BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Vejledning til læreplan i Matematik B, stx

Oktober 2022

Vejledning til læreplan i Matematik B, stx
Oktober 2022

2022
ISBN nr. [xxx xxx xxx] (web udgave)

Design: Center for Kommunikation og Presse
Denne publikation kan ikke bestilles.
Der henvises til webudgaven.

Publikationen kan hentes på:
www.uvm.dk
Børne- og Undervisningsministeriet
Departementet
Frederiksholms Kanal 21
1220 København K

Indhold

Indledning

Vejledningen præciserer, kommenterer, uddyber og giver anbefalinger vedrørende udvalgte dele af læreplanens tekst, men indfører ikke nye bindende krav.

Citater fra læreplanen er anført i citationstegn.

Oversigt over justeringer oktober 2022

Vejledningen er udgivet i et nyt format og opdelt i selvstændige vejledninger for stx A, stx B og stx C med deraf følgende redaktionelle ændringer, men der er ikke i øvrigt indholdsændringer.

Forord

I læreplanen indgår tre overordnede faglige områder, nemlig funktionsteori, geometri samt sandsynlighedsregning og statistik (de tre 'søjler' illustreret i modellen nedenfor). Disse tre områder er gennemgående fra start til slut henover de tre gymnasieår og de tre stx-niveauer C, B og A.

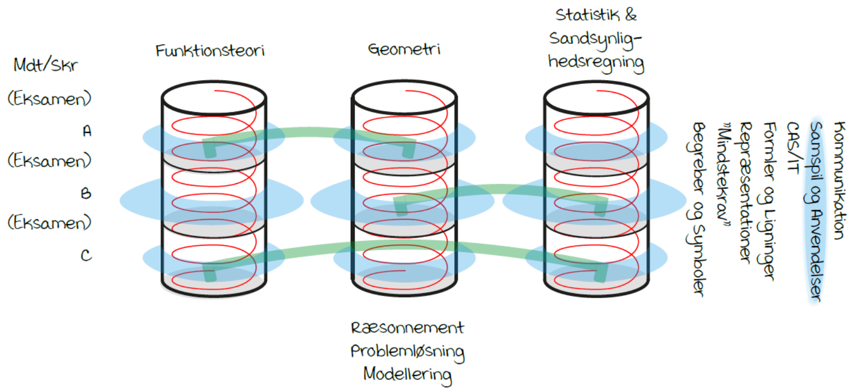
Der vil i nærværende undervisningsvejledning blive refereret til modellens enkeltelementer, som beskrives i det følgende: 'Søjle', 'spiral', 'bro', 'altan' og 'spor', og samlet set refereres til tanken bag modellen som et didaktisk 'spiralprincip'.

Matematik er et svært fag. At lære matematik er forbundet med hård træning med mange gentagelser. I Søren Kierkegaards retorik fra 1843[1] kunne man sige, at matematik skal læres forlæns, men må forstås baglæns. I modsætning til umuligheden af at bevæge sig tilbage i tid så udnyttes muligheden for at gå tilbage i sine matematiske erfaringer og forstå nye dybder af et matematisk resultat, som måske ikke var synlige ved første møde. Det kræver gentagen tilbagevenden *at lære* matematik, ligesom det kræver vedligeholdelse *at bevare* en matematisk færdighed eller kompetence som en aktiv del af et matematisk beredskab.

I matematikundervisningen er der tradition for at gennemarbejde store dele af en 'søjle' hørende til et bestemt niveau C, B eller A (fx hele differentialregningen eller vektorregningen), inden man tager fat på et nyt emne inden for samme 'søjle' eller springer til en ny 'søjle'. Læreplanens intention er, at behandlingen af stoffet bør ske efter et didaktisk 'spiralprincip', hvor eleven på sin vej frem mod et C-, B- eller A-niveau møder matematiske begreber og procedurer behandlet i ét forløb i nye sammenhænge i andre forløb og på den måde vedligeholder og videreudvikler de dertil knyttede matematiske færdigheder og kompetencer. Desuden bør det indtænkes, hvordan de enkelte 'søjler' kan knyttes sammen via 'broer', så færdigheder og kompetencer tilegnet i én kontekst bringes i spil i nye kontekster knyttet til en anden 'søjle'. Det er en kendt sag, at videnstransfer (dvs. i en given kontekst at kunne aktivere viden lært i en anden kontekst) mellem fag er overordentlig vanskeligt, og det samme gælder, når eleverne skal hente begreber og procedurer, de har lært i geometrien, ind i et optimeringsforløb, der bygger på differentialregning. Et første skridt på vejen er en bevidsthed om, hvornår en aktivitet nødvendiggør videnstransfer, og næste skridt er en eksplicitering af de matematiske detaljer i den aktuelle didaktiske situation. Mindstekravskategorierne repræsenterer det grundlæggende matematiske arbejde beskrevet på tværs af 'søjlerne'. Ved at arbejde på 'broerne', hvor stofområder kombineres, udvikles elevernes innovative evner i form af kompetence til at kunne udvælge og aktivere en bestemt del af den matematik, de har lært, i en given "ny" atypisk modellerings- og problembehandlingssammenhæng. De skal kort sagt lære at 'gå til' et problem – de skal turde give sig i kast med at undersøge, hvad problemet går ud på, i stedet for at lede efter en standardprocedure.

[1] *"Det er ganske sandt, hvad Philosophien siger, at Livet maa forstaaes baglænds. Men derover glemmer man den anden Sætning, at det maa leves forlænds. Hvilken Sætning, jo meer den gjennemtænkes, netop ender med, at Livet i Timeligheden aldrig ret bliver forstaaeligt, netop fordi jeg intet Øieblik kan faae fuldelig Ro til at indtage Stillingen: baglænds."* Citat fra Journalen JJ:167 (1843), SKS bd. 18, s. 194 / SKS-E.

Specielt skal ræsonnementskompetencen, modelleringskompetencen og problembehandlingskompetencen være centralt placeret i behandlingen af ethvert emne, parallelt med at elevens erfaringer med matematiske begreber og repræsentationer samt det matematiske symbolsprog udvikles og konsolideres i et aktivt skriftligt og mundtligt ordforråd.



En 'altan' er udtryk for de faglige samarbejder, som matematik på C-, B- eller A-niveau har mulighed for at indgå i med andre fag – bredt på B-niveau og smallere på C- og A-niveau. På C-niveau er der muligheder for samarbejde med dansk, samfundsfag og fysik, men også de kunstneriske fag idræt, musik, design og billedkunst er gode samspilspartnere for matematik. Matematik på B-niveau skal indgå i faglige samarbejder med de studieretningsfag, som eleven har på A-niveau, herunder biologi A, samfundsfag A, musik A og fortsættersprog A. På hold, der har matematik på B-niveau, er det derfor nødvendigt fra begyndelsen af studieretningsforløbet, at læreren retter henvendelse til kolleger, der underviser samme hold i studieretningsfagene, med henblik på at skitsere og tilrettelægge, hvad temaerne for de faglige samspil skal være, hvilken baggrundsviden det kræver, og hvor i det samlede forløb til B-niveau samspillet skal foregå. Når matematik på A-niveau optræder som studieretningsfag, kan de faglige samspil mellem studieretningsfagene nå en større dybde, og der er brug for løbende erfaringsudveksling mellem lærerne i de to (tre) fag.

Matematik er i sit grundlag skriftligt. Enhver form for mundtlig matematik har altid et parallelt skriftligt sidespor – enten i form af symbolsk notation eller illustrationer. Dele af matematikken læres med papir og blyant som eneste redskaber, mens andre dele læres med brug af de utallige muligheder for at skrive, illustrere og eksperimentere med matematik, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder. Med et alsidigt matematisk værktøjsprogram er det muligt på ét matematikniveau at introducere begreber og procedurer, der teoretisk er knyttet til emner, der behandles grundigere på overliggende niveauer. Disse muligheder udnyttes til at antyde og lægge motivationsskabende 'spor' ud til matematiske emner på højere matematikniveauer, som viser vejen frem mod teorien bag løsning af nye typer af matematiske problemer.

"Matematisk værktøjsprogram" dækker i nærværende undervisningsvejledning over et program eller en samling af flere programmer, der kan håndtere både CAS, dynamisk statistik og dynamisk geometri, hvor CAS henviser til kommandoer, der kan håndtere symbolsk (algebraisk) omskrivning, reduktion, formelhåndtering, ligningsløsning, differentiation og integration (ubestemt). Netop CAS-kommandoerne repræsenterer den algebra, som i simple tilfælde også skal kunne håndteres alene med papir og blyant. Med inddragelse af værktøjsprogrammernes lettilgængelige multiple repræsentationer åbnes mulighederne for, at eleverne rent instrumentelt på ét tidspunkt kan stifte bekendtskab med og anvende begreber, som først foldes ud rent matematikteoretisk på et senere tidspunkt. Værktøjsprogrammerne bør således i høj grad udnyttes til at skabe grundlag for, at eleverne støder på og genkender begreber henover det samlede forløb til C-, B- eller A-niveau.

De teoretiske dele af matematikken opbygges gennem undersøgende spørgsmål og eksperimenterende aktiviteter, postulater, formodninger og beviser for endeligt at konsolideres som en del af elevens værktøjskasse gennem anvendelser i opgaveregning og i projekter i arbejdet med større og mere åbne problemstillinger eventuelt hentet fra andre fagområder. Indgangen til at forstå matematiske begreber og mestre matematiske procedurer går ad forskellige veje for forskellige elevtyper, og en meningsfuld undervisning tilrettelægges derfor med varierende udgangspunkt, så den enkelte elev bliver bevidst om, hvilken vej ind i faget der er mest velfungerende for netop vedkommende.

Læreplanen beskriver fagets indhold, arbejdsformer og redskaber. Undervisningsvejledningen folder læreplanens intentioner ud og operationaliserer sammen med de skriftlige eksamensopgavesæt læreplanens beskrivelse af kernestoffet.

Lærebogen derimod er de aktuelle *forfatteres fortolkning* af læreplanens formuleringer. Det er derfor helt centralt, at man som lærer orienterer sig i forskellige lærebøger, diskuterer disses forskellige udlægninger af læreplanens indhold med kolleger og på den baggrund skaber et solidt grundlag for implementering af læreplanens krav.

Matematikfaget optræder i stx på tre niveauer: C-, B- og A-niveau. På alle tre matematikniveauer i stx skal der arbejdes med en centralt udmeldt formelsamling afpasset til hvert af de tre niveauer. Formelsamlingerne udgives af UVM i samarbejde med Matematiklærerforeningen og kan hentes på uvm.dk. Eleverne skal have adgang til den til niveauet hørende formelsamling under delprøve 1 ved de skriftlige prøver jf. afsnit 4.2.

For alle niveauer gælder det, at der skal arbejdes med faget ud fra både et udadrettet og anvendelsesorienteret synspunkt (matematisk arbejde på tværs) og et mere internt matematikfagligt synspunkt (matematisk arbejde på langs), der skal sikre overlevering af blandt andet basale færdigheder og begreber.

Strukturen i undervisningsvejledningen følger samme opbygning som læreplanen, men i afsnit 2, der omhandler kernestof, mindstekrav og supplerende stof, anvendes underoverskrifter, der dækker over punktopstillingernes indhold i de to læreplaner.

1 Identitet og formål

Nedenfor følger direkte citater fra læreplanen. Indholdet i afsnit 1 foldes i øvrigt ud gennem beskrivelser af læreplanens øvrige afsnit.

1.1 Identitet

"Matematik er uundværlig i den naturvidenskabelige og teknologiske udvikling samt i de fleste aspekter af styring og udvikling af samfundet. Matematik er samtidigt væsentlig i hverdagen. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskets første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig gennem en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og teoriopbygning.

Når hypoteser og teorier formuleres matematisk, vindes ofte ny indsigt. Den udbredte anvendelse af matematik og matematiske metoder til modellering og problembehandling bunder i fagets potentiale til at indfange og beskrive, hvordan mange vidt forskellige fænomener grundlæggende opfører sig ensartet. Gennem abstraktion og anvendelse af logik bliver bagvedliggende fælles strukturer og lovmæssigheder tydelige og brugbare."

1.2 Formål

"Eleverne skal opnå alment dannende, anvendelsesbetonet og studieforberedende matematisk indsigt, der bidrager til en forståelse af matematikkens afgørende betydning for at kunne beskrive, forstå og kommunikere om naturvidenskabelige og teknologiske samt samfundsvidenskabelige og kulturelle spørgsmål. Herigennem skal de opnå et solidt grundlag for at kunne begå sig og bidrage aktivt, konstruktivt og innovativt i et demokratisk samfund."

Det anvendelsesorienterede matematik B-niveau skal med hovedvægt på modellering og anvendelser af matematik samt bearbejdning af matematisk teori sætte eleverne i stand til at kunne inddrage viden fra andre fag (særligt studieretningsfagene) og indgå i fagligt samspil med andre fag i gymnasiet. Konkret skal eleverne opnå kompetence til at håndtere problemstillinger opstået i andre fag og udøve matematisk ræsonnement i matematikfaget selv. Herigennem bliver eleverne i stand til at kunne forholde sig til og diskutere andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige faglige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse med betydelig vægt på anvendelse af matematik.

Niveauets karakteristika skal afspejles i undervisningens tilrettelæggelse.

2 Faglige mål og fagligt indhold

De faglige mål, som eleverne skal opnå i undervisningen i matematik, er formuleret i læreplanens afsnit 2.1, og det faglige indhold er beskrevet i afsnit 2.2 og 2.3. De særlige faglige mål, som eleverne skal opnå med henblik på de skriftlige prøver, er ud over beskrivelsen af kernestoffet udmøntet gennem de stillede opgavesæt. Det følgende er således en uddybning af læreplanen samt nogle supplerende kommentarer.

2.1 Faglige mål

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret de faglige mål, som eleverne skal opnå gennem undervisningen i matematik på det aktuelle niveau. De faglige mål danner grundlaget for både skriftlig og mundtlig eksamen. De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3. De faglige mål uddybes gennem beskrivelsen af kernestof og supplerende stof i afsnit 2.2 og 2.3 nedenfor.

De faglige mål og det samlede faglige indhold bygger specielt på udvikling og styrkelse af elevernes ræsonnements-, modellerings- og problembehandlingskompetencer. I arbejdet med disse indgår udvikling af elevernes tankegangskompetence, symbol- og formalismekompetence samt repræsentationskompetence. I undervisningens tilrettelæggelse indgår desuden, at eleverne opnår kompetence til at kunne foretage bevidst hensigtsmæssigt valg af løsningsstrategi med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer. Eleverne skal igennem gymnasieforløbet have mulighed for at demonstrere og blive vurderet på deres opnåede matematikforståelse, hvorfor det også indgår i de faglige mål, at eleverne skal kunne kommunikere aktivt *i*, *med* og *om* matematik i både mundtlig og skriftlig formidling. Det er et gennemgående princip, at der med et nyt højere matematikniveau sker en uddybning af 'spor' fra det underliggende matematikniveau, og at der tilføres helt nye faglige emner.

2.2 Kernestof og mindstekrav

Den del af det faglige indhold under kernestoffet, der er beskrevet som 'spor', vil ikke være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve.

2.2.1 Tal og formler

Eleverne skal opnå en talforståelse, så de behersker regningsarternes hierarki og beregninger i almindelighed samt kan vurdere rimeligheden af fundne resultater. Elevernes talforståelse fra folkeskolen skal vedligeholdes og udvikles, fx bør eleverne opnå forståelse af, at det på trods af let adgang til lommeregnere på fx mobiltelefoner er en stor fordel i mange typer af beregninger umiddelbart at kunne aktivere 'den store tabel' og især kvadrattallene (tabellen optræder i formelsamlingen på alle niveauer). Tilsvarende har eleverne i matematikanvendelser i andre fag brug for at kunne repræsentere meget små og meget store tal med titalspotenser, som bygger på en grundlæggende forståelse af titalssystemet som et positionssystem.

Eleverne skal kunne håndtere brøkregning, potensregler og parentesregler (herunder kvadratsætningerne) i det omfang, de støder på dem i arbejdet med formler og ligningsløsning, mens mere komplicerede udtryk håndteres ved hjælp af CAS. Eleverne skal kunne forklare formler og anvende formler til beregning, og de skal selv kunne opstille nye formler ud fra allerede kendte.

Begreberne ligefrem og omvendt proportionalitet er særligt relevante for de naturvidenskabelige fag, især fysik og kemi, hvor eleverne skal kunne omskrive formler og isolere ukendte størrelser, og derfor behandles proportionalitet i matematikundervisningen med inddragelse af eksempler fra andre fagområder, som eleverne har kendskab til.

Gennem eksempler og gentagen behandling skal eleverne opnå en grundlæggende forståelse af balanceprincippet i ligninger og have opbygget indsigt i, at ligningsløsning sker gennem gentagne anvendelser af 'omvendte operationer'. Til løsning af ligninger hører også simple ligninger med de elementære funktioner, der indgår i kernestoffet. Løsning af ligninger med sådanne sammensatte udtryk løses med CAS, og det er generelt accepteret, at CAS ("solve") i de aktuelle situationer finder samtlige løsninger.

I ligningsløsning indgår også arbejdet med repræsentationsformerne, fx skal eleverne kunne indføre passende variable (herunder betegnelser for disse) og opstille formler, simple ligninger og matematiske modeller med de elementære funktioner ud fra en sproglig beskrivelse af de sammenhænge, der forbinder forskellige størrelser, eller oplysninger om sammenhørende værdier for de variable repræsenteret ved koordinatsæt eller fastlagt ved en tabel.

Ved grafisk løsning er det vigtigt, at eleverne opnår fortrolighed med at kunne indrette koordinatsystemet hensigtsmæssigt i en given situation, og at en grafisk repræsentation kun viser et udsnit af både graf, definitionsmængde og værdimængde. Parallelt hermed bør tabelrepræsentationers begrænsede og forsimplede udtryk af sammenhængen indgå. Ved grafisk løsning af ligninger kræves en argumentation for, at alle løsninger til den aktuelle ligning fremgår af det valgte grafvindue.

Med en omfattende brug af CAS er det helt centralt for fortolkning af CAS-svar, at eleverne kender forskellen på eksakt og tilnærmet værdi samt kender betydningen af begrebet absolut værdi (numerisk værdi). Absolut værdi optræder desuden i flere formler, som eleverne skal kunne håndtere, fx bestemmelse af areal udspændt af to vektorer eller samt afstandsbestemmelse.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: For hvilke værdier af x er medicinkoncentrationen større end/mindre end en given værdi?

2.2.2 Procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring

Inden for procent- og rentesregning skal eleverne kunne håndtere generel procentregning, og de skal kunne anvende renteformlen til problembehandling, herunder redegøre for begreberne start- og slutkapital, rentefod og terminer. Specielt skal det mere generelle begreb vækstrate, som har stor betydning i arbejdet med modeller hele vejen igennem kernestoffet, gives en særlig behandling, idet det fremhæves som begreb med betydning, når det optræder i den givne sammenhæng.

Eleverne skal desuden som en del af en dybere talforståelse kunne håndtere relative beregninger. Det kan naturligt indgå i samarbejde med andre fag, fx i de naturvidenskabelige fags usikkerhedsberegninger i forbindelse med eksperimentelt arbejde og i samfundsfag, hvor de relative beregninger optræder som indekstal (herunder begrebet basisår).

2.2.3 Statistik

I arbejdet med statistisk modellering er det helt centralt, at eleverne opnår forståelse af, at statistik forsøger at modellere (og kvantificere) systemer, der indeholder en stokastisk komponent, dvs. en grad af tilfældighed. Statistisk modellering er karakteriseret ved, at den søgte model er ukendt. Hvis alle altid var enige om, hvilken statistisk model der skulle benyttes, og hvilke forudsætninger der var gældende, så ville alle statistiske problemstillinger blive reduceret til matematiske problemer. Derfor skal eleverne opnå indsigt i, at et statistisk ræsonnement adskiller sig fra et matematisk ræsonnement, og de skal opnå kompetence til at kunne oversætte et virkelighedsnært problem (fx hentet fra et fag, som eleverne har kendskab til) til et statistisk problem og kunne fortolke de resultater, der kommer ud af den statistiske analyse, i henhold til den aktuelle kontekst.

Eleverne skal kende og kunne anvende de indbyggede faciliteter og muligheder, som deres matematiske værktøjsprogram tilbyder til behandling af stikprøver (fx én-variabel-statistik). I behandling af stikprøver diskuteres konkrete datamaterialers repræsentativitet, og betydningen af de enkelte deskriptorer fortolkes ind i problemets kontekst. Eleverne skal kunne håndtere diskret og grupperet datamateriale, simple statistiske deskriptorer og simple grafiske repræsentationer af data.

Eleverne skal for simple datasæt (afhængigt af om det er diskret eller grupperet) kunne bestemme og fortolke begreberne hyppighed, frekvens, kumuleret frekvens, middelværdi, fraktiler, median og øvrige kvartiler samt maksimum og minimum, og de skal kunne tegne og aflæse på boksplot og sumkurve.

Ved den skriftlige prøve stilles ikke opgaver, der kræver produktion af boksplot eller sumkurver med elevernes CAS-værktøj.

Eleverne skal kunne beskrive og sammenligne grafiske repræsentationer med brug af ovennævnte deskriptorer samt simple spredningsbegreber som kvartilbredde, variationsbredde og den instrumentelt beregnede stikprøvespredning (standardafvigelse). Desuden skal de kende begrebet 'outlier', men det indgår ikke i opgaver ved den skriftlige delprøve 2.

Eleverne skal opnå fortrolighed med gængse regnearkskommandoer, der gør dem i stand til at bearbejde store datasæt i en statistisk analyse, herunder modellering med brug af regression. Det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at importere store datasæt i deres matematiske værktøjsprogram med henblik på videre bearbejdning, herunder datamanipulation (med gængse kommandoer), grafisk repræsentation, bestemmelse af simple statistiske deskriptorer mv. Det betyder blandt andet, at eleverne skal kunne håndtere eventuelle tekniske problematikker knyttet til deres matematiske værktøjsprogram vedrørende brug af decimalkomma og decimalpunktum samt andre tekniske udfordringer. En vej kan være at indstille computerens sprogindstillinger, så der overalt bruges decimalpunktum, mens komma reserveres til tusindtalsseparator.

Ved den skriftlige prøve vil datasæt, som det er nødvendigt at importere til eksaminandens matematiske værktøjsprogram under prøven, alene indeholde heltal. Der kan være tabeller med kommatal i opgaverne til behandling med eksaminandens matematiske værktøjsprogram, men så er talmaterialet så lille, at det kan tastes ind i hånden.

Eleverne skal kunne opstille modeller ved hjælp af lineær og eksponentiel regression samt potensregression. Eksponentiel regression og potensregression kan udføres direkte eller som lineær regression på logaritmisk transformerede data.

Specielt den lineære model, herunder lineær regression (forstået som mindste kvadraters metode), gives en særlig behandling, hvor residualer studeres nøjere, herunder det tilhørende residualplot. Eleverne skal kunne beregne residualer (herunder fx udpege den observation, der repræsenterer den største afvigelse) i en lineær regression og vurdere afvigelsernes størrelser i forhold til modelværdierne, og de skal kunne give en kvalitativ vurdering af en lineær models gyldighed med henvisning til den tilfældighed (eller omvendt den systematik) i afvigelserne, der kommer til udtryk i residualplottet. På emu.dk ligger et materiale, der uddyber lineær regression som statistisk metode.

Modellering med lineær og eksponentiel regression vil være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve, men eleverne vil ikke blive bedt om at udføre potensregression.

Eleverne forventes desuden at kunne opstille modeller ved hjælp af polynomiel regression og kunne tegne det til den aktuelle model hørende residualplot.

Behandlingen af lineær regression udvides med et kvalitativt kendskab til mindste kvadraters metode svarende til de faciliteter, et matematisk værktøjsprogram tilbyder, fx visning af residuelle kvadrater og undersøgende tilpasninger med flytbare linjer. I behandlingen heraf omtales fx den varsomhed, hvormed man bør omgås lineære modeller, hvor hældningskoefficienten viser sig at være tæt på nul, hvilket eleverne kan støde på i tværfaglige sammenhænge.

Eleverne skal i relation til de lineære modeller bestemt ved lineær regression kunne foretage simple analyser ud fra det tilhørende residualplot. Bemærk, at i vurdering af en bestemt models anvendelighed forventes eleverne udelukkende at argumentere statistisk på baggrund af residualplot.

Eleverne skal opnå kendskab til stikprøvespredning, som udtrykker, hvor meget en beregnet størrelse, typisk den estimerede middelværdi, forventes at variere "fra stikprøve til stikprøve", altså hvor usikkert bestemt estimatet egentlig er.

2.2.4 Sandsynlighedsregning

Eleverne skal have kendskab til både a priori (på forhånd givne) og frekventielle (statistisk bestemte) sandsynligheder og kende forskellen på disse. Sandsynlighedsfelter, herunder symmetriske sandsynlighedsfelter, behandles som model for stokastiske eksperimenter gennem konkrete eksempler.

Eleverne skal kende og kunne anvende begreberne fakultet, permutation og kombination. Eleverne skal kunne håndtere konkrete simple kombinatoriske beregninger af sandsynligheder med additions- og multiplikationsprincippet; herunder inddrages naturligt tælletræer, som eleverne kender fra folkeskolen. I behandlingen af kombinatorik vil det være oplagt at inddrage Pascals trekant.

Bemærk, at den egentlige kombinatorik kun kræves behandlet i det omfang, der er nødvendigt for forståelsen af binomialfordelingen. Formlen for $K(n,r)$ kan generaliseres ud fra et eksempel. Eleverne forventes kun at kunne håndtere simple sandsynlighedsberegninger med brug af denne forme i opgaver af typen 'antal gunstige divideret med antal mulige', hvor 'antal gunstige' kan udregnes med en eller flere kombinatoriske beregninger og 'antal mulige' med én kombinatorisk beregning.

Uafhængige hændelser omtales i forbindelse med problemløsning, der kræver multiplikation af sandsynligheder, men gives ikke en selvstændig behandling.

Begrebet stokastisk variabel indgår i kernestoffet, men det er ikke tanken, at det skal gives en selvstændig behandling. Begrebet skal indføres i behandlingen af binomialfordelingen, hvorved man opnår en notation, der gør det mere enkelt at formulere spørgsmål og opstille formler. Eleverne skal kunne håndtere beregninger med middelværdi, varians og spredning for en stokastisk variabel med en given sandsynlighedsfordeling.

Eleverne skal kunne håndtere begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed, og de skal kunne anvende binomialfordelingen til løsning af virkelighedsnære problemstillinger, dvs. de skal kunne beregne punktsandsynligheder og kumulerede sandsynligheder samt middelværdi og spredning. Desuden skal eleverne kunne tegne og kunne aflæse på et søjlediagram på baggrund af en binomialfordeling.

Eleverne skal kende betingelserne for, hvornår et empirisk datasæt kan betragtes som realiserede værdier af en binomialfordelt stokastisk variabel; herunder inddrages diskussion af eksperimenter med og uden tilbagelægning.

Hypotesetest i binomialfordelingen anvendes til at vurdere situationer, hvor der ud fra stikprøver sluttes til generelle udsagn om en population.

Bemærk, at eleverne ved den skriftlige prøve kun forventes at kunne håndtere to-sidet test, herunder kunne opstille af simple nulhypoteser af typen $p = p_0$.

Udgangspunktet for beregning af de forventede værdier i testet er den sandsynlighedsparameter p, som vi i den aktuelle situation betragter som 'den sande' værdi for p i populationen. De centrale begreber i et binomialtest er population, stikprøve, nulhypotese, alternativ hypotese, teststørrelse, kritisk område, acceptområde, signifikansniveau og p-værdi. Konklusioner draget af et hypotesetest diskuteres med henblik på systematiske fejl (bias) og skjulte variable (konfundering).

Eleverne skal opnå forståelse af begrebet nulhypotese, herunder at hypotesen altid opstilles, før stikprøven til belysning af hypotesen udtages, og at en påfaldende afvigende observation i én stikprøve peger på en ny hypotese, som testes på baggrund af en ny stikprøve.

Eleverne skal kunne bestemme konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren p ('den sande' værdi for p i populationen) ud fra stikprøvens størrelse n og et stikprøveestimat for p (ofte kaldet $\hat{p}$) med de indbyggede faciliteter, som et matematisk værktøjsprogram tilbyder, og de forventes herudfra at kunne uddrage den statistiske usikkerhed. Eleverne forventes også at kunne håndtere beregninger med den eksakt udledte formel (gengivet i formelsamlingen) for usikkerhed baseret på normalfordelingsapproximationen. En rimelig normalfordelingsapproksimation kræver, at både $n \cdot p \geq 5$ og $n \cdot (1-p) \geq 5$, men eleverne forventes ikke at argumentere for dette i besvarelsen af opgaver ved den skriftlige prøve.

Simuleringer og beregninger med binomialfordelingens sandsynlighedsfunktion giver gode muligheder for at diskutere løsningsmetodernes grad af præcision set i relation til praktisk anvendelse. Simulering kan desuden udnyttes til eksperimentelt at forstå statistiske sammenhænge, som er for svære at behandle teoretisk.

Eleverne skal kende begreberne normale udfald, der højst ligger to spredninger fra middelværdien, og exceptionelle udfald, der ligger mere end tre spredninger fra middelværdien. Begreberne er hentet fra normalfordelingen, og som "spor" til A-niveauet omtales normalfordelingsapproximationen til binomialfordelingen gennem konkrete eksempler, der behandles grafisk i et matematisk redskabsprogram.

Bemærk, at da der er tale om 'spor', vil normalfordelingsapproksimationen ikke være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve.

2.2.5 Funktioner

Funktionsbegrebet er helt centralt i moderne matematik og er svært at lære. Elever tænker ofte blot på funktioner som symbolmanipulationer eller procedurer, hvilket giver dem problemer, når de skal repræsentere funktioner på forskellige måder, og når de i fx differentialregningen skal tænke på funktioner som objekter i stedet for processer.

De algebraiske procedurer, der hører til funktionsbegrebet, skal derfor i undervisningen kobles til en generel forståelse af funktionsbegrebet, så eleverne hjælpes bedre til at løse mere komplekse problemstillinger med funktioner samt til at fortolke meningsfuldt i forskellige kontekster. For at opnå dette bør der jævnligt indgå aktiviteter i undervisningen med henblik på at:

- tydeliggøre forskellen mellem en regneforskrift og en ligning
- sætte fokus på, at en funktion kan repræsenteres på flere måder
- give eleverne en intuitiv forståelse af, hvordan output varierer med input
- arbejde med vandret og lodret parallelforskydning af funktioner med brug af et matematisk værktøjsprograms mange muligheder
- vise eleverne mange forskellige typer af funktioner (ikke kun kontinuerte) og eksempler på relationer, der ikke er funktioner.

Eleverne skal opnå viden om de elementære funktioner: lineære og eksponentielle funktioner samt potensfunktioner, herunder disse funktioners karakteristiske egenskaber og grafiske forløb med henblik på definitionsmængde, værdimængde, monotoniforhold samt asymptotiske forløb (eksponentiel og potens). Blandt potensfunktionerne forventes eleverne kun at kunne håndtere kvadratfunktionen, kvadratrodsfunktionen og den reciprokke funktion.

Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift for en lineær eller en eksponentiel funktion, forventes eleverne at kunne argumentere for disses betydning for det grafiske forløb. Desuden bør eleverne have kendskab til, hvordan sammenhængen mellem lodret og vandret parallelforskydning af grafer kommer til udtryk i de aktuelle funktioners forskrifter.

Til de karakteristiske egenskaber for eksponentielle funktioner hører begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant.

Eleverne skal kunne anvende de elementære funktioner i modellering, og de skal kunne forholde sig reflekterende til fremskrivninger ud fra modellerne, herunder diskutere idealiseringer og rækkevidden af modellerne med beregning af absolut/relativ afvigelse. De elementære funktioner bør derfor introduceres i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modellering af virkelighedsnære problemstillinger, som giver mening for eleverne, og hvor de aktuelle funktioners egenskaber kommer særligt klart til udtryk.

Bemærk, at potensmodellers %-%-vækstegenskab ikke vil være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve.

Eleverne skal opnå viden om andengradspolynomier samt overordnet kendskab til polynomier af højere grad. De skal opnå viden om logaritmefunktionerne (10-talslogaritmen og den naturlige logaritme) og deres egenskaber. Eleverne forventes ikke at kunne håndtere koordinatsystem med logaritmisk skala ved den skriftlige prøve.

Eleverne skal kunne håndtere begrebet rod i et polynomium og begrebet faktorisering, specielt med henblik på andengradspolynomier. Eleverne skal opnå viden om sammenhængen mellem grad og antal rødder (nulpunkter) for polynomier. Specielt for andengradspolynomier skal eleverne kunne redegøre for både konstanternes og diskriminantens betydning for parablens beliggenhed i koordinatsystemet.

I bearbejdningen af de elementære funktioner bør der desuden indgå en grafisk og algebraisk undersøgelse af funktioner, hvor der indgår en parameter i funktionsforskriften, fx i kombination med lodret og vandret parallelforskydning.

Eleverne forventes at kunne håndtere begrebet sammensat funktion på et instrumentelt niveau svarende til at kunne bestemme forskriften ud fra to givne simple funktioner og bestemme funktions-værdier for sammensatte funktioner ud fra forskrift, tabel og graf. I forbindelse med de eksponentielle funktioner behandles sammenhængen mellem a^x og e^{kx}.

Som "spor" til A-niveauet behandles de trigonometriske funktioner (sinus og cosinus) i en anvendelses-orienteret sammenhæng med fokus på modellering af periodiske fænomener med sinusfunktionen, hvor eleverne lærer at kunne håndtere skiftet til radianer i graftegning. Egenskaber som amplitude og svingningstid bør kun indgå implicit, forstået på den måde, at eleverne grafisk skal kunne bestemme ekstremumssteder og -værdier, og de skal kunne svare på spørgsmål af typen "Hvor lang tid går der mellem de to gange, hvor vanddybden er størst?" eller "Hvor lang tid tager det for pendulet at gennemføre en hel svingning?".

Bemærk, at da der er tale om 'spor', vil de trigonometriske funktioner ikke være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve på B-niveau.

2.2.6 Monotoniforhold og differentialregning

Eleverne forventes at opnå fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation (sum, differens, produkt, 'gange en konstant' og sammensat funktion med lineær indre funktion). Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning samt om at kende og kunne anvende sammenhængen mellem afledet funktion, monotoniforhold og ekstrema i problembehandling.

Bemærk, at det ikke er tanken, at differentialregningen gives en teoretisk dyb behandling. Vægten lægges normalt på udledning af nogle få centrale differentialkvotienter og simple regneregler.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, så eleverne opnår en intuitiv forståelse af begrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende inddrages kontinuitetsbegrebet på intuitiv vis i behandlingen af sammenhængen mellem den afledede funktion og begreber som monotoniforhold og ekstrema, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Det er vigtigt for udvikling af elevernes begrebsforståelse, at de også møder funktionstyper, der ikke er kontinuerte, og funktioner, der ikke er differentiable.

Eleverne skal kunne redegøre for differentialkvotientens betydning både i interne matematiske sammenhænge og i anvendelsesorienteret sammenhæng, dvs. de skal kunne fortolke differentialkvotienten som en væksthastighed i modelleringssammenhæng.

De anvendelsesorienterede kontekster vælges, så det giver mening for eleverne, når de skal fortolke resultaterne af aflæsningerne. På den måde skal eleverne opleve, at matematiske værktøjsprogrammer bidrager til, at de kan opnå information om den kontekst, som modellen beskriver, og som de ikke ville kunne opnå uden.

I nogle tilfælde vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de funktionstyper, der er dækket af de elementære funktioner, og de regneregler for differentiation, der er beskrevet i kernestoffet. I disse tilfælde forventes eleverne at anvende CAS til at differentiere disse udtryk.

2.2.7 Geometri og vektorregning

Geometrien bygger videre på, at alle elever i folkeskolen har arbejdet med forholdsberegninger i ensvinklede trekanter med brug af skalafaktor, med Pythagoras' læresætning og med de trigonometriske formler i retvinklede trekanter. Desuden har de fleste prøvet kræfter med et dynamisk geometriprogram. Det forventes endvidere, at eleverne har kendskab til linjer ved trekanten, fx højde, median og vinkelhalveringslinje, som også er beskrevet i formelsamlingen.

Vektorregningen i kernestoffet tjener flere formål. Vektorregningen skal bidrage til, at eleverne vedligeholder og udvikler deres beregningsmæssige og algebraiske færdigheder, som de har med fra grundskolen, samtidig med at de lærer noget helt nyt og går i dybden med nye geometriske begreber. Indførelsen af vektorbegrebet bør derfor såvel foregå i en vekslen mellem tegning og beregning som i en vekslen mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer, hvor eleverne arbejder med talforståelse, begrebsforståelse og algebra, parallelt med at de opstiller og løser geometriske problemer med vektorer i et koordinatsystem.

Cosinus og sinus indføres som koordinater for retningsvektoren til et givet punkt på enhedscirklen, og eleverne forventes at kende tangens som forholdet mellem sinus og cosinus. Eleverne forventes at kunne operere med begreberne nulvektor, enhedsvektor, stedvektor og forbindelsesvektor.

Eleverne skal i beregninger og i geometrisk fortolkning ved tegning kunne anvende regnereglerne for vektorer (addition, subtraktion og 'gange en konstant') og de elementære operationer til at bestemme: længden af en vektor, tværvektor til en given vektor, skalarproduktet og determinanten mellem to vektorer, vinkel mellem to vektorer (herunder parallelle og ortogonale vektorer) samt projektionen af en vektor på en vektor.

I den indledende vektorregning er der rig mulighed for, at eleverne selvstændigt arbejder med at formulere simple sætninger (om fx længden af en vektor eller sammenhængen mellem to vektorers skalarprodukt og deres indbyrdes beliggenhed) og efterfølgende gennemfører eksempelbårne ræsonnementer gennem matematiske eksperimenter eller egentlige beviser med analytiske argumenter. Dog vil der normalt være udbredt forskel på, hvilke formler der udledes, og hvilke sætninger der bevises analytisk på C-, B- og A-niveau.

Eleverne forventes at kunne argumentere for regneregler og formler gennem eksempler og matematiske eksperimenter i et værktøjsprogram. Analytisk udledning af formlen for skalarprodukt (vinkel mellem vektorer), formlen for determinant og projektionsformlen indgår normalt kun på A-niveau.

Geometriske problemer tager udgangspunkt i og løses med vektorregning. Elevernes forventes at kunne håndtere geometrisk modellering og problembehandling i form af at kunne indlægge geometriske objekter i et koordinatsystem og udføre aflæsninger og beregninger knyttet til modellen.

Vektorregningen udvides med den del af den analytiske geometri, som omhandler analytisk beskrivelse af objekterne linje og cirkel. Også i denne fase er det vigtigt som støtte for elevernes begrebsforståelse, at der i undervisningen veksles mellem tegning og beregning og mellem aktiviteter med papir/blyant og matematiske værktøjsprogrammer.

Centrale dele af vektorregningen kan trækkes frem og anvendes i argumentationen for resultater i den analytiske geometri, fx anvendes skalarproduktet til at bestemme vinkler mellem linjer, og projektionsformlen kan tænkes ind i en geometrisk argumentation for formlen til bestemmelse af afstand fra punkt til linje. Det forventes, at eleverne kan anvende de simple overgangsformler, som er nødvendige for at kunne håndtere stumpe vinkler mellem vektorer.

Eleverne skal opnå færdigheder og kompetencer i at kunne opstille og omskrive ligninger for cirkler (kvadratkomplettering) og bestemme ligninger for cirkeltangenter samt omskrive frem og tilbage mellem ligning og parameterfremstilling for en ret linje. Desuden skal eleverne kunne bestemme skæringspunkt mellem linjer, skæringspunkter mellem linje og cirkler, vinkel mellem linjer samt afstand fra punkt til linje. Til vinkel mellem linjer hører også sammenhængen mellem en ret linjes hældningsvinkel (med førsteaksen) og linjens hældningskoefficient.

I den analytiske geometri indgår formler, som kan udledes ved figurbetragtninger og anvendelse af vektorregningsformlerne.

2.2.8 Matematiske modeller og modellering

Eleverne forventes at kunne anvende funktionsudtryk til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og andre variabelsammenhænge, og de forventes at opnå viden om de forskellige faser i en modelleringscyklus. Specielt skal den indledende fase i en modelleringsproces og selve matematiseringsfasen gives særlig opmærksomhed, så eleverne får kendskab til metoder, der kan benyttes til at få hul på en problemstilling, udvælge den matematik, der skal bringes i anvendelse, og dernæst matematisere problemet.

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem, fx et optimeringsproblem, mens andre udspringer af fx økonomiske eller naturvidenskabelige sammenhænge, hvor eleverne arbejder med at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer.

I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer og rækkevidde, som typisk er relateret til den kontekst, som modellen indgår i.

Eleverne skal kunne opstille simple matematiske modeller ud fra et givet talmateriale, en figur eller en beskrivende tekst, hvor de elementære funktioner bringes i anvendelse.

Modeller til beskrivelse af et datamateriale inviterer til spørgsmål om fremskrivninger og prognoser eller spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer, samt konkrete beregningsmæssige spørgsmål på baggrund af bestemte oplysninger om konteksten. Eleverne skal i arbejdet med modeller opnå kompetence til at begrunde deres svar med beregning af absolut eller relativ afvigelse afhængigt af den aktuelle situation.

Den del af kernestoffet, der omhandler lineære modeller, er obligatorisk i grundforløbet. Kernestoffet i grundforløbet er foldet ud i afsnit 3.1 nedenfor.

2.2.9 Mindstekrav

Mindstekravene udgør dels en balance mellem *færdigheder* og *kompetencer*, dels en balance mellem *uden* og *med* matematisk værktøjsprogram.

Mindstekravene knytter sig til de mest enkle og lettest forståelige dele af kernestoffet, som en elev forventes at kunne begå sig inden for. Mindstekravene retter sig dermed mod de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer, som en elev som minimum skal kunne mestre inden for et givet felt, når eleven har gennemført og bestået matematik på det aktuelle niveau.

Mindstekravene kæder viden og begrebsforståelse sammen med færdigheder og kompetencer i relation til simpelt ræsonnement, modellering og problembehandling. Kravene til brug af matematiske værktøjsprogrammer bygger på forståelse og fortolkning af såvel input som output både grafisk og symbolsk, og derfor dækker mindstekrav også over basal brug af de muligheder, som matematiske værktøjsprogrammer tilbyder.

Mindstekrav må ikke forveksles med beherskelse af basale algebraiske færdigheder alene. Beherskelse af basale algebraiske færdigheder uden matematiske værktøjsprogrammer udgør en central, men mindre del af mindstekravene.

Til mindstekravene hører, at eleverne kan identificere kernen i et simpelt matematisk problem, og at de kan gå til problemet med en rimelig struktureret tankegang, som de er i stand til at redegøre for. Som en del af mindstekravene skal eleven også besidde en vis robusthed, dvs. faglig fortrolighed med og selvstændighed i udvælgelse og anvendelse af metoder i bestemte typer af problembehandling med og uden brug af matematiske værktøjsprogrammer.

Overordnet set ligger de grundlæggende færdigheder og kompetencer på alle de tre matematikniveauer (C-, B- og A-niveau) inden for tal, variable, problembehandling, argumentation og analyse. Bearbejdninger heraf på ét niveau vil resultere i nye færdigheder og kompetencer, der kan anvendes og give anledning til nye på næste niveau. Mindstekravene udvides således dels med henblik på reelt nyt fagligt indhold og dels med henblik på det taksonomiske niveau, hvorpå en elev forventes at kunne forholde sig til allerede behandlet fagligt stof, når eleven bevæger sig fra et matematikniveau til et andet. Men samtidig kan mindstekrav på ét matematikniveau (B- eller A-niveau) indeholde elementer af de(t) underliggende niveau(er)s kernestof, som stadig er aktuelt i behandlingen af det aktuelle niveaus kernestof.

Opgaver, der afprøver, hvorvidt en elev mestrer mindstekravene, har karakter af typeopgaver, dvs. opgaver, der er forbundet med (en vis grad af) genkendelse for den elev, der aktivt har deltaget i undervisningen på det aktuelle niveau. Opgaverne er knyttet til hvert af de faglige emner i kernestoffet og består af spørgsmål med et eller få trin svarende til det unistrukturelle niveau i SOLO-taksonomien, herunder brug af simple kommandoer i et matematisk værktøjsprogram. Når en opgave omfatter et element af anvendelsesorientering, så beskrives problemstillingen i en kort og letforståelig tekst. Tilsvarende er symbolbrugen i 'nøgne' matematikopgaver letforståelig. Opgaverne fokuserer dels på beregninger, dels på forståelse og stilles ved de skriftlige prøver på B- og A-niveau både ved delprøve 1 og delprøve 2.

Overordnet fokuserer mindstekravsopgaverne som udgangspunkt på følgende kategorier af færdigheder og kompetencer, som optræder inden for et eller flere kernestofemner:

Begreber og symboler:

- Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og betydning af begreber
- Indføre variable og angive symbolske betegnelser

Formler og funktioner:

- Omskrive og reducere formler og udtryk med papir/blyant og med CAS
- Indsætte konkrete værdier i formler (forskrifter) og tilskrive resultatet betydning
- Aflæse indgående størrelser og tilskrive størrelserne betydning (matematisk og i kontekst)
- Opstille formler og udtryk ud fra givne oplysninger eller en sproglig beskrivelse

Ligningsløsning:

- Afgøre, om et oplyst resultat (værdi, udtryk) er en løsning til en ligning med papir/blyant og med CAS
- Algebraisk løse ligninger med papir/blyant og med CAS

Grafisk løse ligninger med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram

Operationer på funktioner (kun B-niveau)

- Differentiere funktioner med papir/blyant og med CAS
- Sammensætte funktioner med papir/blyant og med CAS

Grafer og figurer:

- Tegne grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram, herunder hensigtsmæssigt valg af 'grafvindue'
- Aflæse på forelagte grafer og grafiske repræsentationer samt på geometriske figurer (selvfrembragte med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram) – og tilskrive resultater betydning (matematisk og i kontekst)

Tabeller:

- Aflæse data fra tabel, herunder funktionstabel og sandsynlighedsfordeling
- Opskrive (importere) data i tabel, herunder frembringelse af funktionstabel med papir/blyant og med CAS

'Black box'-kommandoer i matematisk værktøjsprogram:

- Anvende indbyggede 'en-knap-kommandoer'
- Anvende indbyggede statistiske undersøgelser af data

I bilag 2 samt på emu.dk findes eksempler på opgavetyper, der beskriver kategoriernes indhold. Mindstekravene, som de eksplicit kommer til udtryk ved de skriftlige prøver, eksemplificeres i de vejledende opgaver. Ovenstående (inkl. opgaverne i bilag 2) er således ikke en udtømmende liste, men blot eksempler, der anskueliggør kravene.

2.3 Supplerende stof

Det supplerende stof er obligatorisk. Det vil ikke indgå i opgaver til den skriftlige prøve, men skal indgå i spørgsmålene til den mundtlige prøve. Det supplerende stof kan med fordel inddrages i behandlingen af nærliggende kernestof. Desuden vil dele af det supplerende stof være naturligt at behandle i samarbejde med andre fag.

2.3.1 Ræsonnement og bevisførelse

Eleverne skal møde den matematiske teori løbende gennem hele gymnasieforløbet, og de skal selvstændigt arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement. Det er vigtigt, at det ekspliciteres for eleverne, når der arbejdes med matematiske ræsonnementer, så de bliver tydelige for eleverne. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem "hvad man ved", "hvad man antager", og "hvad man ønsker at vide". Det gælder, uanset om der arbejdes med ren matematisk teori eller med anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. Eleverne skal opnå viden om, at der er forskel på den måde, hvorpå matematiske emner fremstilles i bøger, og den måde, hvorpå teorien hørende til emnet oprindeligt er fremkommet. De skal kende til bevisets rolle og derigennem opnå indsigt i fagets deduktive natur (afpasset B-niveauet), hvor der skelnes mellem forudsætninger, antagelser, definitioner og sætninger. Eleverne skal selvstændigt kunne fremlægge simple matematiske ræsonnementer af forskellig karakter, og de skal kunne argumentere for de bærende idéer i udvalgte (gerne forskelligartede) beviser inden for forskellige dele af de emner, der hører til B-niveauet. Denne side af matematikkens væsen bør introduceres tidligt gennem eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for elevernes selvstændige arbejde med matematiske eksperimenter, diskussion af antagelser og forudsætninger samt diskussion af det induktive kontra det deduktive. Det kan være direkte knyttet til kernestof eller supplerende stof.

Matematiske ræsonnementer, herunder beviser, udgør en essentiel del af den matematiske teori. Det gælder i bygningen af matematisk teori, i modellering og i eksperimentelt arbejde med matematik. I nogle forløb tilrettelægges undervisningen deduktivt, og her vil beviset naturligt fylde mere. Tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor sætningens forudsætninger er nødvendige. I andre forløb vil ræsonnementer fylde mere, fx i statistik eller i forløb, der tilrettelægges induktivt. Matematisk ræsonnement bør også trænes eksplicit i arbejdet med matematisk modellering.

Et af de mest abstrakte emner i kernestoffet er differentialregningen, og derfor skal emnet også i denne sammenhæng gives en særlig behandling. Det kan være ved at udlede enkelte af de simple differentialkvotienter og regneregler. Der er ikke krav om, at bestemte sætninger og beviser skal indgå. Produktreglen regnes fx ikke for at være en simpel regneregel, og derfor vil beviset normalt ikke indgå i et forløb til B-niveau.

Betingelserne for løsning af andengradsligningen og for udledning af løsningsformlen kan give mulighed for at sætte fokus på, hvordan et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af argumenter.

2.3.2 Væksthastighed – et vigtigt begreb i matematiske modeller

Som 'spor' fra B- til A-niveauet omtales lineære og eksponentielle vækstmodeller beskrevet ved simple differentialligninger. Eleverne skal rent instrumentelt ved brug af CAS kunne bestemme løsningen til simple begyndelsesværdiproblemer, der beskriver en problemstilling i en anvendelsesorienteret kontekst.

2.3.3 Autentiske data

Eleverne skal arbejde med autentiske data. Til autentisk datamateriale hører både data hentet i databanker eller andre steder og data, som eleverne selv producerer. Det vil desuden være oplagt at inddrage diskussion og behandling af store datamængder ("big data") som et led i arbejdet med elevernes digitale dannelse. Autentiske data skal som andre forelagte data behandles i et matematisk værktøjsprogram. Inddragelse af autentiske data bør, hvor det er muligt, løbende foregå i behandlingen af kernestoffet. Eleverne forventes at kunne importere og bearbejde store datamængder i deres matematiske værktøjsprogram.

2.3.4 Simulering af nulhypotese

Eleverne forventes selvstændigt at kunne gennemføre simulering af en nulhypotese i deres matematiske værktøjsprogram. I kernestoffet indgår binomialtest, og det vil være naturligt at inddrage simulering af nulhypoteser i relation hertil.

2.3.5 Diskret matematik

Den klassiske matematik er domineret af analysen, hvor de variable løber kontinuert gennem delmængder af de reelle tal. I moderne matematik spiller diskrete modeller, hvor de variable eksempelvis løber gennem delmængder af de naturlige tal, en stigende rolle, fordi diskrete metoder i form af algoritmer er essentielle i computerens bearbejdning af information.

Diskret matematik dækker således over teori knyttet til objekter, der varierer trinvist og ikke kontinuert. Emnerne er utallige, og der er ikke præcise krav til omfang eller antal. Man kan vælge at fremhæve og uddybe de diskrete metoder, der indgår i kernestoffet, fx i behandlingen af kombinatorik og binomialfordelingen, annuitetsregning eller polynomier, eller man kan vælge at give eleverne indsigt i nye områder af matematikken som fx logik, talteori, grafteori, følger og rækker eller lineær algebra. Hvad der vælges, må afhænge af, om man ønsker at styrke modellering, algoritmisk tænkning, forståelse af matematikkens natur eller matematikhistorie.

Ved metoder fra diskret matematik forstås algoritmer knyttet til diskrete emner. En algoritme er generelt set et sæt regler, der bruges til at løse et problem i et bestemt antal trin, dvs. et endeligt antal beregningstrin eller argumentationstrin, der skal udføres for at nå frem til et resultat. Det kan fx være numeriske metoder eller matematiske beviser. På emu.dk ligger der eksempler på undervisningsaktiviteter i diskrete emner som spilteori, tællemetoder og grafteori.

2.3.6 Annuiteter

Som en udvidelse af arbejdet med renteformlen skal eleverne opnå viden om annuitetsregning, og det vil være oplagt at inddrage både trinvise beregninger i regneark samt de tilhørende formler. Emnet behandles gennem anvendelsesorienterede eksempler, fx "kviklån", der bygger på autentiske data.

2.3.7 Matematikhistorie

Eleverne skal præsenteres for nedslag i den matematikhistoriske udvikling, der perspektiverer et eller flere emner i kernestof eller supplerende stof. Det kan fx foregå ved en motiverende historisk introduktion til et eller flere emner eller ved løbende nedslag og uddybende behandling, der perspektiverer enkeltdele og kæder gymnasiematematikken sammen med historiske resultater. Matematikhistoriske forløb i samspil med faget historie, som alle elever møder i deres gymnasieforløb, vil desuden kunne underbygge elevernes fremtidige arbejde med studieretningsprojektet. Der bør om muligt, specielt i sammenhængende forløb, indgå matematikhistoriske kilder, som lægger op til et undersøgende arbejde, der udfordrer og udvikler elevernes nysgerrighed med henblik på matematikkens udvikling, form og brug.

2.3.8 Videnskabsteori og matematiske metoder

Der skal ikke alene undervises *i* matematik, men også *om* matematik. Når faget indgår i et samarbejde med andre fag, så skal eleverne kunne inddrage og anvende relevante matematiske metoder, redegøre for disse i et sprog, som man også uden for faget kan forstå, samt forholde sig til fagets muligheder og begrænsninger i arbejdet med en konkret problemstilling.

Elevernes arbejde med matematikkens metoder og matematikkens videnskabsteori skal ske løbende i det samlede gymnasieforløb, dvs. på både C-, B- og A-niveau, hvor emner og fagligt stof er afpasset det faglige indhold og det faglige abstraktionsniveau. Eleverne skal gennem arbejdet med kernestoffet og eventuelt i selvstændige forløb støde på og arbejde med både induktive og deduktive metoder, idet forskellen belyses og fremhæves ved henvisninger til tidligere behandlet stof. De skal opnå et indblik i matematikken som en aksiomatisk-deduktiv videnskab, idet de arbejder med betydningen af definitioner, aksiomer, sætninger og beviser.

Matematikkens videnskabsteori og metoder kan med fordel behandles i samarbejde med andre fag, hvor eleverne fx får øjnene op for forskellen mellem matematikkens metoder og de naturvidenskabelige induktive, empiribaserede metoder.

2.4 Omfang

Det forventede omfang af fagligt stof er ikke opgivet i normalsider. Matematiske tekster (i bred forstand) indeholder som oftest større mængder af symbolsprog. For traditionelt lærebogsmateriale opgøres omfanget af læst stof ud fra det aktuelle antal sider i materialet (en side er en side). Omfanget af det faglige stof formidlet igennem andre medier opgøres på fornuftig vis under hensyntagen til sværhedsgraden af stoffet, og hvilket medie der er tale om.

Det samlede omfang af fagligt stof anføres i beskrivelsen af den gennemførte undervisning (undervisningsbeskrivelsen). Omfanget angives med en sådan detaljeringsgrad, så det fremgår, hvorledes det faglige stof har været vægtet i det samlede undervisningsforløb, fx ved angivelse af et skønsmæssigt sidetal eller en procentvis fordeling af stoffet.

3 Tilrettelæggelse

Tilrettelæggelse af undervisningen kan foregå på mange måder, og nedenstående repræsenterer en række anbefalinger til, hvilke elementer der bør overvejes i forberedelsen af de enkelte lektioner og sammenhængende forløb.

3.1 Didaktiske principper

Undervisningen tilrettelægges med variation i forhold til arbejdsformer og undervisningsformer. Et modul kan eksempelvis begynde med et eksperiment, hvor eleverne prøver sig frem og selv opdager matematiske strukturer og sammenhænge. Andre gange præsenteres stof og metoder af læreren, hvorefter eleverne arbejder med dette, fx i form af opgaveregning. Nogle forløb og moduler tilrettelægges, sådan at hele klassen har en dialog om et emne, mens andre tilrettelægges, så elever i par eller i små grupper arbejder mere selvstændigt med et givent stof. I alle tilfælde vil omdrejningspunktet være elevernes selvstændige arbejde med stoffet.

For at udvikle den enkelte elevs matematikfaglige potentiale må det medtænkes i planlægningen af undervisningen, at både den fagligt stærke og den fagligt svage elev får et fagligt udbytte af undervisningen. Hele klassen behøver derfor ikke altid arbejde med det samme stof, og de behøver ikke altid arbejde med stoffet på samme måde. Et grundlæggende princip for undervisningstilrettelæggelse bør være: "Ikke alle skal lære alt", men alle skal lære så meget, som de kan. Eleverne kommer med forskellige forudsætninger, og disse kan udjævnes, men der er også elever, som bare er bedre til matematik end andre elever (som i sportens verden). Derfor er det helt centrale didaktiske princip især på B-niveau: Undervisningsdifferentiering, hvor de elever, der vælger at opgradere, skal have mulighed for at arbejde med stoffet på et abstraktionsniveau, der forbereder dem til A-niveauet. Disse elever vil typisk arbejde mere teoretisk i dybden med stoffet end resten af klassen, fx kan de arbejde med beviser for sætninger, som de andre elever blot arbejder med at besvare opgaver ud fra.

Undervisningen tilrettelægges, så eleverne møder og bearbejder problemstillinger, der udspringer fra faget selv såvel som fra omverdenen. Det er motiverende for de fleste elever at opdage, at matematikken kan bringes i anvendelse, men det løfter også abstraktionsniveauet fra blot at kunne finde og indsætte i de rette formler til at skulle oversætte mellem repræsentationsformerne. Derfor er det helt centralt at have blik for og udpege over for eleverne, hvor de forskellige dele af det faglige stof bringes i spil i anvendelsesorienterede kontekster, så de lærer at afkode det matematiske problem i en kontekst, løse problemet og forklare, hvad løsningen til det matematiske problem betyder for konteksten.

Ved at formulere faglige mål og delmål for hvert større forløb bliver det tydeligt i en fælles forståelse for både lærer og elever, hvilke forventninger der er til indhold, form og elevernes indsats, så eleverne har de bedste forudsætninger for at tage aktiv del i de aktiviteter, der igangsættes i undervisningen. Det kan være nødvendigt at arbejde med særlige delmål for grupper af elever, som enten er fagligt stærke eller fagligt udfordrede. Uanset hvilken kategori en elev tilhører, så er succesoplevelser altafgørende for motivationen til fortsat at lære og yde den vedholdende indsats, der kræves for at lære et svært fag som matematik. Tydelige mål og delmål er desuden afgørende for en effektiv evaluering, som både læreren og den enkelte elev kan bruge fremadrettet.

3.1.1 Overgang og grundforløb

Grundforløbet er et kort, afgrænset forløb, hvor eleverne skal introduceres til gymnasial matematik, som er en helt ny verden for mange. De faglige krav er ikke kun højere, men de opleves også som meget anderledes. Eleverne går fra hovedsageligt at skulle kunne regne med en formel og forklare en løsningsprocedure til at skulle kunne beskrive indholdet af en formel og argumentere for, hvordan formlen er fremkommet, og hvorfor en bestemt løsningsprocedure foretrækkes frem for en anden.

Eleverne skal gennem behandling af det faglige emne lineære modeller og lineære funktioner dels inspireres til at gå på opdagelse og stille spørgsmål, dels møde passende krav til symbolbehandling og præcision i matematisk sprogbrug. Der skal både være plads til simple ræsonnementer i en teoretisk behandling af stofområdet og til modellering og problembehandling, der illustrerer stofområdets anvendelsesmuligheder blandt andet i samspil med naturvidenskabeligt grundforløb.

I grundforløbet skal eleverne introduceres til gymnasiets tre forskellige matematikniveauer, C-, B- og A-niveau. Eleverne skal derfor igennem tilrettelæggelsen af undervisningen i grundforløbet opnå indsigt i forskellen på de tre niveauer, så de kan vælge studieretning og dermed matematikniveau på et oplyst grundlag.

Grundforløbet bør tilrettelægges, så eleverne fra dag ét møder matematik som et levende og spændende fag og ikke løbes over ende af krav om at kunne mestre diverse basale færdigheder.

Da eleverne efter grundforløbet fortsætter i studieretningsklasser, bør der på den enkelte skole behandles en ensartet kerne af stof for alle matematikhold i grundforløbet, så alle elever så vidt muligt har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet. Der er ikke faste regler for, hvor mange timer der skal afsættes til matematikundervisning i grundforløbet. Derfor skal matematikfaggruppen lokalt på den enkelte skole blive enige om det konkrete faglige indhold, herunder eventuel inddragelse af yderligere kernestof. Det vil fx være demotiverende for elever at skulle igennem det samme stof to gange.

Matematikfaggruppen bør have klare aftaler for elevernes brug af matematiske værktøjsprogrammer i grundforløbet og på hvert af de tre niveauer C-, B- og A-niveau, så eleverne også i den henseende har samme udgangspunkt, når de starter på studieretningsforløbet.

Eleverne kommer normalt fra folkeskolen med ret forskellige matematikfaglige forudsætninger, og de er blandet på hold på tværs af kommende studieretninger og dermed forskellig interesse for faget. Det er en væsentlig pædagogisk opgave i grundforløbet, at alle elever oplever et spændende fag, som virker overkommeligt for dem at arbejde med i det videre gymnasieforløb. Arbejdsformerne skal varieres, og der bør indgå forskelligartede skriftlige og mundtlige produkter – og ikke være et ensidigt fokus på grundforløbets afsluttende screening.

Som lærer skal man være opmærksom på de udfordringer, der ofte beskrives ved overgangen fra folkeskolens matematikundervisning til gymnasiets matematikundervisning. Det handler blandt andet om tempoet, hvormed der indføres nye begreber, at der generelt er et højere abstraktionsniveau, og at der stilles større krav til præcision, fx i forbindelse med simpel symbolmanipulation og algebraisk løsning af simple førstegradsligninger samt krav til systematik i brugen af matematiske værktøjsprogrammer.

Eleverne skal i løbet af grundforløbet så vidt muligt udvikle gode studievaner, herunder også gode lektielæsningsvaner, dvs. eleverne skal lære, hvordan man forbereder sig bedst muligt til matematikundervisningen i gymnasiet. Læreren må derfor sørge for at give eleverne meningsfulde og overkommelige lektier for og følge op på disse i hver lektion. Ligesom der også i grundforløbet bør indtænkes fagligt differentierede aktiviteter for forskellige elevgrupper, så behøver lektierne ikke være de samme for alle elever. Det er en stor hjælp for mange elever, at der i lektien er formuleret konkrete fokuspunkter eller spørgsmål til en tekst eller en opgave, som eleverne arbejder med derhjemme, så formålet med lektien er klart for den enkelte elev. Eleverne skal opleve, at det er betydningsfuldt for deres matematiklæring og for undervisningens tilrettelæggelse, at de møder velforberedte til timerne. Tilsvarende er det særdeles vigtigt at gøre eleverne opmærksomme på, at de meget let går glip af noget og hurtigt kommer bagud i et fag som matematik, der i høj grad opbygges kumulativt, hvis ikke de møder forberedt frem og deltager aktivt i undervisningen.

Screeningen skal ligge i den afsluttende del af grundforløbet, så både elever og lærere kan anvende resultatet heraf som led i elevernes endelige beslutning om valg af studieretning, herunder matematikniveau. Screeningen varer to timer og skal anvendes til at få et indblik i, om den enkelte elev er i stand til at anvende det faglige stof, som er behandlet i grundforløbet, til at løse forskellige typer af opgaver knyttet hertil. Eleverne skal under hele prøven have adgang til alle de sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger (herunder i-bøger), egne noter og matematisk værktøjsprogram. Eneste begrænsning er kommunikation med andre. Det er ikke et krav, at screeningen bedømmes med en karakter. En formativ tilbagemelding, knyttet til elevens nødvendige indsats set i forhold til kommende valg af matematikniveau, vil være mere konstruktiv for elevens valgproces.

3.1.2 Problembehandling og modellering

Opgaveløsning er en central del af matematikfaget og skal tilrettelægges med det formål at konsolidere færdigheder og udvikle en dybere forståelse af begreber. At løse opgaver med et ensidigt fokus på at kunne løse fagets skriftlige eksamensopgaver giver eleverne store problemer med at kunne håndtere matematiske problemstillinger, som ikke er 'standardopgavetyper', fordi de snarere lærer at *genkende* en opgavetype end at *forstå*, hvad en forelagt opgave egentlig går ud på. At kunne afkode, hvad et matematisk problem dækker over, og dernæst kunne vælge en hensigtsmæssig løsningsstrategi kræver matematisk indsigt, der rækker udover almindelig mønstergenkendelse.

Eksamensopgaverne (også fra hf eller andre skoleformer) kan med fordel naturligt indgå på mange måder i undervisningen. Hvornår og hvordan afhænger af, hvor i det samlede forløb holdet befinder sig. Sædvanligvis kan det være hensigtsmæssigt at omskrive opgaverne og lette det faglige niveau ved at tilføje delspørgsmål, ved at stille krav om en bestemt løsningsmetode, så de passer til det relevante taksonomiske niveau, eller omvendt ved at omskrive og udvide dem, så de bliver mere åbne og mere omfattende til brug for et projektforløb eller forberedelse til gruppedelprøven.

Problembehandling og matematisk modellering skal tilrettelægges, så eleverne selvstændigt lærer at formulere og besvare matematiske spørgsmål (og opgaver) i en kontekst uden for matematikken selv. Formuleringerne kan være målet i sig selv, eller spørgsmålene kan fx besvares (løses) af andre elever. Arbejdet med at formulere spørgsmål, der kan besvares med matematik, forbereder eleverne på arbejdet med problemformulering i SRP med matematik på alle niveauer.

Eleverne skal ikke kun arbejde med matematisk modellering og problemløsning i forbindelse med kernestofemnerne, men også på tværs af emnerne (svarende til 'broer' imellem 'søjlerne'). Eleverne skal arbejde med alle faser i modelleringsprocessen, herunder matematiseringsfasen, hvor netop det at stille relevante spørgsmål og oversætte disse til et matematisk problem, der kan løses, er centralt.

3.1.3 Undersøgelsesbaserede aktiviteter

Matematik fremstilles ofte deduktivt, men udvikles induktivt, og dette skal elever opleve gennem en undersøgende behandling af matematiske begreber, emner og problemstillinger, hvor eleverne prøver sig frem og derigennem opnår ny viden. Der findes fx flere udgivelser fra udviklingsprojekter i Matematiklærerforeningens regi, der beskriver eksempler herpå, herunder MERIA-projektet. Desuden er der til de gængse matematiske værktøjsprogrammer udviklet materiale, der kan findes på de respektive programmers undervisningsrelaterede websites.

Matematiske eksperimenter udgør et væsentligt grundlæg for udvikling af elevernes ræsonnementskompetence. Både tilrettelæggelse og udførelse af eksperimenterende undersøgelser af fx et begreb eller et problem kræver kæder af matematiske argumenter, ligesom konklusioner draget på baggrund af eksperimenterende undersøgelse af fx en matematisk sætning kan være med til at udvikle elevernes forståelse af, hvornår et argument kan betragtes som et matematisk bevis.

Ikke alle forløb skal tilrettelægges med en eksperimentel tilgang. Indimellem vælges en traditionel deduktiv behandling af en matematisk teori, hvorved eleverne skal opnå en forståelse af matematikkens (aksiomatisk) deduktive opbygning. Eleverne skal arbejde selvstændigt med stoffet i en progression frem mod at kunne gennemføre en individuel præsentation af et matematisk ræsonnement.

3.1.4 Færdigheder

Basale matematiske færdigheder tager lang tid at opnå, og de kan smuldre eller helt forsvinde, hvis de ikke holdes ved lige. De er dynamiske, og de kan kun konsolideres, hvis de fremhæves og dyrkes i andre sammenhænge end der, hvor de er bygget op. Det kræver tid, før en basal matematisk færdighed modnes og bliver en robust og aktiv del af en elevs matematikberedskab. Det er derfor helt centralt, at man i undervisningen vender tilbage til de basale matematiske færdigheder mange gange i løbet af et gymnasieforløb. Erfaringer har gang på gang vist, at et intensivt kursus i begyndelsen af skoleåret (fx i grundforløbet) kun har yderst ringe effekt.

Læreren må indtænke en for eleverne meningsfuld gentagen træning af de basale færdigheder, netop når det er relevant, dvs. når behovet naturligt opstår i de faglige aktiviteter. Et matematisk begreb eller en matematisk procedure knyttet til en bestemt matematisk færdighed eller kompetence giver sjældent mening første gang, eleven møder det/den. Derfor kan eleverne på det stade i læreprocessen med fordel benytte diverse huskeregler. Men efterhånden som eleverne anvender begrebet eller proceduren i forskellige situationer, vil de kunne tilskrive indholdet mening og derved lære sig de relevante begreber og procedurer.

Man kan betragte de kognitive strukturer, som den enkelte elev lægger i et begreb, som en slags 'begrebsbillede', der omfatter de 'mentale billeder', egenskaber og processer, som eleven forbinder med begrebet. Elevernes begrebsbilleder er ikke nødvendigvis sammenhængende og konsistente, *mens* de udvikles. Man kan forestille sig, at der i én situation 'vækkes' én del af en elevs begrebsbilleder, og i en anden situation 'vækkes' en anden del af elevens begrebsbilleder. Det er kun, når modstridende begrebsbilleder vækkes på samme tid, at der kan opstå en kognitiv konflikt, som rummer et læringspotentiale for at udvikle 'billedsamlingen' yderligere. Derfor er 'at vide, hvad der ikke gælder', et centralt element i udviklingen af elevernes matematiklæring.

3.1.5 Formelsamling

Som element i arbejde med de af mindstekravene, der kan henføres til færdigheder, bør formelsamlingen være et centralt hjælpemiddel. Hvis formelsamlingen skal repræsentere en reel hjælp for den enkelte elev, så skal eleven lære at slå op i den og bruge den på de enkelte trin frem mod en løsning af et givet problem. De af de grundlæggende matematiske færdigheder, som også er mindstekrav, skal fremhæves i undervisningen, så det bliver tydeligt for den enkelte elev, hvad der er mindstekrav, fx ved at bede eleverne om at angive, hvilke formler de har brugt til at løse bestemte opgaver.

3.1.6 Spiralprincippet

Kernestoffet og det supplerende stof skal tilrettelægges efter 'spiralprincippet' frem mod det højeste taksonomiske niveau, således at hver af de tre 'søjler' (funktioner, geometri og statistik) er i spil flere gange henover elevens samlede matematikgymnasieforløb. Eksempelvis bør man ikke færdiggøre vektorregningen i en samlet klump, men vende tilbage til den én eller flere gange – hver gang på et højere taksonomisk niveau og med nye faglige elementer.

For at tydeliggøre den faglige progression for eleverne formuleres i forbindelse med hvert forløb opsamlende skriftlige opgaver og mundtlige spørgsmål afpasset elevernes niveau og den faktiske behandling af stoffet. Disse skriftlige opgaver og mundtlige spørgsmål udvikles således undervejs i elevernes samlede gymnasieforløb, når de bevæger sig op gennem emnerne efter 'spiralprincippet'. Mindstekravene tydeliggøres ligeledes i forbindelse med hvert forløb, så det er tydeligt for eleverne, hvad der kræves for at kunne begå sig på det aktuelle niveau i hver af 'søjlerne'. På B -niveau tydeliggøres mindstekravene særligt i form af opgaver, der stilles ved den skriftlige prøve. Med tilrettelæggelse af undervisningen og behandling af stoffet efter 'spiralprincippet' kan man sjældent følge én lærebog fra ende til anden, da traditionelt opbyggede lærebøger som oftest samler større emner i afsluttede kapitler. Denne traditionelle opbygning af lærebøgerne repræsenterer dog efter endt forløb til C-, B- eller A-niveau en fornuftig organisering af stoffet, som kan skabe overblik over et område for eleverne, når de skal repetere det samlede stof i forbindelse med eksamensforberedelse hen mod afslutningen af det aktuelle niveau.

3.1.7 'Spor'

Nogle kernestofemner er tænkt som 'spor' til det overliggende matematikniveau, dvs. de skal ikke behandles til bunds på det pågældende niveau. Ved behandling af 'spor' udnyttes muligheden for at introducere og behandle matematiske begreber fra et højere niveau med brug af matematiske værktøjsprogrammer.

Bemærk, at emner beskrevet som 'spor' ikke vil være genstand for afprøvning ved den skriftlige prøve på B-niveau.

3.1.8 'Broer'

'Broerne', der skaber forbindelse mellem 'søjlerne', er vigtige for elevernes læring. I kraft af 'broerne' oplever de matematik som et sammenhængende fag, hvor begreber lært i ét emne understøtter begrebsudviklingen i et andet emne. Med en kombination af begreber løses nye typer af problemer, eller kendte problemer løses på nye måder. En oplagt 'bro' opstår, når statistik supplerer funktionsteorien ved at bidrage til vurdering af modeller gennem usikkerhedsbetragtninger, eller når begreber fra differentialregningen anvendes til at løse geometriske optimeringsproblemer på alle niveauer.

Arbejdet med 'broer' skal være med til at udvikle elevernes problembehandlingskompetence, således at eleverne i højere grad vil være i stand til få hul på, arbejde med og løse ikke-standardiserede problemer og opgavetyper.

Arbejdet med 'broer' kan som så mange andre forløb, hvor problemstillingerne er mere komplekse og det taksonomiske niveau er relativt højt, med fordel tilrettelægges med fokus på løsningsstrategier ('mange veje til målet'), hvor repræsentationsformer og forskellige metoder (numeriske, grafiske og analytiske) anvendes parallelt, så eleverne får indblik i metodernes styrker og svagheder i problembehandling og derigennem udvikler mere robuste færdigheder og kompetencer.

3.1.9 Matematisk symbolsprog og kommunikation

Kommunikation *i* matematik med brug af symbolsprog både skriftligt og mundtligt skal med en hensigtsmæssig progression trænes igennem elevens samlede matematikforløb. Eleverne kan bl.a. træne dette ved at læse, sammenligne og diskutere matematiske tekster hentet fra forskellige typer af kilder, herunder forskellige lærebøger, som ofte repræsenterer forskellige fremstillinger af et bestemt emne. Tilsvarende kan forberedelsesmaterialerne (fra hf B eller stx A) samt historiske fremstillinger af et bestemt matematisk emne inddrages.

Elevernes selvstændige brug af matematikkens symbolsprog læres dog ikke alene ved at læse andres matematiske tekster. Der bør være særligt fokus på, at eleverne udvikler matematisk symbolsprog i udvalgte mundtlige og skriftlige produkter i såvel tværfaglige som enkeltfaglige forløb.

3.1.10 Matematiske værktøjsprogrammer

Matematiske værktøjsprogrammer skal ikke blot inddrages som middel til at løse matematiske problemer som fx eksamensopgaver. Programmerne skal i høj grad også udnyttes til begrebsindlæring inden for alle emner. I undersøgende tilrettelæggelser med CAS skabes mulighed for elevernes selvstændige udvikling og forståelse af begreber i relation til fx:

- konstanters betydning i forskellige funktionstyper vha. ”skydere”
- simple sammenhænge inden for vektorregning ved visuelle betragtninger af fx koordinatsæt for tværvektor og forbindelsesvektor
- differentialkvotienter for forskellige funktionstyper ved at opsamle tangenthældninger i forskellige punkter og udføre en passende regression
- statistiske fordelinger ved at udføre simuleringer

Når de matematiske værktøjsprogrammer anvendes i opgaveløsning, skal det tydeliggøres for eleverne, hvori mindstekravene i forhold til anvendelse af et matematisk værktøjsprogram består.

3.1.11 Specielt om tilrettelæggelse mhp. træning frem mod de mundtlige prøver

Elevernes modelleringskompetence og problembehandlingskompetence evalueres afslutningsvist særligt ved den mundtlige gruppedelprøve. For at være bekendte med denne arbejdsform skal eleverne løbende igennem undervisningen præsenteres for og have mulighed for at bearbejde eksempler på problemstillinger, der kan optræde ved gruppedelprøven, fx gennem selvstændigt projektarbejde i grupper (jf. afsnit 3.2), hvor problemstillingerne er tilpasset et emnes aktuelle taksonomiske niveau på det tidspunkt, hvorpå stoffet er bearbejdet. Derfor skal undervisningen tilrettelægges, så eleverne bliver i stand til at arbejde undersøgende og udforskende også med mere åbne spørgsmål. Det centrale er, at eleverne opnår indsigt i, hvordan en problemstilling knyttet til et kendt stof er formuleret, og hvilke krav der stilles til bearbejdningen af denne, samt opnår metodiske erfaringer i forhold til arbejdet med problemstillinger.

Eleverne skal løbende igennem undervisningen B-niveau præsenteres for og have mulighed for at bearbejde eksempler på formulering af spørgsmål, der kan optræde ved den individuelle mundtlige prøve, fx gennem individuelle præsentationer i grupper, hvor spørgsmålene er tilpasset emnets aktuelle taksonomiske niveau på det tidspunkt, hvorpå stoffet er bearbejdet. Fx er måden, hvorpå man vil formulere et spørgsmål om funktioner (‘funktionssøjlen’), afhængig af, hvor i det samlede tidsmæssige forløb stoffet er behandlet. Det centrale er, at eleverne opnår indsigt i, hvordan et spørgsmål knyttet til kendt stof er formuleret, og hvilke krav der stilles til en præsentation af et svar herpå og en samtale herom.

Om krav til formulering af de spørgsmål, der benyttes ved den mundtlige prøve, se afsnit 4.2 nedenfor.

3.2 Arbejdsformer

Da elever lærer på forskellige måder, er en forudsætning for, at flest muligt lærer mest muligt, at arbejdsformerne er varierede og elevaktiverende. Arbejdsformerne kan varieres med henblik på elevernes muligheder for forståelsesafprøvning og feedback samt overvejelser om hensigtsmæssig inddragelse af matematiske værktøjsprogrammer. Arbejder eleverne sammen i mindre grupper, er det let for de fleste elever at stille opklarende spørgsmål og selvstændigt derudfra danne deres egen begrebsforståelse, mens det kan være grænseoverskridende for mange elever at stille den samme type spørgsmål i en klasseundervisningssituation. Derfor bør klasseundervisning i form af foredrag og læreroplæg, hvor læreren formidler et fagligt stof, altid jævnligt afbrydes af korte sekvenser med fx parvise diskussioner og opfølgninger på det, der netop er blevet præsenteret/gennemgået, eller spørgsmål, der har karakter af at forudsige, hvad der sker i de(t) næste trin.

3.2.1 Undersøgelsesbaserede arbejdsformer

I nogle forløb, timer og sekvenser indgår undersøgelsesbaserede arbejdsformer, hvor eleverne selvstændigt i par eller mindre grupper undersøger matematiske begreber, sammenhænge og strukturer. I centrum for valg af arbejdsform skal altid stå elevernes mulighed for at bidrage aktivt til kommunikationen om og arbejdet med at lære nye begreber og metoder. Arbejdsformerne skal tilpasses elevernes differentierede faglige niveau, så det faglige løft for forskellige elevgrupper bliver størst muligt, hvilket kan betyde, at arbejdsformen for de særligt udfordrede elever involverer mere lærervejledning.

3.2.2 Progression i det individuelle arbejde

Elevernes evne til individuelt at arbejde med matematiske problemstillinger skal udvikles, ved at de gradvist får mere og mere ansvar for deres selvstændige arbejde med stoffet hen over det samlede matematikforløb. I begyndelsen af forløbet gives grundig stilladsering til det stof, der skal bearbejdes, og de opgaver, der skal løses derhjemme, for på længere sigt at forpligte eleverne selv på at opnå den faglige erkendelse knyttet til det aktuelle stof. Dette kan både være i forbindelse med elevernes skriftlige produkter og deres daglige lektier. Det anbefales derfor også, at tiden afsat til elevernes individuelle skriftlige arbejde i faget fordeles progressivt frem mod afslutningen af niveauet.

3.2.3 Matematisk sprogbrug

Eleverne skal gradvist indføres i den matematiske sprogbrug, notation og krav til sproglig præcision. Det kan ikke kun læres ved at læse andres matematiske tekster, men skal læres gennem egenproduktion. Dvs. eleverne skal selvstændigt formulere sig skriftligt, så deres matematiske tankegang og sproglige præcision skærpes. Matematik er grundlæggende et skriftligt fag, forstået på den måde at næsten enhver mundtlig aktivitet vil være suppleret af noget skriftligt. Eleverne lærer derfor ikke matematik uden at skrive. Man kan med fordel præsentere eleverne for forskellige fremstillinger af fx matematisk teori hentet fra forskellige lærebøger eller korte matematiske tekster fra artikler el.lign., så de opdager, at symbolsproget kan være forskelligt, på trods af at indholdet er det samme. Netop dette vil være en stor hjælp i arbejdet med studieretningsprojektet (SRP), hvor matematik kan indgå på alle niveauer.

Eleverne møder mange nye ord i deres matematikundervisning, og de lærer først ordene at kende og erkender først betydningen af dem, når de prøver at anvende ordene i en eller anden form for matematisk kommunikation – skriftligt eller mundtligt. Den mundtlige dimension kan trænes ved fx at læse højt af matematiske tekster, præsentere et matematisk ræsonnement og diskutere problembehandlingsstrategier.

3.2.4 Fremmedsprogede tekster

Mange elever vil i forbindelse med informationssøgning i relation til forskellige matematiske arbejder støde på engelske tekster, herunder fx i forbindelse med SRP, ligesom de på deres efterfølgende videre uddannelser ofte vil møde matematiske tekster på engelsk eller andre fremmedsprog. Derfor skal de møde sådanne fremmedsprogede (fortrinsvist engelske) matematiske tekster allerede i gymnasiet, så de får et vist indblik i betegnelsen af forskellige fagbegreber.

3.2.5 Styrede læringsforløb

Udvalgte forløb tilrettelægges som korte eller længerevarende styrede læringsforløb, hvor eleverne selvstændigt i par eller små grupper arbejder med et stof eller et tema, som sædvanligvis er det samme for alle elever, men med taksonomiske forskelle, så fagligt udfordrede elever ikke skal gennemarbejde stoffet på samme måde som de fagligt stærke elever. Oplægget til grupperne og den vejledning, eleverne får undervejs, kan i disse forløb med fordel differentieres i forhold til gruppernes faglige niveau. Eleverne skal i disse forløb på baggrund af et gennemarbejdet skriftligt (i bred forstand) forlæg fra læreren arbejde selvstændigt med stoffet i deres eget tempo og med læreren som vejleder gennem hele forløbet (fx kan dele af forberedelsesmaterialerne til hf B og stx A inddrages). Undervejs kan eleverne fx producere tekster, løse opgaver og lave korte videoer, som de samler i en portfolio som afslutning på forløbet. Det afsluttende produkt rettes ikke nødvendigvis af læreren. Opsamlinger over sådanne længere forløb kan være meget omfattende, og der vil derfor i højere grad være tale om, at enkeltdele rettes eller kommenteres undervejs i selve forløbet. Netop sådanne forløb vil kunne forberede eleverne på den mundtlige prøves individuelle del.

3.2.6 Projektarbejdsformen

Udvalgte forløb tilrettelægges projektorienteret, hvor eleverne i forløbet undersøger forskellige problemstillinger, som ikke nødvendigvis er ens for alle elever. Her udnyttes fx muligheden for, at udfordrede elever får en succesoplevelse i arbejdet med et for dem overkommeligt stof, som ligger på et passende lavt taksonomisk niveau. I sådanne forløb er det oplagt, at eleverne arbejder med problemstillinger, der minder om dem, der anvendes ved den mundtlige eksamens gruppedelprøve. Projektoplæggene formuleres, så eleverne får mulighed for at arbejde undersøgende, fx kan de formuleres mere eller mindre lukkede afhængigt af elevernes aktuelle niveau. De kan gøres mere åbne, jo længere eleverne er nået i deres matematikfaglige progression på vej mod slutniveauet. Projektforløbet afsluttes, ved at eleverne dokumenterer deres arbejde med fx en projektrapport.

3.3 It

Matematik skal på lige fod med andre fag bidrage til elevernes digitale dannelse. I matematik er det oplagt at beskæftige sig med at genkende, bearbejde, forstå og opbygge algoritmer. Som nævnt under diskret matematik er en algoritme generelt set et sæt regler, der bruges til at løse et problem i et endeligt antal beregningstrin eller argumentationstrin, der skal udføres for at nå frem til et resultat, som det fx er tilfældet med numeriske metoder eller udvalgte matematiske beviser.

Matematikfaget har i kraft af de matematiske værktøjsprogrammer en digital platform, som kan anvendes erkendelsesmæssigt, fx i eksperimenterende undersøgelser af sammenhænge og problemstillinger. Det er en fordel for både elever og lærere, hvis skolen formulerer en fælles politik mht. anskaffelse og anvendelse af matematiske værktøjsprogrammer. Specielt af hensyn til elever, der ønsker at opgradere fra et matematikniveau til det næste, bør der træffes velovervejede fælles beslutninger, og det vil samtidig styrke mulighederne for fagligt samarbejde på tværs af klasser og hold. Læreplanens betoning af repræsentationsformerne og skift imellem disse, eksperimentelle aktiviteter og simuleringer peger på, at der bør være adgang til værktøjer, der kan håndtere eksperimentel (dynamisk) geometri og eksperimentel (dynamisk) statistik.

De matematiske værktøjsprogrammers dynamiske muligheder skal især udnyttes til, at eleverne selvstændigt går på opdagelse og eksperimenterer med begreber, repræsentationsformer, modellering og problembehandling, hvor de alene eller sammen med andre elever formulerer konklusioner på undersøgelserne. Eleverne skal derfor hurtigst muligt blive fortrolige med brug af de dynamiske muligheder, programmet tilbyder, fx at styre parametre med en skyder, trække i objekter, anvende spor og dataopsamling, samt at fremstille simple simuleringer, fx i statistik, hvor simulering af terningekast er en god introduktion til faciliteter til håndtering af tilfældige udtræk (random-kommandoer). Elevernes fortrolighed med programmet vil efterhånden øges, og det vil blive et helt naturligt redskab, som de vil benytte til at formulere og undersøge påstande og belæg herfor, som senere kan påvises gennem et formelt matematisk ræsonnement. Det tager tid at lære at bruge et bestemt program. Derfor bør man inddrage de matematiske værktøjsprogrammer, som skolen har valgt at arbejde med, så tidligt som muligt og som et naturligt redskab på linje med papir, blyant, bøger etc. Herudover kan man i undervisningen med fordel udnytte de didaktiske muligheder, der ligger i at inddrage andre digitale redskaber som fx videooptagere (herunder screencast), online quizzer og præsentationsprogrammer.

I grundforløbet skal eleverne blandt andet arbejde med de fire forskellige repræsentationsformer i relation til lineære funktioner og modeller. Introduktionen hertil foregår læringsmæssigt mest effektivt med inddragelse af et matematisk værktøjsprogram, hvor der er let adgang til at skifte mellem repræsentationsformerne, fordi netop dette vil styrke elevernes forståelse af sammenhængen mellem punkter, forskrifter og tilhørende grafisk fremstilling. Ligeledes bør eleverne også allerede i grundforløbet arbejde med at formulere egne hypoteser fremkommet ved eksperimenter i værktøjsprogrammet, fx ved at inddrage parametre i lineære funktionsudtryk.

De matematiske værktøjsprogrammers faciliteter bør altid introduceres i forbindelse med behandling af matematisk stof. Relevante faciliteter introduceres undervejs i undervisningen, når behovene naturligt opstår i behandlingen af det faglige stof. I langt de fleste undervisningssituationer vil brugen af matematiske værktøjsprogrammer ske i en vekselvirkning med papir og blyant. Erkendelse af nye matematiske begreber og sammenhænge kan som oftest understøttes af skift mellem redskaberne. Derfor bør der i de matematiske aktiviteter, som eleverne sættes i gang med, altid indgå overvejelser om, hvordan redskaberne kan inddrages didaktisk mest hensigtsmæssigt. Afgørelsen af, hvorvidt inddragelsen er hensigtsmæssig, beror på den aktuelle situation, idet både 'black box'- og 'white box'-aktiviteter har deres berettigelse i matematikundervisningen. Værktøjerne kan fx kompensere for endnu ikke opnået indsigt i både matematisk teori og problembehandlingsstrategi, og eleverne bør opnå bevidsthed herom.

I forbindelse med mundtlig og skriftlig formidling spiller elevens digitale kompetencer en større og større rolle. Elevernes kritiske udvælgelse og behandling af relevant information, herunder data, er afgørende for elevernes læring i mange fag. Her kan matematik fx bidrage med opstilling og test af hypoteser samt opstilling og kritisk bearbejdning af både matematiske og statistiske modeller.

3.4 Samspil med andre fag

Flere af læreplanens faglige mål involverer fagligt samspil svarende til 'altanerne' i modellen beskrevet i forordet, herunder følgende:

- "demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
- demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
- demonstrere viden om fagets metoder og identitet".

Tilsvarende omfatter det faglige indhold under supplerende stof oplagte muligheder for fagligt samspil:

- "matematikhistoriske perspektiver på udvalgte emner
- inddragelse og diskussion af videnskabsteoretiske spørgsmål og matematiske metoder".

Når der arbejdes med læreplanens øvrige faglige indhold, opfyldes ovenstående løbende ved inddragelse af historiske aspekter, ved tydeliggørelse af, hvilke matematiske metoder der er i spil, og ved diskussion af matematikdisciplinens kendetegn samt inddragelse af problemstillinger fra andre fagområder etc.

En bredere forståelse for matematikkens metoder samt videnskabsteoretiske spørgsmål opnås dog nok først, når der samarbejdes med andre fag, hvor eleverne inddrager og anvender relevante matematiske metoder, og det bliver tydeligt, hvordan matematik adskiller sig fra andre fag.

I grundforløbet er det særligt naturvidenskabeligt grundforløb, samfundsfag og dansk, der kan indgå i faglige samspil med matematik, mens det i studieretningen er særligt vigtigt at inddrage studieretningens centrale fag i faglige samspil med matematik. I den lokale planlægning af både grundforløb og studieretningsforløb vil der formentlig være forskellige andre fag, der kan være naturlige samarbejdspartnere for matematik. Mindst ét af de tværfaglige forløb, som matematik indgår i, skal være med et centralt fag i studieretningen.

Stofudvælgelsen foretages gennem hele forløbet med øje for holdets muligheder for fagligt samspil. Valg af stof i grundforløbet skal således koordineres med naturvidenskabeligt grundforløb. Den lineære model er omdrejningspunktet for matematikundervisningen, og det er oplagt at arbejde med lineære modeller af naturvidenskabelige sammenhænge, herunder udføre lineær regression på data, som eleverne har produceret i naturvidenskabeligt grundforløb. Lineær regression er et emne, der behandles i både matematik og i naturvidenskabeligt grundforløb, og fagenes tilrettelæggelse bør derfor koordineres, så eleverne oplever sammenhæng. Tilsvarende kan der være andre kernestofemner, som er oplagte at behandle i faglige samarbejder eller parallellæsning. Desuden er det oplagt at inddrage eksempler på anvendelse af matematik hentet fra andre fag, som eleverne kender til og måske selv henleder opmærksomheden på.

For at forberede eleverne på SRP (hvad enten de påtænker at skrive SRP med eller uden matematik) bør der tilrettelægges aktiviteter, der giver eleverne mulighed for at kommunikere både skriftligt og mundtligt om deres tværfaglige arbejde, herunder redegøre for matematiske metoder i et sprog, som man også uden for faget kan forstå.

4 Evaluering

Evaluering er en central del af al undervisningspraksis, således også i matematikundervisningen i gymnasiet. Evaluering skal være et redskab for både lærer og elever til at gøre undervisning og læring mere motiverende og mere effektiv for den enkelte.

4.1 Løbende evaluering

Evaluering af elevernes faglige udbytte sker gennem løbende evaluering og feedback. Den løbende evaluering skal relatere sig til både elevens mundtlige og skriftlige niveau, og progression skal indtænkes i den løbende evaluering. Således bør formativ evaluering være dominerende i begyndelsen af et niveau, hvor der er fokus på, hvordan eleven kan forbedre sit faglige niveau, mens summativ evaluering bør være dominerende i slutningen af niveauet, bl.a. i form af terminsprøve og/eller prøveeksamen.

Evaluering af det mundtlige faglige niveau foregår via feedback på mundtlige præstationer som fx mundtlige fremlæggelser (evt. video) eller mundtlige svar på spørgsmål i undervisningen. I enhver kommunikation med eleverne i klassen i form af klassedialog, gruppearbejde, elevfremlæggelse mv., hvor eleverne kommer med faglige input, giver læreren passende feedback (niveausvarende) med henblik på brug af fagbegreber og faglig præcision med det for øje, at eleverne skal lære et nyt sprog ('at tale matematiksk'). I matematik er der oftest et korrekt svar eller en præcis formulering af et svar, men elevbidrag bør anerkendes og roses, så alle elever får mod på at deltage aktivt. Langt de fleste elevbidrag kan bruges positivt i vejen frem mod det størst mulige matematikfaglige udbytte for hver enkelt elev, og matematikkens præcise sprogbrug bør hele tiden udvikles i elevernes dialog med hinanden og med læreren.

Indimellem tilrettelægges korte individuelle evalueringssamtaler med fokus på elevens potentielle matematikfaglige udviklingsmuligheder. Evalueringssamtalerne, der som oftest er af formativ karakter, kan fx afholdes i forbindelse med prøver, projektarbejde, mundtlige fremlæggelser eller andet selvstændigt arbejde. Selvevaluering kan danne grundlaget for samtalen, idet eleverne ofte har god og realistisk vurdering af deres niveau.

Evaluering af elevernes skriftlige produkter bør gives på en række forskellige måder, afhængigt af hvilken type skriftligt produkt der er tale om, og afhængigt af hvilket formål produktet har. Elevernes skriftlige produkter bør have mange forskellige udtryksformer.

Et skriftligt produkt bør altid have et eksplicit formål, som bør formuleres tydeligt for eleven. Når en lærer giver feedback på et elevprodukt, hvor det primære formål har været at dokumentere elevens faglige niveau, så vil feedbacken ofte være i form af en karakter eller anden summativ bedømmelse (fx ud fra SOLO-taksonomien). Det modsatte vil være tilfældet, når formålet med elevproduktet har været læring af ny matematik. Her er konkrete fremadskuende anvisninger mere effektive.

I forbindelse med skriftligt arbejde bør det tydeliggøres, hvorvidt eleverne skriver for at lære eller for at dokumentere deres viden, og hvad et eventuelt bedømmelsesgrundlag omfatter. Feedback på skriftligt arbejde bør tænkes individuelt og differentieret, så den enkelte elev kan opnå optimal læring. Den formative feedback bør være dominerende i en væsentlig del af undervisningen frem mod det afsluttende niveau.

Meget tyder på, at de fleste elever lærer mest ved at få hjælp i skriveprocessen fremfor at få afsluttende kommentarer på et produkt. Læreren bør derfor som oftest tilrettelægge det skriftlige arbejde, så eleverne får feedback på flere stadier i deres udarbejdelse af et produkt.

Tests kan anvendes som evaluering af både mundtligt og skriftligt niveau. Evaluering af mundtligt niveau kan fx ske gennem en test med åbne forståelsesrelaterede spørgsmål såsom "Hvad forstås ved en tangent til en graf?". Korte tests er uformelle, ofte er eleverne uforberedte, og testene har et formativt sigte. Længerevarende tests på et helt modul vil typisk være forberedte og have et overvejende summativt sigte. Nogle tests vil læreren rette og bedømme, mens andre fx bedømmes af andre elever eller i fællesskab på klassen. Mindstekravsopgaver bør være et element i elevernes selvevaluering, og de kan være et hjælperedskab i lærerens evaluering af eleverne, når de indgår og er markeret i fx tests, skriftlige afleveringsopgaver og projektrapporter.

4.1.1 Mundtlig årsprøve stx B

Af læreplanen fremgår det i afsnit 4.1 om løbende evaluering, at "I det samlede forløb til B-niveau gennemføres efter første år en todelt mundtlig årsprøve, der tilrettelægges som den afsluttende mundtlige prøve jf. pkt. 4.2."

Det betyder, at eleverne efter første år på et 2-årigt forløb til matematik på stx B-niveau skal til en intern mundtlig prøve, som tilrettelægges efter de samme hovedprincipper som den endelige mundtlige prøve på stx B-niveau. Prøveformen skal strukturelt være den samme, men prøven kan indskrænkes i tid, så den svarer til den tilsvarende mundtlige prøve i matematik på stx C-niveau, hvor der afsættes 90 minutter til gruppedelprøven og 20 minutters eksaminationstid (samt 20 minutters forberedelsestid) pr. elev til den individuelle prøve. Desuden kan man opjustere antallet af elever ved gruppedelprøven fra 10 til 14, således at prøven på et sædvanligt hold med 28 elever kan afvikles over to dage som i eksemplet nedenfor.

Det centrale er, at eleverne skal opnå erfaringer med prøvestrukturen (begge delprøver) svarende til den afsluttende mundtlige prøve på stx B-niveau, hvor den enkelte elevs individuelle prøve følger efter elevens gruppedelprøve samme dag.

Strukturplan for årsprøve matematik stx B-niveau				
Prøvetiden for gruppedelprøven = prøvetiden for gruppedelprøven på C-niveau. Prøvetiden for den individuelle delprøve = prøvetiden for den individuelle delprøve på C-niveau				
	Antal elever	**Prøvetid**	**Forberedelsestid**	**Eksaminationstid**
Gruppedelprøve	14	90		
Individuel prøve	14	40 minutter i alt pr. elev	20	20

Tid 20/20	**Gruppedel**	**Forberedelse**	**Eksamination**
8.00-9.30	Alle elever		
9.30-9.40	Pause for alle elever		
9.40-10.00		Elev 1	
10.00-10.20		Elev 2	Elev 1
10.20-10.40		Elev 3	Elev 2
…	…	…	…

For at opnå en rimelig fleksibilitet i den øvrige eksamensafvikling i matematik kan skolen overveje at placere de omtalte mundtlige årsprøver i det tidsrum, hvor der afvikles afsluttende skriftlige prøver for 3.g-eleverne.

4.2 Prøveform

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

4.2.1 Skriftlig prøve

Den skriftlige prøve er centralt stillet og består af to delprøver, hvor delprøve 1 varer 1½ time, og delprøve 2 varer 2½ time. Opgavesættet består i begge delprøver af opgaver stillet inden for kernestoffet. Der kan forekomme bilag til opgavesættet i form af regneark med data, som eksaminanderne forventes at kunne importere til videre bearbejdning i deres eget matematiske værktøjsprogram. På B-niveau vil datasæt, som det er nødvendigt at importere til eksaminandens matematiske værktøjsprogram, alene indeholde heltal. Der kan være tabeller med kommatal i opgaverne til behandling med eksaminandens matematiske værktøjsprogram, men så er talmaterialet så lille, at det kan tastes ind i hånden.

Ved delprøve 1 er eneste tilladte hjælpemiddel den centralt udmeldte formelsamling (ren, dvs. uden tilføjelser) til det aktuelle matematikniveau. Ved delprøve 2 må eksaminanden benytte alle hjælpemidler bortset fra kommunikation med omverdenen), og opgaverne til denne del af prøven vil i forskelligt omfang kræve, at eksaminanden behersker et matematisk værktøjsprogram, der lever op til beskrivelsen i læreplanens afsnit 3.3.

Eksaminanderne får adgang til begge delprøver ved prøvens start, men må først tage yderligere hjælpemidler frem, når tiden til delprøve 1 er udløbet, og alle eksaminander har afleveret deres besvarelser af delprøve 1.

Der kan i særlige tilfælde i enkelte opgaver forekomme emner og problemstillinger, der ikke direkte er beskrevet i kernestoffet, og i sådanne tilfælde vil grundlaget for besvarelsen klart fremgå af opgaveformuleringen. Det kan fx være tilfældet i forbindelse med opgaver, der omhandler matematisk modellering, hvor der kan optræde funktionsudtryk, som eksaminanderne forventes at kunne håndtere med brug af et matematisk værktøjsprogram med CAS.

Hovedparten af opgaverne i det samlede opgavesæt tager udgangspunkt i B-niveauet med inddragelse af elementer fra stofområdets behandling på C-niveau og med en niveausvarende taksonomi. Fx kan inddragelse af en parameter i en given formel være med til at løfte opgaven fra et regneteknisk niveau til et ræsonnerende niveau.

En del af opgaverne i hver af de to delprøver indeholder tydeligt markerede spørgsmål, der er knyttet til afprøvning af mindstekravene på det aktuelle niveau (jf. afsnit 2.2). De markerede mindstekravsspørgsmål dækker tilsammen ca. 125% af det pointtal, der i det forelagte opgavesæt kræves for at opnå karakteren 02. Opgaverne involverer forskellige typer af mindstekravskategorier, der tilsammen beskriver det netop acceptable faglige niveau ved den aktuelle prøve i det forelagte opgavesæt.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'bestem skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Hvis der er krav om en bestemt løsningsmetode, så vil det fremgå af opgaveformuleringen. I delprøve 1 begrænses svarmulighederne naturligt af, at elevernes eneste hjælpemiddel er en formelsamling. I delprøve 2 skelnes kan der i enkelte tilfælde være krav om, at der anvendes en bestemt metode. I delprøve 2 betyder en formulering som fx 'Bestem ved beregning…' eller 'Beregn…', at et korrekt svar skal baseres på en algebraisk beregning med et formeludtryk i kombination med en CAS-kommando (fx 'solve'). Formuleringer som fx 'Bestem ved aflæsning…' eller "Aflæs…" betyder, at et korrekt svar skal baseres på en præcis aflæsning med en dertil indbygget kommando på en grafisk eller en geometrisk repræsentation frembragt i et matematisk værktøjsprogram. Hvis ikke andet angives, har eksaminanden frit valg med hensyn til metode.

Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrker og svagheder ved forskellige løsningsstrategier med og uden matematiske værktøjsprogrammer, herunder symbolske, numeriske og grafiske metoder til løsning af ligninger og andre matematiske problemer. Formålet er, at eleverne bliver i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden ved en given løsningsmetode samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl, fx i de tilfælde, hvor eksaminandens matematiske værktøjsprogram giver et uventet svar.

Det forventes, at eleverne kan opstille modeller ved regression (dog ikke potensregression) og kommentere vækstegenskaber i lineær og eksponentiel vækst, men det forventes ikke, at de kan begrunde én bestemt model frem for andre.

Ordene 'skitse' og 'tegn' bruges forskelligt. Hvilke detaljer der bør medtages i en 'skitse', afhænger af det konkrete spørgsmål, og det er en del af undervisningen, at eleverne lærer at afkode, hvilke oplysninger der er nødvendige at medtage i den aktuelle situation. Når der bliver bedt om en tegning af en graf, et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation, så forventes eleverne at medtage de karakteristiske egenskaber ved de objekter, der indgår, herunder hensigtsmæssigt grafvindue og størrelsesforhold.

Når der i en opgave omhandlende geometrisk modellering med vektorer indgår, at en geometrisk figur på passende vis skal indlægges (indtegnes) i et koordinatsystem, så skal de mål, der er oplyst, anvendes med en sådan præcision, at koordinatsættene til relevante punkter i modellen kan aflæses og anvendes i de videre beregninger i relation til modellen.

Hvis der i en opgave stilles krav om, at en graf for en funktion skal tegnes i et bestemt udsnit af koordinatsystemet, så vil det ønskede grafvindue være angivet som et interval for hver af de variable eller på mængdeproduktform $[-10;10]\times[-10;10]$. Et ekstremumspunkt angives som et punkt i det todimensionale koordinatsystem repræsenteret ved begge koordinater. Førstekoordinaten repræsenterer ekstremumsstedet (maksimums- eller minimumssted), mens andenkoordinaten repræsenterer funktionens ekstremum (maksimum eller minimum).

I særlige tilfælde, hvor det danske komma vil give anledning til misforståelser, som fx ved angivelse af koordinater, vil der optræde decimalpunktum. Tilsvarende hvis en autentisk kilde el.lign. benytter decimalpunktum, så vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen i opgavesættet.

De vejledende opgavesæt, de vejledende enkeltopgaver og de stillede prøvesæt illustrerer dels omfang og opbygning af opgavesæt, dels hvorledes den konkrete udformning af forskellige spørgsmål kan være, men de er ikke definerende for det pågældende niveau. Alle prøvesæt (inkl. de vejledende) findes på Materialeplatformen.

4.2.2 Mundtlig prøve

Den mundtlige prøve er todelt. Delprøve 1 er en gruppeprøve, mens delprøve 2 er en individuel prøve.

Eksaminator sender forud for prøven en fortegnelse over problemstillinger og spørgsmål, der skal anvendes ved hver af de to delprøver, til censor. Desuden skal censor have adgang til en oversigt over samtlige undervisningsforløb, herunder en fortegnelse over produkter knyttet til projektforløb og styrede læringsforløb, der tilsammen udgør eksamensgrundlaget.

I de to delprøver testes hovedsageligt forskellige matematiske kompetencer, og der er derfor ingen krav om, at eksaminanderne ikke må trække samme emne ved hver af de to delprøver.

Delprøve 1: Gruppedelprøve
Gruppedelprøven er en problemorienteret prøve med ukendte problemstillinger, hvor der er fokus på matematikkens anvendelser, herunder eksaminandernes modellerings- og problembehandlingskompetence. De ukendte problemstillinger skal tilsammen dække de faglige mål, kernestoffet og supplerende stof.

Udkast til de endelige problemstillinger sendes til censor senest en uge før prøvens afholdelse. Eksaminator og censor indgår i et samarbejde om, at eventuelle uklarheder i problemstillingerne ryddes af vejen inden prøven. Eksaminator forventes at have gennemregnet samtlige problemstillinger og have overvejet eventuelle opklarende, vejledende eller udfordrende spørgsmål til eleverne. Censor forventes at have sat sig så grundigt ind i problemstillingerne, at han/hun kan indgå i en faglig dialog med eksaminanderne om relevante spørgsmål i relation til den aktuelle problemstilling.

De enkelte problemstillinger skal tage udgangspunkt i de gennemgåede faglige emner og må ikke introducere matematisk teori, der er ny for eleverne. Samtidigt må de konkrete formuleringer af problemstillinger med delspørgsmål ikke på forhånd være kendt af eleverne. Problemstillingerne skal så vidt muligt være ækvivalente med henblik på omfang og sværhedsgrad.

Problemstillingernes overskrift skal angive de(t) overordnede emne(r) (samt evt. en titel, der beskriver et problem, en 'sag' eller en kompetence) for eksaminationen, og de efterfølgende delspørgsmål skal være udformet med progression i sværhedsgrad, således at der indledes med konkrete 'kom-i-gang'-spørgsmål. Her kan SOLO-taksonomien være en god støtte for den konkrete udformning af de enkelte delspørgsmål.

Delspørgsmålene kan fx samles i sammenhængende sekvenser af delspørgsmål ('bølger'), således at der inden for hver sekvens af delspørgsmål er stigende sværhedsgrad. Dette vil give eksaminanderne mulighed for at springe mellem sekvenserne af delspørgsmål uden at bearbejde én sekvens helt i bund først, idet de så kan arbejde med de delspørgsmål inden for hver sekvens, som er af en passende sværhedsgrad for netop dem. Det skal samtidigt gøres klart for eksaminanderne, at ikke alle delspørgsmål behøver blive besvaret. Fx skal en gruppe, der selv finder på matematisk relevante undersøgelser af den udtrukne problemstilling, have plads til at følge op på disse. Der bør være tilstrækkeligt mange delspørgsmål af forskellig karakter (lukkede, halvåbne og åbne spørgsmål) til, at der er stof nok til alle eksaminander inden for den tid, der er til rådighed. Hensigten med spørgsmål i taksonomiske sekvenser er både at sikre, at alle eksaminander får mulighed for at forklare sig på alle taksonomiske niveauer, og at gøre det nemt for eleverne at udvælge stof på et passende taksonomisk niveau, som de vil præsentere, når lærer og censor kommer på besøg.

Delspørgsmålene kan dels formuleres med krav om en bestemt løsningsmetode, dels uden, idet der i vurderingen i disse tilfælde kan lægges vægt på, om eksaminandernes valg af løsningsmetode er hensigtsmæssig i den givne situation. Desuden bør delspørgsmålene inden for hver sekvens formuleres ud fra et progressionsprincip om at gå fra konkrete lukkede delspørgsmål med præcise krav til åbne delspørgsmål, hvor det er overladt til eksaminanderne selv at overveje og finde en egnet løsningstrategi.

Tildeling af problemstillinger til eksaminanderne (grupperne) foregår ved lodtrækning. Der skal være så mange problemstillinger, at sidste gruppe af eksaminander har mindst 4 problemstillinger at trække iblandt (jf. *"Bekendtgørelse om prøver og eksamen i de almene og studieforberedende ungdoms- og voksenuddannelser"*, §12, *stk. 4*). Derudover er der ikke nogen grænse for, hvor få eller hvor mange problemstillinger der skal være, men normalt formuleres til et hold på 28 elever, der er opdelt i par, 17 forskellige problemstillinger. Alle problemstillinger skal være lagt frem ved eksaminationens start, og ingen af problemstillingerne må gå igen. Alle eksaminander skal deltage i hele eksaminationstiden, og alle elever skal sidde i samme lokale, så lærer og censor har overblik over alle grupper.

Eksaminanderne arbejder parvist (undtagelsesvist enkeltvis eller i grupper af tre) med hver deres ukendte problemstilling, som trækkes ved prøvens start. Eksaminationstiden for gruppedelprøven er 120 minutter, og der må højst eksamineres 10 eksaminander samtidigt. Prøven organiseres normalt således, at gruppedelprøven og den individuelle prøve afvikles samme dag for alle 10 eksaminander. Hver eksaminand skal under gruppedelprøven bære tydeligt navneskilt, hvoraf også gruppenummeret fremgår.

Under prøven cirkulerer eksaminator og censor mellem grupperne og samtaler med eksaminanderne om deres konkrete behandling af problemstillingerne, herunder den aktuelt anvendte matematiske teori og de konkret anvendte modellerings- og problembehandlingsstrategier. Det er eksaminandernes eget ansvar at gøre interessante dele af deres arbejde klar til fremvisning, når eksaminator og censor med passende mellemrum aflægger gruppen besøg. Eksaminator og censor stiller opklarende og udfordrende spørgsmål til eksaminanderne både gruppevist og enkeltvist (med navns nævnelse). Det er eksaminators ansvar, at grupperne hele tiden har stof at arbejde med.

Undervejs, efter besøg i de enkelte grupper, noterer eksaminator og censor centrale observationer, som kan anvendes i bedømmelsen af den enkelte eksaminands matematiske præstation med henblik på viden, færdigheder og kompetencer (jf. afsnit 4.3).

På emu.dk findes eksempler på problemstillinger til gruppedelprøven.

I tilfælde af eksamen med kun en elev, som fx sygeeksamen, afvikles prøven som beskrevet ovenfor, men med en lidt mere pragmatisk tilgang i forhold til tidsaspektet i gruppedelprøven. I udgangspunktet afholdes hele prøvetiden til gruppedelprøven, men i praksis afvejes situationen undervejs, og prøvetiden kan på passende vis afkortes, under forudsætning af elevens accept, når eksaminator og censor har indsamlet tilstrækkeligt belæg for at sikre en korrekt bedømmelse af elevens samlede præstation efter afslutning af den individuelle prøve, der gennemføres som beskrevet ovenfor med sædvanlig forberedelses- og eksaminationstid.

Delprøve 2: Individuel prøve
Delprøve 2 er en individuel prøve med fokus på eksaminandens evne til på selvstændig vis at fremlægge et sammenhængende udsnit af et matematisk emne og gennemføre matematiske ræsonnementer, herunder bevisførelse, samt at indgå i en faglig samtale på baggrund af et udtrukket, men kendt, spørgsmål. Eksaminationstiden er ca. 24 minutter pr. eksaminand, og forud herfor har eksaminanden ca. 24 minutters forberedelsestid.

Prøven består dels af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, og dels af en uddybende faglig samtale med eksaminator (og eventuelt censor) med udgangspunkt i det overordnede emne for spørgsmålet. Fordelingen mellem de to faser er ikke præcist fastsat, men som rettesnor påbegyndes den faglige samtale senest, når halvdelen af eksaminationstiden er gået. Udformningen af spørgsmålene beskrives nedenfor.

Udkast til de endelige spørgsmål til den individuelle mundtlige prøve skal offentliggøres i god tid, om muligt mens der fortsat er undervisning og senest en uge før prøvens afholdelse. Eksaminator og censor indgår i et samarbejde om, at eventuelle uklarheder i spørgsmålene ryddes af vejen inden prøven.

Spørgsmålene skal tilsammen dække de faglige mål, kernestof og supplerende stof, idet hovedvægten på B-niveau lægges på stof, der er behandlet sent i undervisningsforløbet.

Spørgsmålene skal udformes med en overskrift og et eller flere konkrete delspørgsmål, som dog hverken må indeholde en disposition for eksaminationens forløb eller stikord til samtaledelen, og der skal levnes plads til, at eleven selv kan udvælge og disponere stoffet.

Overskriften danner rammen for den faglige samtale, mens de konkrete delspørgsmål skal besvares gennem eksaminandens præsentation, som i udgangspunktet skal være selvstændig. Spørgsmålene må gerne inddrage stof fra flere 'søjler' og tage udgangspunkt i et projekt, der repræsenterer en 'bro'.

Spørgsmålene må også gerne tage udgangspunkt i en overordnet kompetence eller en mindstekravskategori, der indgår i flere faglige stofområder.

Tildeling af spørgsmål til eksaminanderne ved den individuelle prøve foregår ved lodtrækning. Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Derudover er der ikke nogen grænse for, hvor få eller hvor mange spørgsmål der skal være, men normalt formuleres til et hold på 28 elever 16 forskellige spørgsmål, som alle går igen to gange. For meget store hold (>40) kan spørgsmålene undtagelsesvist gå igen tre gange. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.

De endelige spørgsmål, som så vidt muligt skal være ækvivalente i omfang og sværhedsgrad, skal før offentliggørelsen drøftes med eleverne, så det er klart for dem, præcist hvilke krav en given formulering dækker over. Det enkelte spørgsmål skal være så præcist formuleret, at der ikke kan være tvivl om, hvilket emne (stofområde eller kompetence) der ligger til grund for eksaminationen, og så det er klart, hvornår et spørgsmål er fuldt besvaret.

For ethvert spørgsmål gælder, at en fuld besvarelse udløser den højeste karakter (når eleven samtidigt præsterer på samme høje niveau i samtaledelen og i gruppedelprøven). Derfor skal ethvert spørgsmål formuleres i termer svarende til det højeste taksonomiske niveau, man kan forvente af en elev på B-niveau. Igen kan SOLO-taksonomien være en god hjælp i den konkrete udformning af de enkelte spørgsmål. Vær opmærksom på, at til besvarelse af et spørgsmål omhandlende en bestemt sætning med bevis hører en præsentation af sætningen, herunder forudsætningerne for, at sætningen gælder, samt en forklaring på, hvordan sætningen kan anvendes til at besvare matematiske spørgsmål. Beviset for sætningen udgør således kun en del af besvarelsen.

Ord som "fortæl om" eller lignende, der ikke er klare i deres kravspecifikation, bør undgås. Tilsvarende bør udtryk som "du kan eventuelt komme ind på..." eller "hvis der er tid, kan du..." undgås, fordi de skaber usikkerhed om, hvornår et spørgsmål er fuldt besvaret. Eksaminanderne må benytte alle hjælpemidler, herunder egne noter, ved både forberedelse og eksamination.

Beder man om en *redegørelse* for en given påstand, så svarer det i matematik til det højeste taksonomiske niveau, forstået på den måde at kravet til eksaminanden vil være en gennemgang af et bestemt bevis eller en udledning af et bestemt udtryk gennem en logisk følge af matematiske ræsonnementer. Ordet er således ækvivalent med ord som "bevis" eller "udled". Beder man om en *forklaring* på, hvad en given påstand går ud på, så er kravet på et lavere taksonomisk niveau, og en fuld besvarelse vil ikke kræve, at eksaminanden beviser eller udleder noget, men i stedet at eksaminanden fx forklarer, hvilken mening påstanden giver, og hvor den finder anvendelse.

Den faglige samtale kan tage udgangspunkt i elementer fra eksaminandens egen præsentation, som fx giver eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til, hvilke typer af problemer teorien kan anvendes til at besvare (fx ved opstilling af modeller), at inddrage et historisk perspektiv eller at vise overblik over hele det faglige område. Under samtalen kan eksaminanden ikke afkræves bevistunge eller meget detaljerede redegørelser. Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem.

Eksaminanden må under sin præsentation gerne støtte sig til egne notater, som samtidigt skal være tilgængelige for eksaminator og censor. Normalt foregår eksaminationen ved tavle og/eller computer (fx eksperimenter og simuleringer), hvor eksaminanden 'fører pennen' og har sine notater i nærheden, så disse let kan konsulteres af alle tre parter undervejs i eksaminationen. Det skal pointeres, at ren oplæsning eller afskrift af egne eller andres materialer på ingen måde kan tælle positivt i bedømmelsen. Det er en del af undervisningen, at eleverne arbejder med at frigøre sig fra eventuelle notater og lignende under en mundtlig præsentation af et fagligt stof.

På emu.dk findes eksempler på spørgsmål til den individuelle prøve.

Regler vedrørende eksaminandernes brug af internettet for at tilgå tilladte hjælpemidler ved prøverne fremgår af § 6 i "Bekendtgørelse om visse regler om prøver og eksamen i de gymnasiale uddannelser". I vejledningen til denne bekendtgørelse er der givet eksempler på, hvilke hjælpemidler der må, og hvilke der ikke må tilgås via internettet.

4.3 Bedømmelseskriterier

"Bedømmelsen er knyttet til de faglige mål, som grundlæggende karakteriserer det pågældende niveau." Bedømmelsen er altid en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de relevante faglige mål (jf. afsnit 2.1).

I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse.

Når der afgives karakterer, er det vigtigt at kende karakterbekendtgørelsens bestemmelser og beskrivelser af de enkelte karakterer. Karakteren er ét tal og ikke en udtalelse, og karakterskalaen består kun af ganske få tal. Derfor vil den enkelte karakter altid rumme en vis kompleksitet. I bilag 1 er det på skematisk form beskrevet, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på det aktuelle niveau for karaktererne 02, 7 og 12.

4.3.1 Bedømmelse: Den skriftlige prøve

Vægtningen af hver af de to delprøver i det todelte centralt stillede opgavesæt svarer til forholdet mellem det samlede pointtal, der kan opnås i hver af de to delprøver. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår både færdigheder og kompetencer dels uden og dels med brug af et matematisk værktøjsprogram.

Vægtningen af de enkelte opgaver i hver af de to delprøver fremgår af opgavesættet. Hver opgave indeholder ét eller flere spørgsmål. Et spørgsmål kan indeholde delspørgsmål.

En fuld besvarelse af ca. 80% af samtlige mindstekravsopgaver i et opgavesæt resulterer i karakteren 02. Besvarer eksaminanden yderligere andre opgaver i opgavesættet korrekt, tæller disse besvarelser positivt med frem mod en højere karakter. En eksaminand kan også opnå karakteren 02 ved korrekt besvarelse af tilfældigt udvalgte opgaver, der tilsammen indgår med samme vægt som ca. 80% af mindstekravsopgaverne i opgavesættet.

Bedømmelsen af eksaminandens samlede besvarelse af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i en overordnet vurdering af besvarelsen som helhed, hvor der lægges særlig vægt på matematisk korrekthed, men også på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
Der lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- mestrer mindstekravene, dvs. de grundlæggende matematiske færdigheder og kompetencer med og uden matematiske værktøjsprogrammer.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- kan anvende matematisk teori og matematiske metoder til modellering og løsning af forelagte problemer.
- kan redegøre for forelagte matematiske modeller, diskutere deres rækkevidde og inddrage relevante usikkerhedsbetragtninger.
- kan præsentere en løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde.
- behersker matematiske værktøjsprogrammer til bearbejdning af forelagte matematiske problemer.

Kravene til helhedsindtrykket ved besvarelse af opgaver i delprøve 1 og delprøve 2 er lidt forskellige, idet fx angivelse af mellemregninger giver god mening i besvarelse af opgaver i delprøve 1, men sjældent i besvarelser af opgaver i delprøve 2 med brug af matematiske værktøjsprogrammer, hvor der i stedet er krav om, at eksaminanden dokumenterer sine matematiske overvejelser i brugen af programmets faciliteter. Til gengæld er der behov for forklaringer og henvisninger til diverse grafer og figurer i besvarelser af opgaver ved begge delprøver.

Ved bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelse af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke kan henføres til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.

Specielt med henblik på kategorien formidling og forklaring omfatter ordet "parametre" både de variable og konstanterne i en model. Formuleringer som "Indfør passende variable…" betyder, at eleven skal vælge variabelbetegnelser og forklare, hvad hver af de variable beskriver i den aktuelle kontekst. Formuleringer som "Gør rede for, hvad tallene fortæller om…" hentyder til, at eleverne skal forklare, hvad modellens konstanter betyder i den aktuelle kontekst. I modelleringsopgaver, hvor eleverne fx bliver bedt om at præsentere et punktplot, residualplot eller en graf, er der ikke krav om en konklusion.

I besvarelsesprocessen kan det være hensigtsmæssigt for nogle elever at kopiere opgaveformuleringer fra den digitale version af opgavesættet ind i besvarelsen, som typisk udfærdiges i et matematisk værktøjsprogram. Det anbefales dog, at eleverne uddrager den nødvendige information for besvarelse af opgaven (og derefter eventuelt sletter udklippet), så det sikres, at opgavebesvarelsen fremstår som en helhed, og elevens tankegang fremgår klart.

4.3.2 Bedømmelse: Den mundtlige prøve

Ved den mundtlige gruppedelprøve på B-niveau lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan anvende matematisk teori og matematiske værktøjsprogrammer til at undersøge og analysere en konkret matematisk problemstilling.
- kan diskutere, vurdere og anvende hensigtsmæssige matematiske metoder til modellering og problembehandling.
- kort og præcist kan præsentere en fremgangsmåde til løsning af et konkret matematisk problem.
- har overblik over og kan perspektivere en matematisk problemstilling.
- kan reflektere over matematikkens anvendelser både faginternt og fageksternt.

Ved den mundtlige individuelle delprøve lægges særlig vægt på, om eksaminanden:

- kan præsentere et konkret afgrænset matematisk emne på en klar og overskuelig måde.
- demonstrerer indsigt i matematisk teori og karakteristiske sider af matematisk ræsonnement og bevisførelse.
- kan håndtere matematisk symbolsprog og operere med matematiske begreber.
- med eksperimenterende metoder og en logisk følge af matematiske ræsonnementer kan argumentere for en matematisk påstand og/eller opstille en matematisk model.
- har overblik over og kan perspektivere et konkret afgrænset matematisk emne.

Karakteren for præstationen ved den mundtlige prøve er en helhedsvurdering, og den kan ikke fastsættes som et gennemsnit af to delkarakterer for hver af de to delprøver. Ved bedømmelse af eksaminandens samlede præstation skal eksaminandens matematiske færdigheder og kompetencer ved begge delprøver afvejes i overensstemmelse med bedømmelseskriterierne for at nå frem til helhedsvurderingen. I ekstreme tilfælde, hvor en eksaminand præsterer højt niveau i den ene delprøve og intet eller meget lavt niveau i den anden delprøve, vurderes, hvorvidt eksaminandens samlede præstation på det foreliggende grundlag lever op til de faglige mål, hvor der indgår dels modellerings- og problembehandlingskompetence, dels ræsonnementskompetence.

5 Bilag

5.1 Bilag 1: Karakterbeskrivelser

5.1.1 Oversigt over karakterskalaen

Karakter	Betegnelse	Beskrivelse
12	Fremragende	Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler.
7	God	Karakteren 7 gives for den gode præstation, der demonstrerer opfyldelse af fagets mål, med en del mangler.
02	Tilstrækkelig	Karakteren 02 gives for den tilstrækkelige præstation, der demonstrerer den minimalt acceptable grad af opfyldelse af fagets mål.

5.1.2 Karakterbeskrivelser: Skriftlige besvarelser

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt.

Eksaminanden…	**12**	**7**	**02**
Dybde/ kompleksitet/ ræsonnement	- kan redegøre for og anvende modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde. - vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer viden om anvendelse af matematiske modeller. - demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller. - demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ terminologi/ fremlæggelse	- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart.	- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog.	- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ overblik/ perspektiv	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt. - demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler.	- er i stand til at bruge matematiske værktøjsprogrammer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge. - demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter.	- kan anvende matematiske værktøjsprogrammer i løsning af simple opgavetyper. - demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter.

5.1.3 Karakterbeskrivelser: Mundtlige besvarelser

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål/problemstilling.

Eksaminanden...	**12**	**7**	**02**
Dybde/ kompleksitet/ ræsonnement	- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling. - kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller. - demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teori.	- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse. - kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et simpelt matematisk problem. - kan gennemføre hovedlinjerne i et simpelt matematisk ræsonnement.	- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller. - demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem. - demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement.
Sprog/ terminologi/ fremlæggelse	- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig klart med sikker anvendelse af matematisk terminologi.	- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi.	- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ overblik/ perspektiv	- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	- demonstrerer viden om et område af matematik eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.

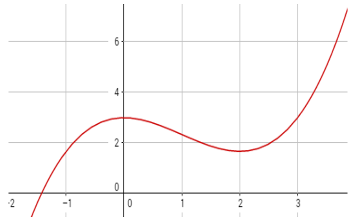
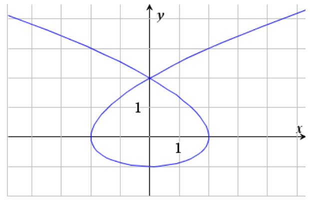
5.2 Bilag 2: Eksempler på opgaver i mindstekravskategorierne.

For hver opgave er det markeret, om opgaven hører til i delprøve 1 (D1) eller delprøve 2 (D2).

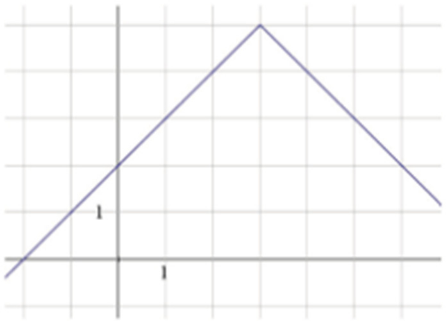
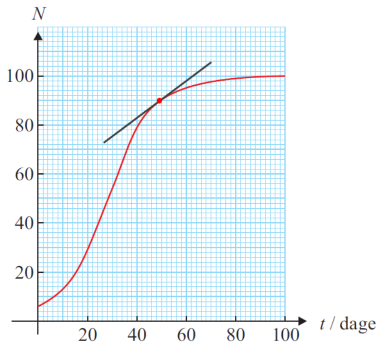
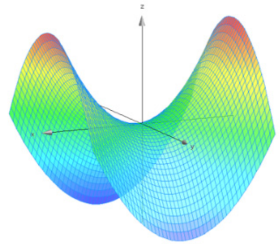
Begreber og symboler	stx C	stx B	stx A
Kende begrebsbetegnelser (ord og symboler) og betydning af begreber	Bestem tværvektoren til vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. D1	En andengradsligning har en positiv diskriminant. Angiv antallet af løsninger til ligningen. D1	En vektorfunktion $\vec{r}(t)$ er givet ved $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}2x^2\\-3x\end{pmatrix}$. Bestem hastighedsvektoren for $\vec{r}$. D1
Indføre variable og angive symbolske betegnelser	Antallet af individer i en bestemt population vokser med 30% om året. I år 2000 var der 460 individer i populationen. Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i antallet af individer i populationen. D1	En ærlig 8-sidet terning viser tallene 1 til 8. Der kastes med terningen 10 gange. X er en binomialfordelt stokastisk variabel, der tæller antallet af gange, terningen lander på en otter. Angiv antalsparameteren og sandsynlighedsparameteren for X i binomialfordelingen. D1	Væksthastigheden for udviklingen i antallet af fluer i et bestemt område er 3 gange så stor som antallet af fluer i området. Indfør passende variable, og opstil en differentialligning, der beskriver udviklingen i antallet af fluer. D1

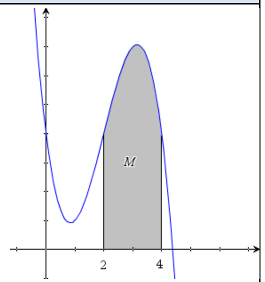
Formler og funktioner	stx C	stx B	stx A
Omskrive og reducere formler og udtryk med papir/blyant og med CAS	Reducér udtrykket $a\cdot(a-b)+2ab$. D1	Reducér udtrykket $(a-b)^2-b^2$. D1	Reducér udtrykket $\frac{a^2+a}{a}$. D1
Indsætte konkrete værdier i formler (forskrifter) og tilskrive resultatet betydning	Funktionen $f(x)=25\cdot1{,}3^x$ beskriver udviklingen i antallet af individer i en bestemt population. Bestem $f(5)$, og fortolk resultatet. D2	Bestem en ligning for tangenten til f i punktet $P(2,4)$, når det oplyses, at $f'(2)=3$. D1	En funktion f af to variable er givet ved $f(x,y)=x^2-y^2$. Bestem gradienten i punktet $P(1,1)$. D2
Aflæse indgående størrelser og tilskrive størrelserne betydning (matematisk og i kontekst)	Funktionen $f(x)=25\cdot1{,}32^x$ beskriver udviklingen i antallet af individer i en bestemt population. Giv en fortolkning af konstanterne 25 og 1,32. D1	Ligningen for en cirkel er givet ved $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Forklar, hvad de tre konstanter i ligningen fortæller om cirklen. Stx – D1	Giv en geometrisk fortolkning af konstanterne i udtrykket $\int_2^4 f(x)\,dx=7$. D1
Opstille formler og udtryk ud fra givne oplysninger eller en sproglig beskrivelse	Peter indsætter 5000 kr. på en konto, der giver en rente på 2% pr år. Pengene bliver stående i n terminer, hvorefter Peter kan hæve *K* kr. Opstil et udtryk, der beskriver sammenhængen mellem *K* og *n*. D1	Fra et almindeligt spil kort trækkes et kort, og det noteres, om kortet er en ruder. Forsøget gentages 7 gange. *X* er således en stokastisk variabel, der tæller antallet af gange, der trækkes en ruder. *X* er binomialfordelt med antalsparameter $n=7$ og sandsynlighedsparameter $p=\frac{1}{4}$.	I en model kan udviklingen i træmassen i en skov beskrives ved en funktion *M*, hvor $M(t)$ beskriver træmassen (målt i kg) til tidspunktet *t* (målt i år). I modellen er væksthastigheden i træmassen proportional med træmassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 1,04. Opstil en differentialligning, som *M* må opfylde.

		Opskriv en formel til beregning af sandsynligheden for, at der blandt de 7 kort er netop 4 rudere. D1	D1

Ligningsløsning	**stx C**	**stx B**	**stx A**
Afgøre, om et oplyst resultat er en løsning til en ligning med papir/blyant og med CAS	Undersøg, om punktet (2,4) ligger på linjen med forskriften $f(x)=x+3$. D1	Undersøg, om 2 er løsning til ligningen $x^3-5x+3x+6=0$. D1	Vis, at $f(x)=e^{2x}+3$ er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx}=2y-6$. D1
Algebraisk løsning af ligninger med papir/blyant og med CAS	Løs ligningen $2(x+1)=7+x$. D1	Løs ligningen $-x^2+4x-3=0$. D1	Løs ligningen $(x^2-4)\cdot x^3=0$. D1
Grafisk løsning af ligninger med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram	To funktioner f og g er givet ved $f(x)=x+2$ og $g(x)=-2x+5$ Tegn graferne for de to funktioner, og bestem koordinatsættet til skæringspunkterne mellem de to grafer. D2	 På figuren ses grafen for en funktion f. Løs ligningen $f'(x)=0$. D1	 På figuren ses parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$. Bestem koordinatsættene til de punkter, hvor $x'(t)=0$. D1

Operationer på funktioner	stx C	stx B	stx A
Differentiere funktioner med papir/blyant og med CAS		Givet funktionen $f(x)=x^3+\frac{1}{x}, x>0$. Bestem den afledede funktion $f'(x)$. D1	En funktion f er givet ved $$f(x)=\ln(x^2+3x).$$ Bestem $f'(x)$. D1
Integrere funktioner / bestemme stamfunktioner med papir/blyant og med CAS			En funktion f er givet ved $$f(x)=x^3+e^{2x}.$$ Bestem en stamfunktion $F(x)$. D1
Sammensætte funktioner med papir/blyant og med CAS		Givet funktionerne $f(x)=2x+2$ og $g(x)=x^2$. Opstil et funktionsudtryk for den sammensatte funktion $f(g(x))$. D2	Funktionerne f og g er givet ved $f(x)=e^{2x}$ og $g(x)=2x-1$. Opstil et funktionsudtryk for den sammensatte funktion $f(g(x))$. D1

Grafer og figurer	stx C	stx B	stx A
Tegne grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram, herunder hensigtsmæssigt valg af 'grafvindue'	To vektorer er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Tegn vektorerne i samme koordinatsystem. D1	En funktion f er givet ved $f(x)=\begin{cases}-x+7 & x\leq 2\\ x^2+1 & x>2\end{cases}$ Tegn grafen for f i et passende koordinatsystem. D2	Givet $f(x,y)=x^2-x\cdot y$. Tegn grafen for f. D2
Aflæse på forelagte grafer og grafiske repræsentationer samt geometriske figurer og på selvfrembragte (med papir/blyant og med matematisk værktøjsprogram) grafer (og geometriske figurer) – og tilskrive resultater betydning (matematisk og i kontekst)	 På figuren ses grafen for en stykkevist defineret funktion. Bestem x når $y=2$. D1	 Bestem væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet $t=50$. D1	 På figuren ses grafen for en funktion f af to variable. Hvilken type stationært punkt har f i punktet $O(0,0,0)$? D2

<table>
<tr><th>Tabeller</th><th>stx C</th><th>stx B</th><th>stx A</th></tr>
<tr>
<td>Aflæse data fra tabel, herunder funktionstabel (herunder sandsynlighedsfordeling)</td>
<td>Udfyld resten af tabellen, når det oplyses, at f er en eksponentialfunktion.
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>
D1</td>
<td>Tabellen nedenfor viser udvalgte funktionsværdier for et andengradspolynomium f, hvis graf er en parabel.
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>9</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>9</td></tr>
</table>
Bestem toppunktet for parablen.
D1</td>
<td>Grafen for f afgrænser et område M, der har et areal (se figur).


Tabellen nedenfor viser udvalgte funktionsværdier for en stamfunktion F til f.
<table>
<tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$F(x)$</td><td>7</td><td>5</td></tr>
</table>
Bestem arealet af området M.
D1</td>
</tr>
<tr>
<td>Opskrive (importere) data i tabel, herunder frembringelse af funktionstabel med papir/blyant og med CAS</td>
<td>I tabellen er angivet de svar, 100 personer gav, da de blev spurgt om deres skonummer.
Bestem frekvensen for hvert skonummer.
D2</td>
<td>Opstil en sandsynlighedstabel for kast med to terninger, hvor den stokastiske variabel X tæller summen af de to terningers øjental.
D1</td>
<td>I tabellen er angivet de svar 1000 personer gav, da de blev spurgt om deres højde. (Datafil vedlagt)
Undersøg, om datasættet med rimelighed kan siges at være normalfordelt.
D2</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>'Black box'-kommandoer i matematisk værktøjsprogram</th><th>stx C</th><th>stx B</th><th>stx A</th></tr>
<tr>
<td>Anvende indbyggede 'en-knap-kommandoer'</td>
<td>På en restaurant kan man vælge mellem 16 småretter.
Bestem antallet af måder, hvorpå man kan sammensætte en menu med tre retter på restauranten.
D2</td>
<td>En funktion f er givet ved $f(x)=x^2-x-3$.
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2,f(2))$.
D2</td>
<td>En funktion f er givet ved $f(x)=x^3-8x^2+16x$.
Det oplyses, at grafen for f skærer førsteaksen i x=0 og x=4.
Bestem arealet af det område, som grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant.
D2</td>
</tr>
<tr>
<td>Indbyggede statistiske undersøgelser af data ('black box')</td>
<td>Nedenstående tabel viser sammenhørende værdier for x og y.
<table><tr><td>x</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td>y</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>I en model antages, at sammenhængen mellem x og y kan beskrives ved en lineær funktion.
Benyt lineær regression til at opstille modellen, og tegn det tilhørende residualplot.</td>
<td>Ved en vælgerundersøgelse blandt 1235 personer i en stikprøve sagde 66% af personerne i stikprøven, at de ville stemme på parti P.
Bestem ud fra stikprøven et 95%-konfidens-interval for andelen af stemmer på parti P.</td>
<td>Tabellen viser et datasæt.
<table><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>Undersøg, om tabellens data tilnærmelsesvist er normalfordelte.</td>
</tr>
</table>

BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET