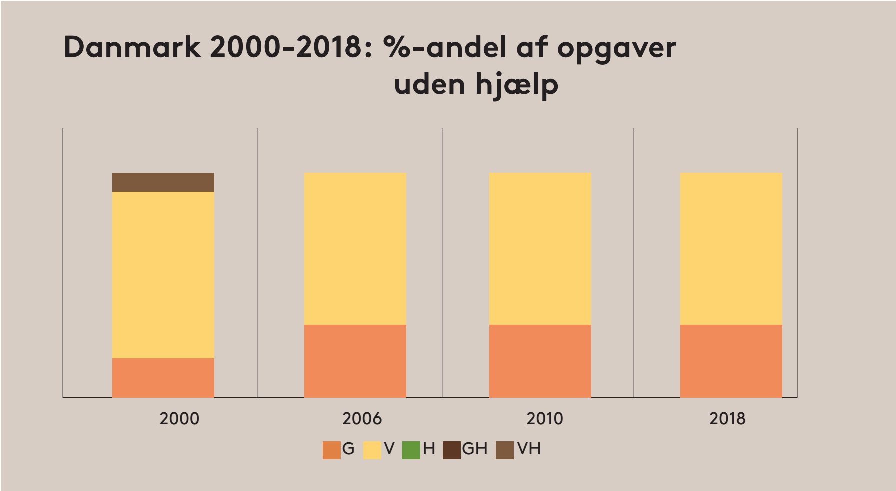
Det følgende afsnit sammenligner prøverne uden hjælpemidler. De tidligere eksamenssæt havde grafisk lommeregner som tilgængeligt hjælpemiddel under hele eksamen. Der er i denne analyse kun et sådan opdelt eksamenssæt fra Norge i 2018, mens Sverige har et opdelt fra 1998 og Danmark et fra 2000. Som nævnt er den svenske delprøve, hvor eleverne anvender lommeregner, taget med i prøvedelen uden hjælpemidler for efterfølgende bedre at kunne sammenligne det højeste matematikfaglige niveau med hjælpemidler i Sverige med den danske prøve med hjælpemidler også på det højeste matematikfaglige niveau. Sverige har betydeligt flere G-opgaver end Danmark i denne prøve, og i Danmark er der tilsvarende flere V-opgaver indtil 2018, hvor den svenske nationale prøve bliver identisk med fordelingen mellem G og V i den danske prøve uden hjælpemidler. Der er kun prøve uden hjælpemidler fra Norge i 2018, og fordelingen her er med større fokus på G end V sammenlignet med Danmark og den svenske nationale prøve.



Figur 33. Norge: Fordeling af GVH. Prøven uden hjælpemidler 2018.



Figur 34. Sverige: Fordeling af GVH. Nationale prøver uden hjælpemidler 1998, 2012 og 2013.



Figur 35. Danmark: Fordeling af GVH. Prøver uden hjælpemidler 2000-2018.

10.2.3.2. MED hjælpemidler

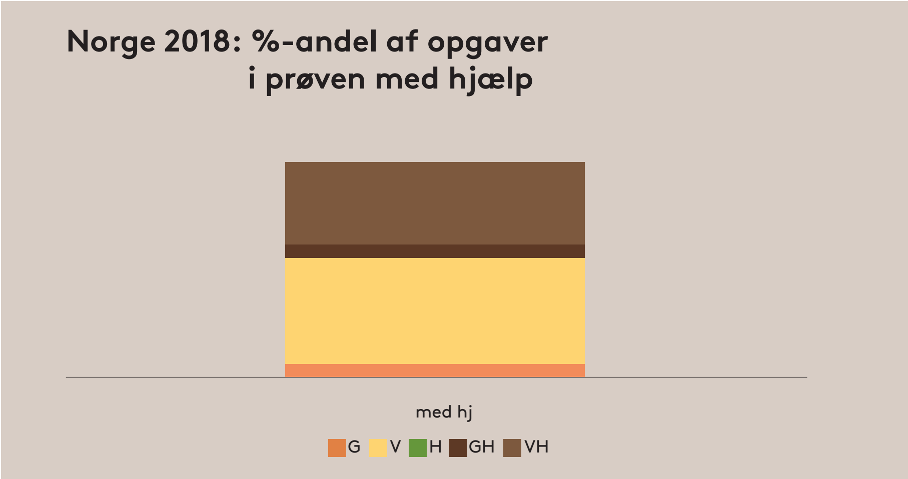
Hvis der ses på prøvedelen *med hjælpemidler* (se figurer, s. 88), hvor det især er CAS, der er fokus på som hjælpemiddel i vores analyse, så ses der i 2018 en fordeling af V- og VH-opgaver i Norge og Danmark, hvor Norge har lidt mere V, og begge lande har lige stor del VH. I det danske eksamenssæt er der en markant stigning i GH-opgaverne. Forskellen er, at Norge har flere rene V-opgaver opad i de faglige søjler, og Danmark har mere fokus på tjek af det grundlæggende arsenal af viden og færdigheder på tværs af de faglige søjler. Hvis der skal sammenlignes med Sverige, så må deres prøvesæt fra 2013 inddrages. I det svenske opgavesæt er der i 2013 kun rene G-, V- og H-opgaver med en markant andel af H-opgaver. Det ligner en udvikling over tid i Sverige, hvor der bliver færre V-opgaver (kan både være rene V-opgaver og VH-opgaver) og kommer flere H-opgaver.

10.3. Ekspertgruppens kommentarer og konklusioner på den sammenlignende analyse af materiale fra Danmark, Norge og Sverige

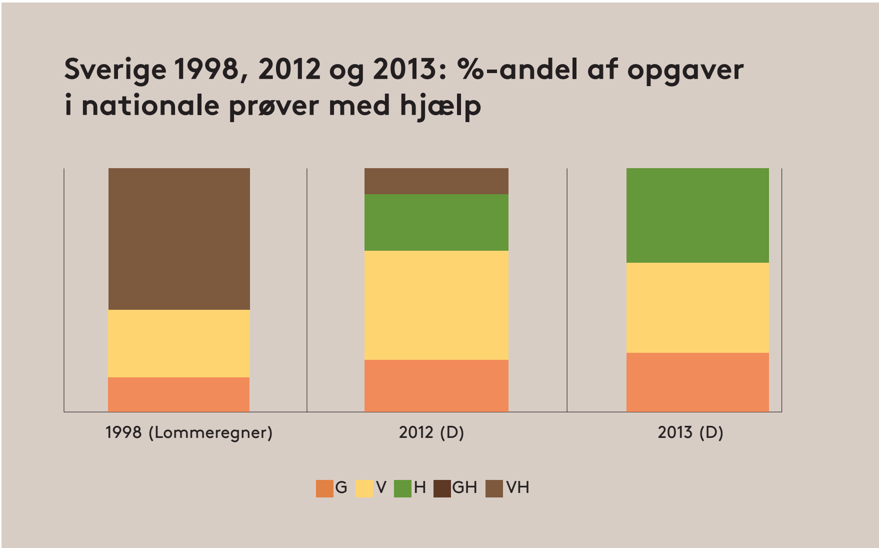
Det er som om, der er en ”omvendt” faglig udvikling i de nordiske lande, når de sammenlignes med GVH-analyserammen, hvilket er interessant.

I Norge og Danmark, som umiddelbart er de mest sammenlignelige lande, ser udviklingen i Norge ud til at gå fra matematisering af omverdensproblemer som det dominerende matematikfaglige greb til en mere vertikal fokusering opad i de enkelte matematikfaglige søjler. En forklaring på dette kan også være, at det faglige indhold har ændret sig mellem de læreplaner, vi har set på. I planen fra 1994, og dens senere revision, var statistik og sandsynlighedsregning et stort tema. Dette vil naturligt føre til opgaver med omverdenskarakter. Men i planen fra 2006 blev statistiske metoder (hypotesetesting) taget ud, hvilket naturligt kan give en forskydning i vægtningen mellem H og V. Udviklingen i Danmark er modsat, hvor den vertikale fokusering opad i de enkelte faglige søjler i år 2018 udvider sig til at inkludere flere horisontale kompetencer i både GH- og VH-opgaver. Denne observation gælder for opgaver *med hjælpemidler.*

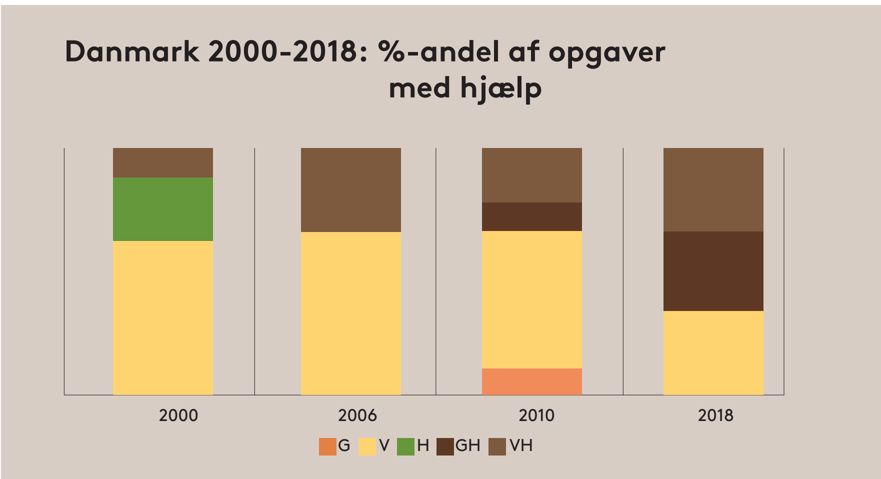
Når der ses på opgaver *uden hjælpemidler*, ser det mere ens ud, dog med den forskel, at der i Danmark er flest V-opgaver, hvor der i Norge er flest G-opgaver. Dette hænger formentlig sammen med, at



Figur 36. Norge: Fordeling af GVH. Prøven med hjælpemidler 2018.



Figur 37. Sverige: Fordeling af GVH. Nationale prøver med hjælpemidler 1998, 2012 og 2013.



Figur 38. Danmark: Fordeling GVH. Opgaver med hjælpemidler 2000-2018.

matematisk studentereksamen i Norge er opdelt i 3 eksamener, én eksamen for hvert år i gymnasiet. Da den norske figur for GVH-opgaver 2018 er lavet på grundlag af tre eksamenssæt, et for hvert gymnasietrin, og den danske er lavet på grundlag af ét eksamenssæt, der dækker alle tre år, vil der nødvendigvis komme til at indgå flere "deltjek" i den norske end i den danske, hvilket medfører flere G-opgaver.

Den svenske nationale prøve i matematik ligner i 2018 den danske matematikeksamen i stx for prøven *uden hjælpemidler.*

Tilsammen indikerer dette, at Danmark, Norge og Sverige har en ensartet holdning til, hvad den matematikfaglige prøve uden hjælpemidler skal indeholde for at kunne afspejle elevens dynamiske læringsproces i matematik.

11. Konklusioner på undersøgelsesspørgsmålene

Der er i undersøgelsen gennemført følgende:

A. Analyser og sammenligninger af danske eksamenssæt og eksamensbesvarelser i Matematik A på stx i Danmark og tilsvarende i Norge og Sverige fra sommereksamen 2018 og fra udvalgte år i et historisk perspektiv.

B. Analyser af undervisningsbeskrivelser fra undervisningen i Matematik A i perioden 2009-2018.

C. Spørgeskemaundersøgelser med lærere og undervisere i grundskolen, på de gymnasiale uddannelser og på videregående uddannelser.

Undersøgelsen giver herigennem svar på følgende spørgsmål:

1. Hvad karakteriserer udviklingen i gymnasieelevernes viden, færdigheder og kompetencer, herunder i balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer i matematik?
2. Hvad karakteriserer udviklingen i undervisningens indhold/emner i matematik mht. viden, færdigheder og kompetencer, herunder i balancen mellem viden, færdigheder og kompetencer i undervisningens indhold?
3. Hvad karakteriserer det aktuelle niveau i danske gymnasieelevers grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer indenfor matematik?

Undersøgelsen angår det højest mulige faglige matematikniveau i stx forstået som det 3-årige A-niveau, hvilket betyder, at opgraderingshold til Matematik A *ikke* indgår, ligesom eksamensforsøg med net-eksamen heller ikke indgår.

I besvarelsen af spørgsmålene perspektiveres analyserne af udviklingen i matematikfagligheden til forandringer i læreplanerne for Matematik A samt til politiske forandringer og reformer samt forandringer i demografi og teknologi i den undersøgte periode. I tilfældet med matematikfaglighed er brugen af matematikfaglige it-værktøjer som fx computer-algebra-systemer en interessant gråzone mellem indhold og fagets didaktik, som er medtaget i undersøgelsen.

Undersøgelsen bidrager med en systematisk viden og et begrebsapparat, der kan udgøre grundlaget for diskussioner af det aktuelle faglige niveau i gymnasiet. Herudover repræsenterer analyserne et relevant perspektiv på faglighed, som kan understøtte refleksioner af matematikfaget og matematikfaglighed i forbindelse med fx pædagogikum. Ikke mindst tilbyder undersøgelsen et metodisk og analytisk grundlag for at undersøge matematikfaglighed i de gymnasiale uddannelser fremadrettet.

Overordnet konkluderer vi, at der er to-tre centrale forandringer i matematikfagligheden i den undersøgte periode:

1. En stigende stilladsering af opgaverne i matematik, hvilket har gjort det lettere at bestå faget, men ikke lettere at opnå en topkarakter.
2. En stigende instrumentalisering (brug af matematiske it-værktøjer).

Den sidste forandring inducerer en tredje potentiel forandring, som vi ikke kan konstatere med sikkerhed, men som må ses som en vigtig udviklingsmulighed, i konsekvens af den øgede instrumentalisering.

3. En stigende instrumentering (elevernes tilegnelse af it-værktøjer med matematiklæring for øje).

11.1. Udviklingen i gymnasieelevernes viden, færdigheder og kompetencer

I det følgende afsnit henviser 'kategori' til kategorierne fra den samlede analysemodel, det vil sige elevernes viden, færdigheder og kompetencer i forbindelse med følgende områder: 1) vidensformer, begreber og indhold, 2) metode, 3) tværfaglighed, 4) innovation, 5) personlige aspekter og 6) sociale aspekter.

Ekspertgruppens analyser af eksamenssæt viser, at der i alle undersøgte år er en betydelig mængde af V-opgaver, der kræver grundviden og grundlæggende færdigheder. Andelen af V-opgaver er stabil over tid, men optræder i mindre grad som rene V-opgaver i nyere eksamenssæt. Andelen af rene V-opgaver fluktuerer i takt med læreplanernes og eksamensopgavernes prioritering af elevernes kompetencer til 1) matematisering og modellering af omverdensproblemer og andre fags problemstillinger kombineret med matematisk viden og færdigheder (GH- og VH-opgaver) overfor 2) matematisering indenfor matematikken selv (rene V-opgaver, men også VH-opgaver). Især i 2018 (dvs. efter reformen i 2005) indgår de som nævnt i stigende grad som en integreret del af opgaver om modellering af matematiske problemer og omverdensproblemer, hvorved opgaver af VH-typen bliver hyppigere i eksamenssættene, men således at de stadig vil kunne opfattes som V-opgaver. Dette udviklingsbillede viser, hvordan kompleksiteten i kravene til den matematikfaglige modelleringskompetence øges over en årrække. Konklusionen på analysen er, at eksamenssættene efterspørger samme grundlæggende viden og færdigheder indenfor fagets begreber og tematiske indhold samt metode. Til gengæld fluktuerer efterspørgslen efter de såkaldte horisontale kompetencer i perioden, hvilket udtrykt med den generelle analysemodels termer vil sige, at eksamenssættene i varierende grad gennem perioden stiller krav om, at eleverne skal kunne arbejde tværfagligt (kategori 3), hvilket både er på tværs af fag og på tværs af matematikfaglige områder. Der ses fra år 2000 en stigning i antallet af opgavetyper, der på den ene eller den anden måde stiller krav til eleven om at måtte forholde sig til omverdensproblemer, herunder også ved at kunne bringe matematikken ind i tværfaglige typer af problemstillinger (kategori 3) samt sociale, dvs. samfundsmæssige, problemstillinger (kategori 6). Det tværfaglige samarbejde fordrer en evne til at kunne modellere omverdensproblemer matematisk, hvorigennem også den generelle analysemodels kategori om sociale aspekter af faget kommer til udtryk i kravene om, at eleverne kan modellere omverdensproblemer. Grundlæggende udtrykker eksamenssættenes spørgsmål på tværs af perioden med variationer mellem årene forventninger til, at eleverne kan tænke kreativt, problemløsende og på tværs af enten matematikinterne domæner eller, som det viser sig fra 2000 og frem, i højere grad på tværs af faggrænser og i forhold til omverdensproblemer. Fx forventes eleverne i 1964 og 2018 i høj grad at kunne arbejde innovativt problemløsende (kategori 4), hvorimod eksamenssættene fra 1975, 1990 og 2010 i mindre grad efterspurgte denne type af kompetence. Med hensyn til matematikkens tematiske indhold sker der en forskydning i perioden fra, at matematikken primært omhandler geometri og funktioner, til at den fra 1968 og frem i højere grad også omfatter statistik og sandsynlighedsregning. Den abstrakte algebra forsvinder fra og med 1990 (hvilket er udtryk for, at den indgår som en integreret del af problemløsningsopgaver i regi af de øvrige dele af matematik-domænet). Hvad angår sværhedsgraden/kompleksiteten af opgaverne, vurderer ekspertgruppen, at der er en tendens til flest opgaver med sværhedsgrad 3, næstflest med sværhedsgrad 2 og få eller ingen med sværhedsgrad 1. Den samlede sværhedsgrad i eksamenssættene vurderes at være konstant i den undersøgte periode, idet det er måden at spørge på, der udvikler sig.

I matematik er der analyseret elevbesvarelser fra seks udvalgte år (1981, 1990, 2000, 2006, 2010 samt 2018). Der er analyseret 5 besvarelser fra hvert af de første fem år, mens der for 2018 er analyseret 20 elevbesvarelser. Helt grundlæggende viser analysen af elevbesvarelser, at der er den samme fordeling af fragmenterede, rutiniserede og integrerede elevbesvarelser over årene. Der er således ikke en faglig skævhed at spore over tid, men *et stabilt mønster* i elevernes matematikfaglighed: Flest svarer på rutiniseret vis, færre svarer fragmenteret eller integreret. Vurderingen af niveauet for en besvarelse er baseret på elevens evne til at argumentere for sine løsninger, elevens valg i det matematikfaglige sprog og elevens evne til at gennemføre beregninger og modelleringer.

Når det kommer til uddannelsesniveauernes oplevelse af udviklingen af elevernes og de studerendes matematikfaglighed, er gymnasielærerne og universitetsunderviserne stort set enige i udviklingen over tid mht. matematikfagligheden hos de elever og studerende, de modtager. Elever og studerende er blevet bedre til at modellere problemer med brug af matematikfaglige værktøjer og til at arbejde eksperimenterende og undersøgende. Dette bakkes op af et stabilt niveau vedr. at kunne forholde sig til modellers rigtighed og beregninger i gymnasiet og på universitetsniveauet at kunne arbejde selvstændigt og selvstændigt forholde sig til matematikken. Det opleves samtidig som en beherskelse af bredden i matematikken, der over tid vurderes at blive mere udtalt. Dette står overfor en oplevelse af ringere grundlæggende færdigheder, dybdeforståelse af matematikken og evne til abstrakt tænkning. Hvad angår oplevelsen af udviklingen i elevernes matematikfaglighed ved afslutningen af gymnasiet, vurderer matematiklærerne i gymnasiet, at det niveau, deres elever går ud af gymnasiet med, nogenlunde er det samme over tid. Matematikfagligheden er på samme niveau i alle årene, som den enkelte lærer har erfaring med, men forskudt over mod problemmodellering, arbejde med værktøjer og eksperimenterende arbejde, og med hensyn til matematikfaglige it-værktøjer er der ligefrem tale om et fagligt løft i løbet af gymnasiet.

11.2. Udviklingen i undervisningen mht. viden, færdigheder og kompetencer

Analysen af undervisningsbeskrivelserne indikerer, at alle de undersøgte 3-årige A-niveauhold er undervist i læreplanens kernestof, dvs. matematikhuset er konstant i den undersøgte årrække. Samtidig viser den, at konnektiviteten i fagligheden, forstået som sammenhængen i og imellem de matematikfaglige søjler (funktioner, geometri og statistik), er til stede. Den typiske gennemgang af kernestoffet (funktioner, geometri og statistik) er:

1. g: Grundlæggende begreber, Trigonometri, Lineære funktioner, Eksponentielle funktioner, Potensfunktioner, Vækstmodeller, Polynomier,

2. g: Differentialregning, Integralregning, Statistik & sandsynlighedsregning,

3. g: Differentialligninger, Vektorer i 2 og 3 dimensioner, Trigonometriske funktioner (samt Valgfrit emne).

Analysen er herudover fokuseret på det *supplerende stof*, som er det felt, der kan indikere udviklingen i fagligheden for matematik udover den stabile kernefaglighed. Denne del af analysen viser, at man i vid udstrækning forsøger at arbejde tværfagligt, dvs. horisontalt fra og med matematikken ud mod andre fag. Følgende er eksempler på sådanne "horisontale" emner fra undervisningsbeskrivelserne:

Bio: Fysiologiske tests og målinger, Kolesterolniveau beskrevet med differentialligninger, Rovdyr-Byttedyr m, Højde- og Længdespring (dataopsamling), Bakterievækst, Epidemier, Dykning, Hardy-Weinberg, Triangeltest, Genetiske fodspor, Betinget sandsynligheder, Gærvækst.

Fysik: Keplers love, Tivoli-mat/fys, Hoppebold, Svingende pendul, Radioaktivt henfald, Newtons afkølingslov, Manhattenprojekt, Toricellis lov, Kinematik, Isolering og Varmetab.

Kemi: Enzymkinetik.

Der er markant flest H-emner med relation til de naturvidenskabelige fag (fys, bio, ke) men også eksempler på samarbejder med historie og samfundsfag. Matematik har også indgået i en del AT-forløb, både med udvidet kernestof og helt nye emner. Samlet set er vurderingen på baggrund af undervisningsbeskrivelserne, at matematikindholdet i gymnasiet både er udtryk for arbejde med perspektivering til de videregående uddannelser (hvilket også bekræftes af spørgeskemaanalyserne) og gennemgang af kernestoffet, så elever med forskellige faglige niveauer forberedes til eksamen.

11.3. Det aktuelle niveau i danske gymnasieelevers grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer

Alle de i undersøgelsen gennemførte analyser peger i retning af, at matematikfagligheden er stabil, både hvad angår det faglige indhold i matematikhuset og progressionen op igennem de faglige søjlehøjder. Men der er sket en forskydning fra det vi populært kan kalde papir og blyant-matematik og abstrakt matematik over imod problemløsende og undersøgende matematik med brug af digitale matematikværktøjer. Den problemløsende og undersøgende matematik integrerer den abstrakte matematik i modelleringsopgaver, som derved bliver mindre synlig – eller i hvert fald synlig på nye måder. De digitale matematikværktøjer afløser i nogen grad gammelkendte algoritmer, som derfor i et vist omfang falder ud af matematikundervisningen. Analyserne viser, at der arbejdes didaktisk med disse forskydninger i den gymnasiale matematikundervisning, og ekspertudvalget peger på, at det er et vigtigt opmærksomhedsfelt for den gymnasiale matematikundervisning fremover.

Analysen af elevbesvarelser viser en stabilitet i kvaliteten af besvarelserne over årene og fastholder synligheden i den matematikfaglige udvikling som en faglig udvikling, der aktuelt synes at kombinere bredde og dybde i matematikfagligheden gennem V-, GH-, VH-opgaver.

Grundskolelærerne vurderer, at 40-80 % af deres elever lever op til de fleste af de udsagn om viden, færdigheder og kompetencer, der er opstillet i spørgeskemaet. Dog vurderer et flertal af lærerne, at over 80 % af deres elever har *kendskab til matematikfagets begreber*, og at de *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*. Omvendt er det også en meget udbredt vurdering, at elever *ikke fordyber sig i det matematikfaglige udover de skemalagte opgaver*.

Når det kommer til gymnasielærernes vurdering af de elever, som de modtager fra grundskolen, er der stor spredning. Tendensen er, at der er størst enighed om, at eleverne på nogle af de mere komplekse parametre, ikke har et særlig godt niveau. Meget få mener således, at eleverne *har viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles* (10 %), *har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* (7 %), *har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik* (6 %) og *har erfaring med at vurdere den matematiske realiserbarhed af ideer, påstande og/eller produkter* (9%). Der er størst enighed om, at *eleverne har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber* (67 %) og *har trænet evnen til at samarbejde om løsning af matematiske opgaver* (64 %), altså mere grundlæggende viden, færdigheder og kompetencer, hvilket stemmer godt overens med folkeskolelærernes vurdering. Det bør også bemærkes, at 48 % af gymnasielærerne mener, at *eleverne har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter i gymnasiets 3-årige A-niveau, hvilket også hænger godt sammen med folkeskolelærernes bedømmelse af deres elever på det punkt. Det hører også med til billedet, at over 80 % af gymnasielærerne svarer, at de er enige (helt eller overvejende) i, at elevernes matematikkundskaber svarer til deres forventninger.

Gymnasielærernes svar vedrørende de færdiguddannende stx-studenter viser, at en høj andel af gymnasielærerne vurderer, at 80-100 % af deres elever *har kendskab til matematikfagets begreber* (63 %). Der er en næsten lige så stor andel, der mener, at eleverne *kan arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)* (61 %). På de fleste udsagn om viden og færdigheder er den hyppigste vurdering fra gymnasielærerne, at 60-79 % af deres elever ved afslutningen af gymnasiet behersker disse. Lærerne vurderer, at andelen af elever, der lever op til udsagnene om kompetencer som *eleverne kan selvstændigt anvende faget til at formulere relevante matematikfaglige spørgsmål, eleverne kan selvstændigt anvende fagets teorier, metoder og begreber og/eller værktøjer til analyse af komplekse matematiske problemstillinger* samt *eleverne kan selvstændigt opstille matematiske modeller til undersøgelse af matematikfaglige problemer*, er mindre. Det typiske svar er, at det lever 20-59 % af eleverne op til.

Også hos universitetsunderviserne er der ret forskellige vurderinger af, om deres BA-studerendes matematikfaglige indgangsniveau kan siges at være på ønsket niveau, hvilket også må ses i lyset af, at de videregående uddannelser stiller forskellige matematikfaglige krav. Langt de fleste (72 %) er dog enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har erfaring med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer i forbindelse med modellering (fx CAS-værktøjer)*, når de starter på deres videregående uddannelse. Og også mange (62 %) er enige i eller overvejende enige i, at de BA-studerende *har kendskab til matematikfagets grundlæggende begreber*.

Der kan således spores en vis enighed om disse to elementer hele vejen fra folkeskolen til videregående uddannelse. Meget få matematiklærere på de videregående uddannelser vurderer, at deres studerende kommer med et godt indgangsniveau på en række af de mere komplekse kompetencer, der spørges til: Kun 6 % er således overvejende enige i, at de studerende har et godt niveau, når det *gælder viden om, hvordan matematisk viden skabes og videreudvikles*, kun 9 % er overvejede enige i, at de studerende *har øvet sig i at identificere matematikkens bidrag i ny viden/nye produkter* eller *har arbejdet nyskabende ift. egen viden indenfor matematik*. 24 % er enige/overvejende enige i, at de studerende *har trænet evnen til at bruge det matematiske ordforråd aktivt i faglige samtaler i faget*.

12. Anbefalinger

De følgende anbefalinger trækker på begrebsudviklingen i analysemodellen og de rapporterede analyser. Diskussionen deles op i tre afsnit, der hver især leder frem mod en af de tre anbefalinger.

Vilkårene for undervisningen i matematik til det højeste niveau er blevet forringet over tid fra reformen 1971 og fremefter, jf. tabel 1, som viser et markant fald i timetallet. Det er sværere at sige noget entydigt om omfanget af det skriftlige arbejde.

Den overordnede konklusion for de danske analyser af udviklingen i matematikfagligheden er dog, at fagligheden er stabil, både hvad angår det faglige indhold i matematikhuset og den faglige søjlehøjde. GVH-analysen af eksamenssættene bekræfter den stabile balance mellem viden, færdigheder og kompetencer, som eleverne fortsat skal leve op til i deres besvarelser af eksamenssættene, også over tid. Det er ikke blevet lettere at opnå en topkarakter (dvs. at få ug, 11 og 13, 12), men det er blevet lettere at bestå eksamen (dvs. at få g, 6, 02) – alt afhængig af den gældende karakterskala. Det er det, fordi måden, der spørges på i eksamensopgaverne, har ændret sig til en mere stilladseret form, der understøtter de operationelle procedurer, der skal til for at gennemskue opgaverne og løse dem. F/R/I-U-analysen af elevernes eksamensbesvarelse viser en tilsvarende stabilitet i kvaliteten i elevbesvarelser af eksamensopgaver over årene og fastholder synligheden i den matematikfaglige udvikling som en faglig udvikling, der aktuelt synes at kombinere bredde og dybde i matematikfagligheden gennem V-, GH- og VH-opgaver med en kerne af G-opgaver. Sagt med andre ord: De vertikale og horisontale matematikfaglige kompetencer udfoldes i matematiklæringen på baggrund af elevens arsenal af grundlæggende viden og færdigheder, og elevernes eksamensbesvarelser har den samme kvalitet over tid og gennem den matematikfaglige udvikling, vi kan konstatere i eksamenssæt og undervisningsbeskrivelser.

I spørgeskemaanalysen rapporterer vi, at underviserne både på det gymnasiale og det videregående universitetsniveau *oplever*, at de elever og studerende, der startede i 2018, bl.a. havde væsentligt ringere dybdeforståelse af matematikfaget i forhold til tidligere. Spørgeskemaanalysen viser også, at der kan være udfordringer med elevernes erfaringer med at vurdere rigtigheden af deres egne analyser og beregninger, hvilket især er relevant i forhold til brugen af matematikværktøjerne. Det vil sige, at der kan formuleres en hypotese på baggrund af spørgeskemabesvarelserne om, at elevernes dybdeforståede matematikfaglige viden og færdigheder er svækket, mens deres vertikale og horisontale kompetencer til matematikfaglige undersøgelser og modellering er styrket.

Hypotesen kan ikke af- eller bekræftes med analysen af elevernes eksamensbesvarelser eller analysen af eksamenssættene, der samlet set viser *et stabilt matematikfagligt hus – både hvad angår matematikfaglige søjler og søjlehøjden på de stillede eksamensopgaver og elevernes besvarelser heraf. Det stabile matematikfaglige hus bekræftes tilsvarende i analysen af undervisningsbeskrivelserne.*

12.1. Fælles sprog for matematikfaglig progression og dynamisk matematiklæringsproces i uddannelsessystemet

GVH-analysen af eksamenssættene lægger et nyt perspektiv på viden, færdigheder og kompetencer, der forhåbentligt kan anvendes til at give en dynamisk beskrivelse af, hvordan matematiklæreren gennem undervisningen forventer, at eleven opbygger sit arsenal af grundlæggende viden og færdigheder, og hvordan dette arsenal kan få eleven til at løfte sig både vertikalt og horisontalt i matematikken samtidig med at dybdeforståelsen derved forankres.

Dette er udfoldet i analysemodellen for analysen af matematikfagligheden. Det særlige er, at GVH-analysen flytter fokus fra *balancen* mellem viden, færdigheder og kompetencer til *samspillet* mellem V og H i elevens dynamiske læringshjul og den nødvendige grundviden G, der gør det muligt at arbejde matematikfagligt videre med V og H.

GVH-analysen som et billede på matematiklæringsprocessen kan naturligvis ikke stå alene. Det er nødvendigt at vide, om eleverne kan svare på opgaverne. F/R/I-U-analysen af eksamensbesvarelser af opgaver med hjælpemidler på højest mulige faglige matematikniveau i stx (søjlehøjde 3) viser, at eleverne – over tid – stabilt kan besvare de stillede eksamensopgaver. Dette stemmer overens med analysen af undervisningsbeskrivelserne og gymnasielærernes egen oplevelse af det faglige niveau, der leveres videre til de videregående universitetsundervisere.

Den *oplevede* erfaring med udviklingen i matematikfagligheden på tværs af uddannelsesniveauerne, som dokumenteres i spørgeskemaanalyserne, nuancerer imidlertid dette analyseresultat.

En samlet delkonklusion på overgangen mellem folkeskole og gymnasium er, at der nok er forskelle på folkeskolelærernes og gymnasielærernes vurderinger af elevernes niveau i matematik, men at det kan skyldes, at de mener noget forskelligt med et *godt niveau*, og at gymnasielærerne ikke udtrykker generel utilfredshed med elevernes faglige indgangsniveau til gymnasiet. Der er derfor noget, der tyder på, at der er nogenlunde enighed mellem lærerne i de to skoleformer om, at eleverne har de grundlæggende matematikforudsætninger i orden, men måske også, at gymnasielærerne kunne tænke sig et højere niveau hos de elever, der starter et ubrudt treårigt Mat-A-forløb. I afsnittet om forskelle og ligheder i iagttagelse af matematikfaglighed og dens udvikling gik vi nærmere ind på spørgsmålet om, hvad gymnasielærerene anser for nødvendige forudsætninger for at starte i gymnasiet, og om eleverne er parate, når de starter.

Sammenfattende om overgangen mellem gymnasium og videregående uddannelse kan vi konkludere, at den grundlæggende matematik ser ud til at være på plads, men også at de mere komplekse kompetencer (typisk i forbindelse med matematik som redskabsfag) ikke er det. Om disse kompetencer skal være på plads, når eleverne forlader gymnasiet, eller om det er de videregående uddannelsers opgave at arbejde på at sikre det, kan vi ikke sige noget om på grundlag af denne undersøgelse. Vi kan heller ikke sige noget om, hvorvidt det vil være muligt indenfor gymnasiets rammer at bibringe eleverne disse kompetencer.

Det blev i forbindelse med overgangsudfordringerne og diskussionen af udviklingen af matematikfagligheden over tid i ekspertgruppen italesat, at der ikke er en tilstrækkelig god kommunikation mellem gymnasiet og de videregående uddannelser, og måske heller ikke mellem folkeskolen og gymnasiet. Det blev af ekspertgruppen sagt, at ”[matematik]projektet er ens for os alle, der er de tre søjler. Det betyder, at hvis metaforen om matematikhuset kan fange an i brobygningen fra folkeskolen til universitetet, så har vi en chance for at trække på samme hammel og forstå den enkelte elevs progression fra folkeskolen til universitet. Det vil rykke meget."

Gymnasielærere og universitetsundervisere efterspørger tilsvarende forudsætninger hos de elever og studerende, de skal modtage, og deres oplevelse af hhv. elevernes og de studerendes parathed er på mange måder sammenlignelig, og i den nuværende situation opleves der blandt lærere i gymnasiet og på de videregående uddannelser en svækkelse af de nævnte mere komplekse kompetencer indenfor matematikken.

12.1.1. Konklusion og anbefaling: fælles sprog for matematikfaglig progression og dynamisk matematiklæringsproces i uddannelsessystemet

Der er behov for at arbejde med forståelse og beskrivelse af den matematikfaglige progression fra grundskolen til det videregående universitetsniveau på baggrund af et fælles sprog om elevens opbygning af det matematikfaglige hus. Samtidig kan en fælles tilgang til redskaber, matematikværktøjer og undervisningsformer bidrage til en styrkelse af overgangene i uddannelsessystemet. Det er afgørende for en beskrivelse af udviklingen af fagligheden i matematik, at der arbejdes med en dokumentationsmetode, som inkluderer *dynamikken* i elevens læringsproces. I denne undersøgelse er der udviklet en sådan dokumentationsmetode, der kan bruges til at fastholde og italesætte denne dynamik. GVH-analysen refererer direkte til elevens læringshjul i den matematikfaglige læringsproces, dvs. til det tilegnede grundlæggende arsenal af viden og færdigheder, der muliggør kompetent vertikal og horisontal matematikfaglighed, hhv. opad i matematikkens tre faglige søjler og ud mod andre fag og andre faglige matematikfaglige søjler. Kobles GVH-analysen af progressionen med F/R/I-U-analysen af opgavebesvarelser og rapporter, beskrives elevernes evne til at anvende deres grundlæggende arsenal og deres kompetencer på ethvert tidspunkt og på ethvert sted i matematikhuset. Tilsammen udgør GVH-F/R/I-U-analysen et fælles sprog – en fælles ramme – der kan anvendes på tværs af uddannelsessystemets niveauer til at beskrive og italesætte forudsætninger og oplevelser af elevernes parathed (herunder elevernes egne oplevelser af parathed) til at gå videre med de næste emner i matematikhuset og på de videregående matematikholdige uddannelser. Vi anbefaler, at analyserne anvendes på denne måde.

12.2. Videreudvikling af didaktik og opgaver for en dynamisk læreproces

Den matematikfaglighed, eleverne i stx møder i undervisningen og i eksamensopgaverne *med hjælpemidler*, har i forlængelse af ovenstående udvidet sig til også at inkludere horisontal matematikfaglighed og matematikfaglige it-værktøjer. Det ses ved, at der fx optræder flere VH-opgaver i de seneste års eksamenssæt, og det ses i vurderingerne i spørgeskemaet, hvor der er enighed om, at 'elevernes forståelse for bredden i matematikfaget' står stærkere nu, end da de responderende matematiklærere påbegyndte deres karriere som lærere og undervisere. Især opgaver med et H-aspekt stiller krav til elevernes evner om at arbejde undersøgende på en matematikfaglig måde.

Analysen af spørgeskemaet, set i forlængelse af analysen af elevernes opgavebesvarelser, peger på, at elevernes vertikale matematiklæring i gymnasiet kan styrkes ved anvendelse af matematikfaglige it-værktøjer i undervisningen, og at en sådan (fortsat) udvikling vil kunne understøttes ved samtidig at *inkludere* eksamensopgaver af undersøgende og eksperimenterende karakter i eksamenssættene.

Dette opfattes af ekspertgruppen som et uudnyttet potentiale. Så længe matematikeksamen på højest mulige niveau i stx-gymnasiet ikke inkluderer undersøgende opgaver, der er lavet for at vurdere elevernes matematikfaglige VH-kompetencer og modelleringskompetencer i en undersøgende og eksperimenterende opgavekontekst, vil disse to kompetencer af matematiklærere formentlig blive opfattet som kannibaliserende i undervisningen i forhold til arsenalet af grundlæggende færdigheder og viden indenfor rene V-opgaver begrænset til én matematikfaglig søjle.

Dette potentiale uddybes under afsnittet om instrumentel genese, fordi brugen af it-værktøjsprogrammer spiller en central rolle i undersøgende modellering, hvor elever og studerende arbejder med at udvikle deres egen matematikviden og matematikforståelse. Samtidig er elevers/studerendes erfaringer med at arbejde med matematikfagets værktøjsprogrammer – herunder it-værktøjer – inde i en udvikling, hvor denne gren af den realiserede matematikfaglighed forbedres over tid.

12.2.1. Konklusion og anbefaling: Videreudvikling af didaktik og opgaver for en dynamisk læreproces

I de matematikfaglige undervisningsmiljøer kan der på baggrund af GVH- og F/R/I-U-rammeværket konkret samarbejdes om, hvordan der på en for eleverne hensigtsmæssig og læringsfremmende måde kan arbejdes med organiseringen af matematiklæring som en dynamisk læreproces, det vil sige at arbejde med den didaktiske planlægning af elevernes progression ud fra den forståelse af elevernes læringshjul, som er gengivet i denne rapport. Følgende kan nævnes som supplerende input til en sådan indsats: udvikling af sammenhængende læringsstrategier ud fra optikken i læringshjulet for alle tre år i stx for Matematik A, B og C, udvikling af eksperimenterende eksamensopgaver, brug af opgaveporteføljer for eksperimentelle matematikopgaver gennem den treårige stx-uddannelse i Matematik A som et alternativ til klassiske slut-eksamensopgaver.

12.3. Videreudvikling af brugen af matematikfaglige it-værktøjer og instrumentel genese

Man kan ikke konkludere, at den stigende bredde i matematikfagligheden over tid er ensbetydende med tilsvarende faldende dybde i matematikfagligheden.

Hvis vurderingerne fra spørgeskemaanalyserne over tid kan tolkes indenfor den analyseramme, som er anvendt i denne undersøgelse, så kunne en antagelse være, at respondenterne i spørgeskemaet udtrykker, at fokusering på horisontal kompetence og rekontekstualisering (fokus på matematik i omverdenen) af matematikken udfordrer den vertikale kompetence og dekontektualisering (fokus på abstrakt matematik) indenfor matematikken. Det interessante er imidlertid, om arsenalet af grundlæggende færdigheder og viden står sikkert og robust. Vores F/R/I-U-analyser af elevernes besvarelser giver ikke anledning til at tro, at elevernes viden og færdigheder er 'fragmenterede' (F). En anden central overvejelse er, at den beskrevne udvikling, hvor nogle færdigheder og noget viden svækkes til fordel for kompetencer, *ikke* kan tolkes som en problematisk udvikling, blot fordi skalaerne, det er målt på, skaber en denotation af, at noget i udviklingen er bedre og noget er ringere. Vurderingen af den konstaterede udvikling må ses i sammenhæng med nutidens og især *fremtidens* krav til matematikfagligheden og anvendelserne af matematikfaglighed i uddannelserne og i samfundet. Vi har tidligere i analyserne været inde på netop disse matematikfaglige diskurser, jf. ”nytteværdien” af matematik.

Den stigende bredde og de stigende horisontale kompetencer motiverer til og danner potentialet for stigende dybde i vertikale kompetencer gennem matematikfaglig modellering og dynamisk udvikling af fagligheden igennem instrumentel genese. Da en del af de matematikfaglige færdigheder og den matematikfaglige viden ”automatiseres”, opstår potentialet for at komme dybere ned i matematikken og længere ind i andre fag og længere med matematisk modellering af omverdensproblemer. For at dette kan ske er der dels brug for undersøgende eksamensopgaver, dels for undersøgende og dialogbaseret undervisning, hvor eleverne kan støttes i deres udvikling af instrumentel genese og deres objektivisering af matematiske processer igennem reifikation.

På baggrund af det konstaterede potentiale for at arbejde med modellering og it-værktøjer i stx har det i ekspertgruppen været diskuteret, hvordan matematikfaglige it-værktøjer kan bruges pædagogisk og didaktisk i undervisningen: Hvordan kan it-værktøjernes rolle i undervisningen og i elevernes ”læringshjul” styrkes og udvikles, så it-værktøjerne bruges til at udvikle elevernes dybdeforståelse? Kan CAS bruges på en måde, så eleverne derigennem oplever autentiske undersøgelser af teoretisk matematik, så værktøjerne derved åbner vinduer ind til matematikfagligheden igennem eksperimenter i modellering og via instrumentel genese? Udvalget diskuterede, at denne måske mere kreative undervisningsform kan få plads, netop fordi visse færdigheder ikke hver gang skal udføres i hånden, og fordi arbejdet foregår i et solidt akkumulerende matematikfagligt hus, hvor alle grupper af elever kan arbejde med matematiske metoder og få et aktivt kendskab til matematikkens grundlæggende begreber. Samtidig var det klart i udvalgets diskussioner, at elevernes evne til at arbejde undersøgende og formulere de nødvendige spørgsmål til deres undersøgelser såvel som den nødvendige evne til at vurdere egne resultater og beregninger og evnen til at indgå i samtale med matematikfaglige begreber udgør et væsentligt potentiale for udvikling i matematikundervisningen i stx. Det kom også frem i diskussionerne i udvalget, at CAS i dag i matematikundervisningen typisk bruges til klassiske grundlæggende beregnings- og visualiseringsopgaver, hvor den trænende, undersøgende og eksperimenterende tilgang til matematikværktøjerne (via instrumentel genese) har potentiale til at løfte en langt større del af eleverne.

Igen opstod diskussionen om eksamensopgaver (se de tidligere præsenterede scenarier for fremtidseksamensopgaver) og eksamenskarakterer i matematik på det gymnasiale niveau. I Sverige bruger man standpunktskarakteren som eksamenskarakter, og i Norge har man 4 matematikfaglige karakterer efter hvert år. Giver andre eksamensformer en anden mulighed for at udfolde den dynamiske matematikundervisning?

Vi kan ikke belyse eller konkludere på baggrund af denne analyse, hvordan matematikfaglige værktøjer som CAS bruges i undervisningen, og vi kan ikke se det i eksamensopgaverne – om it-værktøjerne bruges instrumentelt i forbindelse med abstrakt tænkning eller som redskab til at opnå grundlæggende færdigheder. Fagets lagdelte domæne og synlige ”slutprodukt” er begge relativt uforandrede, men matematikværktøjerne skaber en forandringsproces, som matematikfaget er midt i, og som de nærværende analyser kun løfter lidt af sløret for.

12.3.1. Konklusion og anbefaling: videreudvikling af brugen af matematikfaglige it-værktøjer og instrumentel genese

Der er på tværs af undersøgelsens analyser konstateret et potentiale for undervisningen i stx, som kan beskrives som eksemplarisk udfoldelse af mulighederne i instrumentel genese og dermed videreudvikling af brugen af matematiske værktøjsprogrammer (som CAS, DS m.fl.) til at understøtte undersøgende og eksperimenterede læring for eleverne, der også løfter elevens dybdelæring i matematik, jf. læringshjulets rolle i udviklingen af elevens tilegnede matematikkompetencer. Fordybelse i matematikfagligheden skal og kan dyrkes og vedligeholdes i og med en videreudvikling af matematikdidaktikken til at omfatte en inklusion af endnu mere undersøgende arbejde og egentlig instrumentel genese i elevernes læringsprocesser. De hidtidige massive *instrumentaliseringer* af klasserummet bør kompletteres med en indsats for at forstå og udvikle *instrumenteringerne* af forholdet mellem elev og instrument/matematikværktøj. Dette giver anledning til en anbefaling om, at det skal præciseres og ikke mindst eksemplificeres, hvornår, til hvad og især hvordan værktøjerne bruges i undervisningen. Ekspertudvalget konkluderer, at digitale værktøjer kan – og stadig bør – bruges til at løse meget konkrete klassiske matematikopgaver, herunder komplekse typeopgaver og modelleringsopgaver, men de kan og bør også bruges til at lukke op for og instrumentere ræsonnementskompetencen, som det fx er nødvendigt i beviser og i andet deduktivt arbejde. En ofte overset del af instrumenteringsaspektet i den instrumentelle genese er at kunne tilbyde eleverne mulighed for – til ethvert tidspunkt og på ethvert sted i matematikhuset – at træne det grundlæggende arsenal af færdigheder og viden, som er nødvendige for at kunne fortsætte fra det sted med nye videregående emner – altså en instrumenteret mulighed for at træne G-elementerne i huset med henblik på, at eleven kan stå bedst muligt rustet til de umiddelbart efterfølgende V- og H-elementer i undervisningen.

13. Datagrundlag for rapporten

Empiri til analysen (Danmark)			
	Eksamenssæt	**Elevbesvarelser** Vi har haft adgang til MAT-A- eksamensbesvarelser fra andre år, som ikke er inddraget i analysen, da de ikke var sammenlignelige med det højest mulige niveau i matematik på stx. Fx elevbesvarelser fra studentereksamen i mat-samf-linjen og besvarelser fra forsøg med net-eksamen.	**Reform-periode**
1948	1: Maj-Juni 1948 opgavesæt I og II		Før 1958
1964	1: Maj-Juni 1964 opgavesæt I og II		1958-1971
1968	1: Matematisk-fysisk gren opgavesæt I og II		1958-1971
1975	1: Matematisk-fysisk gren opgavesæt I og II		1972-1988
1980	1: Matematisk-fysisk gren opgavesæt I og II		1972-1988
1981	1: Matematisk-fysisk gren opgavesæt I og II, 12.5.81 og 13.5.81	5 eksamensbesvarelser, 1 skole: Vordingborg Gymnasium *kun besvarelser fra dag 2, 13.5.81*	1972-1988
1990	1: Matematisk-fysisk gren opgavesæt I og II (udkast til ny bekendtgørelse), 17.5.90 og 18.5.90	5 eksamensbesvarelser, 1 skole: Schneekloths Gymnasium	1988-2004
2000	1: Med og uden hjælpemidler, 11.5.06	5 eksamensbesvarelser, 1 skole: Frederiksværk Gymnasium & HF	1988-2004
2006	1: Med og uden hjælpemidler, 18.5.06 (standard-forsøg)	5 eksamensbesvarelser, 1 skole: Frederiksberg Gymnasium, *kun elevbesvarelser med hjælpemidler*	1988-2004
2010	1: Med og uden hjælpemidler, 1.6.10	5 eksamensbesvarelser, 1 skole: Frederiksberg Gymnasium, *kun elevbesvarelser med hjælpemidler*	2005-2017
2018	1: Med og uden hjælpemidler, 30.5.18 (gammel ordning)	20 eksamensbesvarelser, 4 skoler har leveret hver 5 besvarelser (Hjørring Gymnasium og HF-kursus, Munkensdam Gymnasium, Herning Gymnasium og Aalborg Katedralskole)	2005-2017

	Undervisningsbeskrivelser	Vi har modtaget undervisningsbeskrivelser fra 8 gymnasier i perioden 2007-2018. Vi har heraf inkluderet 4 gymnasiers undervisningsbeskrivelser i analysen. To sæt undervisningsbeskrivelser er udeladt, da de stammer fra "opgraderingshold", som ikke har valgt Mat-A som deres niveau i 1. g, hvilket er det analyseniveau, der er valgt for eksamenssæt og -besvarelser. Undervisningsbeskrivelser fra to andre gymnasier er delvist udeladt af samme årsag.	**Reformperiode**
	1 sæt af undervisningsbeskrivelser inkluderet	Skoler: Hjørring Gymnasium og HF-kursus, Roskilde Katedralskole, Frederiksberg Gymnasium, Munkensdam Gymnasium	1988-2004 og 2005-2017
	1 sæt af undervisningsbeskrivelser, delvist inkluderet	Skoler: Kalundborg Gymnasium samt Herning Gymnasium	1988-2004 og 2005-2017

Empiri til analysen (Norge og Sverige)			
Eksamenssæt fra NORGE		**Elevbesvarelser**	**Reformperiode**
1997	Niv 2	Vi har ikke haft adgang til eksamensbesvarelser i matematik fra Norge og Sverige.	Samme læreplan
1999	Niv 1 og 3		
2002	Niv 1		Samme læreplan
2003	Niv 3		
2018	Niv 1, 2 og 3		
Nationale prøvesæt fra SVERIGE			
1998	(med formelsamling og med lommeregner)		
2012	B, C og D		Samme læreplan
2013	B, C og D		

Besvarelser i spørgeskemaet			
Institutionsniveau	**Grundskolen**	**Stx-gymnasiet**	**Videregående universitetsuddannelser**
Besvarelser fra matematiklærere	223	155	69

14. Referencer

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Matematical Learning 7*, s. 245-274. Kluwer Academic Publishers.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior 26 (2007)*, s. 348-370. www.elseveir.com/locate/jmathb.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frederiksberg: Frydenlund.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems and comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*, s. 103-131. Springer. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z C.

EVA (2017). *Den faglige udvikling i gymnasiet*. Danmarks Evalueringsinstitut. www.eva.dk. ISBN (www) 978-87-7182-156-7.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Geraniou, E. & Jankvist, U.T. (2019). *Towards a definition of "mathematical digital competency"*. Educ Stud Math. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32(6)*, 777-796.

Kvalifikationsrammen for Livslang Læring (2016). Uddannelses- og forskningsministeriet. https://ufm.dk/uddannelse/anerkendelse-og-dokumentation/dokumentation/kvalifikationsrammer.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math 67*, s. 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2.

Læreplan for Matematik A – stx (2017, august). Undervisningsministeriet.

Morgan, C. & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Matematics Education, 18(2)*, s. 92-119. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2016.1176596.

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). *Mathematical competencies revisited*. Educ Stud Math. http://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9.

Rabardel, P. & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers, 15(5)*, s. 665-691.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, s. 1-36.

Skott, J.; Skott, C.K.; Jess, K. og Hansen, H.C. (2018). *Delta 2.0 – fagdidaktik 1.-10. klasse*. Serien MATEMATIK FOR LÆRERSTUDERENDE. København: Samfundslitteratur.

Skott, J.; Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende*. København: Samfundslitteratur.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht*. Utrecht, The Netherlands: IOWO.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas project.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Trouche L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. I D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (red.), *The didactical challenge of symbolic calculators*. Mathematics Education Library, vol. 36. Boston, MA: Springer.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3)*, s. 281-307.

Undervisningsministeriet. Styrelsen for IT og Læring. UNI•C Statistik & Analyse, januar 2014.

Vejledning til Matematik A/B/C, stx (2018, marts). Undervisningsministeriet, Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, Gymnasiekontoret.